实对称矩阵的拟特征值理论与应用

Theory and Application of Quasi-characteristic Value of Real Symmetrical Matrix

微分几何
矩阵分析
线性不等式方程组
非线性规划理论

Differential Geometry
Matrix Analysis
Linear Inequation Sets
Nonlinear Programming Theory

朱小平 · 著

新星出版社
NEW STAR PRESS

ISBN 978-7-80225-409-1

9 787802 254091 >

定价：98.00元

0151.21/45

2008

实对称矩阵的拟特征值理论与应用

Theory and Application of Quasi-characteristic Value of Real Symmetrical Matrix

微分几何
矩阵分析
线性不等式方程组
非线性规划理论

Differential Geometry
Matrix Analysis
Linear Inequation Sets
Nonlinear Programming Theory

朱小平 著

新星出版社 NEW STAR PRESS

图书在版编目(CIP)数据

实对称矩阵的拟特征值理论与应用 / 朱小平著.
—北京:新星出版社,2008.3
ISBN 978-7-80225-409-1
Ⅰ.实… Ⅱ.朱… Ⅲ.对称矩阵—特征值—研究 Ⅳ.O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 199749 号

实对称矩阵的拟特征值理论与应用

朱小平 / 著

责任编辑: 许 彬
装帧设计: 林 涛 秦 嶷

出版发行:	新星出版社
出 版 人:	谢 刚
社 址:	北京市东城区金宝街 67 号隆基大厦 100005
网 址:	www.newstarpress.com
电 话:	010-65270477
传 真:	010-65270449
法律顾问:	北京建元律师事务所
经销电话:	010-65512133
读者服务:	010-65267400 service@newstarpress.com
邮购地址:	北京市东城区金宝街 67 号隆基大厦 100005
印 刷:	山东新华印刷厂临沂厂
开 本:	787 × 1092 1/16
印 张:	66.125 字 数:1286 千字
版 次:	2008 年 3 月第一版 2008 年 3 月第一次印刷
印 数:	0 001~700
书 号:	ISBN 978-7-80225-409-1
定 价:	98.00 元

版权专有,侵权必究;如有质量问题,请与出版社联系调换。

本书的中心内容是建立矩阵特征值的一个新的应用分支——实对称矩阵的拟特征值（及向量）的分析方法。实对称矩阵的拟特征值的几何意义在于它刚好与曲面的主法曲率成比例，因此具有重要的理论与应用价值。在此基础上，本书还涉及了拟特征值（向量）分析方法在经典微分几何、非线性规划领域的许多应用。为此，本书特别对经典微分几何、非线性规划做了许多方面的重新描述。

如在微分几何方面，引用并完善了 R^m 欧氏空间上的多重矢量积方法，从而将 R^3 空间上经典微分几何的第一、第二基本微分形式分析方法推广到 R^m 空间，给出了 R^m 空间上n维曲面（$1\leqslant n<m-1$）的Gauss-Codazzi方程，讨论了真空Einstein方程几何解的构造等；在非线性规划方面，给出了Lagrange乘子的解空间构造，分析了最小值点处相关的线性化锥、正法锥、闭切锥的构造，给出了一阶、二阶约束品性的几何意义，得到了Kuhn-Tucker条件的充要形式并给出了可应用的二阶充分条件的判别方法等。作为以上内容所涉及的另一个分析工具，本书还构建了线性不等式方程组的解的方法。在这一方法下，林总繁多的线性不等式方程组被归结为 $Cx\geqslant 0 \quad x\geqslant 0$ 和 $Cx\geqslant b \quad x\geqslant 0$ 这二种形式，并在拓展的多胞形表示定理下，可得到其解空间的构造方法。

阅读本书只需具备普通高等数学、线性代数和经典微分几何方面的知识。本书可供数学、经济学研究者、教师及大专学生阅读、使用。

· 作者简介 ·

朱小平　男，1954年生。1976-1984年在冶金部南昌有色冶金设计院从事技术工作；1984-1993年在江西省政府经济研究中心从事经济改革与区域发展战略的决策咨询与研究工作；1994年以来，从事企业财务与重组的咨询工作并从事经济学范式理论和现代分析方法的研究工作。

下到世界各个细微部分的黑洞洞的矿坑里去——只能从那里取出真正的和公正的认识的黄金……

——西美尔(Georg Simmel,1890 年)

目　录

§1 导　言

§1.1 问题的由来

著名经济学家（同时也能称为是数学家）吉拉德·德布鲁（Gerarad Debreu）[1]在1971年9月于Barcelona举行的计量经济学会议上，作了一个题为《光滑偏好》的主题发言[2]. 在这个发言中，Debreu对于m维Euclid空间R^m上的超曲面$u(\boldsymbol{x})=c$（c是常数）在$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0$点处的Gauss曲率$\kappa(\boldsymbol{x}^0)$，给出了一个重要的推论，即

$$\kappa(\boldsymbol{x}^0)=-\frac{\begin{vmatrix}\nabla^2 u(\boldsymbol{x}^0) & \nabla u(\boldsymbol{x}^0)\\ \nabla u^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) & 0\end{vmatrix}}{\|\nabla u(\boldsymbol{x}^0)\|^{m+1}} \quad \text{—(1.1.1)}$$

其中 $\nabla u(\boldsymbol{x})=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1},\dfrac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\dfrac{\partial u}{\partial x_m}\right)^{\mathrm{T}}$ 且$\nabla u(\boldsymbol{x}^0)=\nabla u(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0}$，下同.

$\nabla^2 u(\boldsymbol{x})=\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right]_{m\times m}\quad i,j=1,\cdots,m$

$\boldsymbol{x}$——向量. $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$，上标“T”表示转置.

$\|\cdot\|$——欧氏范数. $\|\boldsymbol{x}\|=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}$. $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$是向量内积.

$|\cdot|$——在这里表示行列式，其他地方也用于表示绝对值.

注意，(1.1.1)式等号右边的分子其实就是$u(\boldsymbol{x})$函数的Hessian矩阵的加边行列式，故可将(1.1.1)式表示的关系总结为以下定理.

定理1.1.1 (Debreu)设$u(\boldsymbol{x})=c$，c是常数，是R^m空间上的曲面，$\boldsymbol{x}\in D_x\subset R^m$，$D_x$是$R^m$的一个开集. 若$\boldsymbol{x}^0\in D_x$，且$\nabla u(\boldsymbol{x}^0)\neq\boldsymbol{0}$，则$u(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}^0$处的Gauss曲率$\kappa(\boldsymbol{x}^0)$等于$u(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}^0$点处的加边Hessian矩阵行列式除以梯度范数

---

〔1〕 G. Debreu是1983年诺贝尔经济学奖获得者，美国伯克利大学教授.

〔2〕 可见于《价值理论及数理经济学的20篇论文》，G. Debreu，杨大勇、腾飞译，首都经济贸易大学出版社，2002年，第411页.

$\| \nabla u(\boldsymbol{x}^0) \|$ 的 $m+1$ 次幂的商乘以 (-1)[1]. ■

证明 由微分几何中可知,令 M 是 R^m 中一个 C^2 超曲面[2],令 $\boldsymbol{x}^0$ 是 M 中一点,并且记在 M 中 $\boldsymbol{x}^0$ 邻域内一点 $\boldsymbol{x}$ 处正交 M 的单位向量为 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$. 为了定义 M 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 Gauss 曲率,考虑 M 中过 $\boldsymbol{x}^0$ 的参数曲线 γ,其在 $\boldsymbol{x}^0$ 的切向量为 $\boldsymbol{t}$. 与 γ 中每一点 $\boldsymbol{x}$ 相关,R^m 中单位球面 M' 上的点为 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$. 这样即得到 M' 中过 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0)$ 的参数曲线 γ',其在 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0)$ 的切向量为 $\boldsymbol{t}'$. 向量 $\boldsymbol{t}'$ 仅同向量 $\boldsymbol{t}$ 有关(与参数曲线 γ 无关). 它平行于在 $\boldsymbol{x}^0$ 与 M 相切的超平面. 函数 $\boldsymbol{t} \rightarrow \boldsymbol{t}'$ 是 Weingarten 映射(记为 W 映射). W 映射是线性的. 由 W 映射的定义,其行列式就是 Gauss 曲率 $\kappa(\boldsymbol{x}^0)$.

因此,在 R^m 中选定 M 或 M' 中一点的前 $m-1$ 个坐标为 $\boldsymbol{x}^0$ 邻域的坐标系,或 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0)$ 的坐标系. 这样 $\kappa(\boldsymbol{x}^0)$ 是变换

$$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{m-1}) \rightarrow (g_1(\boldsymbol{x}),\ g_2(\boldsymbol{x}),\ \cdots,\ g_{m-1}(\boldsymbol{x})) \qquad —(1.1.2)$$

的 Jacobi 行列式,其中坐标

$$x_m = \zeta(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{m-1}) \qquad —(1.1.3)$$

由[3]

$$u(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}^0) \qquad —(1.1.4)$$

隐式决定. 因而

$$\kappa(\boldsymbol{x}^0) = | \partial_j g_i + \partial_m g_j \partial_j \zeta |_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0} \qquad i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1 \qquad —(1.1.5)$$

用 $-g_j/g_i$ 代替 $\partial_j\zeta$,直接展开以上行列式,便可得到

$$\kappa(\boldsymbol{x}^0) = -\begin{vmatrix} \partial_j g_i & g_i \\ g_j & 0 \end{vmatrix}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0} = -\frac{\begin{vmatrix} \partial_i\partial_j u & \partial_i u \\ \partial_j u & 0 \end{vmatrix}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0}}{\| \nabla u(\boldsymbol{x}^0) \|^{m+1}} \qquad i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1 \qquad —(1.1.6)$$

此即(1.1.1)式[4]. 这里符号

$$\begin{vmatrix} \partial_i\partial_j u & \partial_i u \\ \partial_j u & 0 \end{vmatrix}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0} = \begin{vmatrix} \nabla^2 u(\boldsymbol{x}^0) & \nabla u(\boldsymbol{x}^0) \\ \nabla u^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) & 0 \end{vmatrix}$$

---

〔1〕 这里使用的符号与原文有所不同,但意义是一致的.

〔2〕 C^1、C^2 表示一阶可微、二阶可微函数类.

〔3〕 附带说明,$u(\boldsymbol{x})$ 函数的经济学意义是效用函数,故 $u(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$.

〔4〕 以上证明是依 Debreu 的原证明过程简化、改写的. Debreu 的原证明可见《光滑偏好》一文,见前注.

而符号

$$\begin{vmatrix} \partial_j g_i & g_i \\ g_j & 0 \end{vmatrix}$$

也是一个加边行列式(见下文).

Debreu 推出的这一结论肯定是正确的,并且,由于它将 Gauss 曲率表示为加边 Hessian 矩阵行列式与梯度向量范数之比,用十分简洁的形式将 Gauss 曲率表达了出来,从而,可以方便地推广到高维空间的曲面上的 Gauss 曲率的确定问题中去. 因此,即便我们"忽略"——实际上当然不能忽略——这一成果的其他理论意义,单就其在高维空间中关于曲面曲率问题的计算优势而言(因为行列式的算法早已有十分成熟高效的程序),也至少应当引起人们的关注. 但自 Debreu 公布这一成果以来,事实似乎刚好相反. 人们对这一成果并没有予以(足够的)重视[1]. 例如,以曲面的曲率为中心问题之一的微分几何曲面论文献中(似乎)没有谁提及 Debreu 的这一重要贡献.

这样的一个正确的而又蕴含了重大理论价值的成果长期以来不被人们所关注,一定是有具体原因的. 搞清这些原因并拓展 Debreu 的成果,使其中的理论价值得以展现,这即是写作本书的缘由之一.

对 Debreu 的成果的拓展,在以下各章节中逐步给予详述. 这里仅说明一下我所理解的导致这一成果不被人们关注的(可能的)几个因素. 为此,以下先插入一节以简要方式引用微分几何曲面论中与本书所叙内容有关的概念与定理.

§1.2　曲面论扼要

事先说明,本书的主题并不是微分几何,并且,作者的研究方向也不是数学而是经济学. 现代经济学分析的数学基础之一是非线性规划理论. 在非线性规划这一数学分支中,"曲面"这一概念是以相对具相的方式出现的. 在微观经济学中"曲面"则是以特定指称的方式——比如说"无差异曲面"即 Debreu 在《光滑偏好》一文中所分析的 $u(\boldsymbol{x}) = c$ 决定的曲面——出现的. 设 $f(\boldsymbol{x})$是(至少)三阶可微函数,经济学中的"曲面"通常用隐函数形式表示为

$$f\colon f(\boldsymbol{x}) = c \qquad \boldsymbol{x} \in D_x \subset R^m \qquad —(1.2.1)$$

D_x 是 $\boldsymbol{x}$ 的定义域,开集,有时也直接写成 D. 曲面函数亦或显式地表示为

[1] 由于在《光滑偏好》一文中,Debreu 在给出这一成果时并未注明是引自其他人的文献,故作者在这里指称这一成果即应归属于 Debreu 本人.

$$F: z = f(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x} \in D_x \subset R^m \qquad z \in R \qquad —(1.2.2)$$

(1.2.2)式给出的曲面形式称为“Monge 形式”[1]. 附带地说,(1.2.1)式也可以看成是(1.2.2)式中令 $z = c$ 决定的一个等值曲面方程.

在非线性规划的约束条件下的极值理论中,比如经济学关于消费者在收入预算约束下的效用最大化行为中,其极值总是在目标函数的某个等值曲面上达到,如消费者的效用最大化消费状态总是在效用无差异曲面上达到.因此,在非线性规划的极值分析中,由目标函数的等值曲面所决定的 Hessian 矩阵(以下用 H 或 $H(\boldsymbol{x})$ 表示这一矩阵)

$$H = \left[\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{m\times m} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, m \qquad —(1.2.3)$$

以及加边 Hessian 矩阵(以下用 H_∂ 或 $H_\partial(\boldsymbol{x})$ 表示这一矩阵)

$$H_\partial = \begin{bmatrix} H(\boldsymbol{x}) & \nabla f(\boldsymbol{x}) \\ \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) & 0 \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)} \qquad —(1.2.4)$$

具有至关重要的意义与作用.

但令人遗憾的是,现有文献中似乎少有专注于 H、H_∂ 矩阵分析的资料.特别是关于加边 Hessian 矩阵这一类实对称矩阵的分析,几乎是空白.由于加边 Hessian 矩阵是现代微观经济学分析的数学基础之一,建立对于 H_∂ 矩阵的分析对于经济学研究本身就具有迫切性.以下章节的叙述可清晰地看到 Debreu 的成果(定理 1.1.1)恰好是一座通向加边 Hessian 矩阵分析的桥梁.这可以说是促使作者写作本书的缘由之二.如本书书名所言,本书的主题实际上就是加边实对称矩阵的拟特征值理论.

鉴于以上缘由,本书以下章节中将更多地使用(1.2.1～2)式以表示 R^m(或 R^{m+1})欧氏空间上的曲面,当然,也会涉及微分几何中主要使用的“参数曲面片”表示形式,即如 R^3 空间中用以下方式参数化表示的曲面形式

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{r}(u_1, u_2) = (x, y, z)^{\mathrm{T}} \qquad —(1.2.5)$$

$$\text{其中} \quad \begin{cases} x = x(\boldsymbol{u}) = x(u_1, u_2) \\ y = y(\boldsymbol{u}) = y(u_1, u_2) \\ z = z(\boldsymbol{u}) = z(u_1, u_2) \end{cases} \quad \begin{matrix} \boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}} \in D_{\boldsymbol{u}} \subset R^2 \\ \boldsymbol{r} = (x, y, z)^{\mathrm{T}} \in R^3 \end{matrix} \qquad —(1.2.6)$$

$D_{\boldsymbol{u}}$——$\boldsymbol{u}$ 的定义域.

很容易将(1.2.5)式表示的参数函数推广到 R^m 及 C^m(复欧氏空间)空间上去.本书同时使用了一般曲面函数与参数曲面函数的形式,这是因为在古典微分

---

[1] 《微分几何初步》,陈维桓,北京大学出版社,1990年,第48页.

几何中,所有概念、定理的表述几乎都是以参数变换的方式给出的,所以,在本章以下所引用的微分几何相关内容中,必要用到参数变换的方式予以叙述.

正则曲面

设在区域 $D \subset R^3$ 内给定了一个连续可微函数

$$f = f(x, y, z)$$

则当 $f(\cdot)$的梯度向量

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$$

时,函数 f 的等值面

$$f(x, y, z) = c \qquad (c - \text{const})$$

是 R^3 中的正则曲面[1].现将这一性质拓展到一般的 R^m 空间上.

定义 1.2.1 $\boldsymbol{x} \in R^m$ $f(\boldsymbol{x})$是 $\boldsymbol{x} \in D \subset R^m$ 上的二次(以上)可微函数,且 $c \in f(D)$ 是正则的,即对任一 $\boldsymbol{x} \in D$ 并满足

$$f(\boldsymbol{x}) = c$$

的点 $\boldsymbol{x}$ 上,梯度向量

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0} \qquad —(1.2.7)$$

则

$$f(\boldsymbol{x}) = c$$

决定的等值曲面是正则曲面. ■

由这个定义即知以 Monge 形式(1.2.2)式表示的曲面都是 R^{m+1} 空间中的正则曲面.因为构造

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, z)^{\mathrm{T}} \in R^{m+1}$$

令

$$F(\bar{\boldsymbol{x}}) = z - f(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad —(1.2.8)$$

则对任一使(1.2.3)式成立的$\bar{\boldsymbol{x}}$,都有

$$\nabla F(\bar{\boldsymbol{x}}) = (-\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}), 1)^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$$

成立.

以下假设以(1.2.1)式的形式所决定的曲面都是正则曲面.

---

[1] 陈维桓,见前注,第 55 页.

曲面的切平面与法向量

正则曲面上任一点处的梯度向量都不是 0 向量，并且由多元函数微分的理论可知，梯度向量是唯一的[1]. 所以，由 $f(\boldsymbol{x})$ 的梯度向量 $\nabla f(\boldsymbol{x})$，总可以决定由(1.2.1)式给出的正则曲面 f 任一点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的切平面 L_f，且 L_f 由下式决定

$$L_f:\ \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0 \qquad \text{—(1.2.9)}$$

其中

$$f(\boldsymbol{x}) = c$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0 \qquad \boldsymbol{x} \in R^m$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 是起点在 $\boldsymbol{x}^0$ 指向 $\boldsymbol{x}$ 的方向向量. 类似地，对 Monge 形式给出的曲面 F 上的 $\bar{\boldsymbol{x}}^0$ 点，有切平面 L_F，

$$L_F:\ \nabla F^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{x}}^0)\bar{\boldsymbol{\alpha}} = 0 \qquad \text{—(1.2.10)}$$

其中

$$F(\bar{\boldsymbol{x}}^0) = z^0 - f(\boldsymbol{x}^0) = 0$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{x}}^0 \qquad \bar{\boldsymbol{x}} \in R^{m+1}$$

显然 $\nabla f(\boldsymbol{x})$ 即是切平面 L_f 的法方向向量，同时也就是曲面 f 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的法方向向量.

注意到 $\|\nabla f(\boldsymbol{x})\| \neq 0$，故可规定用

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x}^0) = \frac{\nabla f(\boldsymbol{x}^0)}{\|\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\|} \qquad \text{—(1.2.11)}$$

表示 f 曲面上点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的单位法向量(场)函数. 由于 $f(\boldsymbol{x})$ 至少三次可微，故 $\widetilde{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x}^0)$ 是可微的. 曲面上可微单位法向量场的存在，即表示由(1.2.1)式表示的正则曲面是可定向的. $\widetilde{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x}^0)$ 即给出了一个指向(比如说规定为正方向)[2].

对于 Monge 形式的曲面，其单位可微法向量场用

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}_F(\boldsymbol{x}^0) = \frac{(-\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0),\ 1)^{\mathrm{T}}}{\|1 + \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\|} \qquad \text{—(1.2.12)}$$

表示.

$\widetilde{\boldsymbol{N}}$、$\widetilde{\boldsymbol{N}}_F$ 有时也简化地写成 $\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{N}_F$.

---

[1] 如果多元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 可微，则微分是唯一的. 见《多元微积分》，C. Goffman，史济怀等译，人民教育出版社，1978 年，第 36 页，定理 4.

[2] 参见《曲线与曲面的微分几何》，Manfredo P. do Carmo 著，田畴等译，机械工业出版社，2005 年，第 76 页，命题 1.

正则参数曲面片

正则参数曲面片这一概念(在经典微分几何中)是限制在 R^3 空间上的. 将(1.2.10~12)式中 $\boldsymbol{r}$ 看成是 R^2 中的子集 D 到 R^3 的子集 $\boldsymbol{r}(D)$的映射.

定义 1.2.2 对 $D\subset R^2$ $(u_0, v_0)\in D$, 如果可微映射 $\boldsymbol{r}$ 的偏导数(向量)

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{r}}_1(u_1^0,\ u_2^0)=\left.\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\right|_{(u_1^0,\ u_2^0)}\\[2ex]\dot{\boldsymbol{r}}_2(u_1^0,\ u_2^0)=\left.\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\right|_{(u_1^0,\ u_2^0)}\end{cases}\qquad —(1.2.13)$$

是线性无关的,称曲面片 $\boldsymbol{r}(D)$在点(u_1, u_2)处是正则的,如果对任一$(u_1, u_2)\in D$, $\boldsymbol{r}$ 都是正则的,称 $\boldsymbol{r}(D)$为正则参数曲面,(u_1, u_2)为正则参数. ■

定义 1.2.3 设 D 是 R^2 中单连通开集

$$\boldsymbol{r}: D\rightarrow R^3$$

是正则参数曲面. 记 $S=\boldsymbol{r}(D)$, 如果

$$\boldsymbol{r}: D\rightarrow S$$

是**同胚映射**,则 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ $\boldsymbol{u}=(u_1, u_2)^{\mathrm{T}}\in D$ 称作正则参数曲面片,S 为正则曲面片. ■

定义 1.2.4 设 S 是 R^3 中的一个子集,如果对任意一点 $\boldsymbol{p}\in S$, 必存在 $\boldsymbol{p}$ 的一个邻域 V,使 $V\cap S$ 为一个正则曲面片,则称 S 为正则曲面[1]. ■

这里应注意"正则曲面"与"正则参数曲面片"是意义不同的两个概念. 如 R^3 中的单位球面是正则曲面,但其整体并不是一个正则参数曲面片.

正则参数曲面片,从直观上讲,是将 R^3 中的曲面(局部)看成为 R^2 中的二元函数(参数 u_1, u_2)的图像. 从这个意义上讲,R^3 中的正则曲面,总能用若干个正则参数曲面片粘合而成. 例如 R^3 中的单位球面,可用 6 个 Monge 形式的正则参数曲面片完全覆盖或 2 个球坐标参数曲面片完全覆盖[2].

正则参数曲面片上的切平面与法向量

以下设参数变换函数 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$至少三阶可微. 在正则参数曲面片 S 上,对任一$(u_1, u_2)\in D$决定的$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$处的切平面记作 L_S,且 L_S 上从 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})\in R^3$ 出发的任一方向向量 $\boldsymbol{\alpha}_p$ 可由下式决定

$$L_S: \boldsymbol{\alpha}_p=\dot{\boldsymbol{r}}_1\cdot t_1+\dot{\boldsymbol{r}}_2\cdot t_2\qquad t_1, t_2\in R\qquad —(1.2.14)$$

---

[1] 定义 1.2.2~4 参见《微分几何》,孟道骥、梁科,科学出版社,2000 年,第 3.1 节.

[2] M P. do Carmo,见前注,第 43 页.

故($\dot{\boldsymbol{r}}_1$, $\dot{\boldsymbol{r}}_2$)就是 L_S 切空间的一组基向量.

因为$\dot{\boldsymbol{r}}_1$、$\dot{\boldsymbol{r}}_2$ 线性独立,故其矢量积的模 $|\dot{\boldsymbol{r}}_1\times\dot{\boldsymbol{r}}_2|\neq 0$, 从而 L_S 上的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 可由矢量积算法表示为

$$\boldsymbol{n}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}_1\times\dot{\boldsymbol{r}}_2}{|\dot{\boldsymbol{r}}_1\times\dot{\boldsymbol{r}}_2|} \qquad \text{—(1.2.15)}$$

(1.2.15)式给出的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 在古典微分几何中起着基础性的作用. 正则参数曲面片这一概念的意义即在于保证在其上的每一点处,单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 存在且可微.

由 $\boldsymbol{n}$ 的可微性要求,即可得出正则参数曲面片 $S=\boldsymbol{r}(D)$ 只能是定义在 R^2 的某个开子集上. 这可由 $\boldsymbol{n}$ 的定义式(1.2.15)式中即可看到. 由 $\boldsymbol{n}$ 的可微性要求,即应当要求模函数 $|\dot{\boldsymbol{r}}_1\times\dot{\boldsymbol{r}}_2|$ 一定要是可微的. 由模函数 $|\boldsymbol{a}|$ 的定义

$$|\boldsymbol{a}|=\Big(\sum_i a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

可知,$|\boldsymbol{a}|$是 Euclid 范数. 它本质上是绝对值函数. 比如对于向量

$$\boldsymbol{a}=(\cos t,\ t^2\cos t)^{\mathrm{T}}$$

则
$$|\boldsymbol{a}|=(1+t^4)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\cos^2 t}$$

由 $|\boldsymbol{a}|\geqslant 0$ 的性质,如果 $\cos t$ 的值允许有正、负数,那么

$$|\boldsymbol{a}|=(1+t^4)^{\frac{1}{2}}\,|\cos t|$$

但由于绝对值函数$|\cos t|$在 $\cos t=0$ 处是不可微的,故要使$|\boldsymbol{a}|$可微,必须要求 $\cos t>0$(或 $\cos t<0$) 从而使 $|\cos t|=\cos t$(或 $|\cos t|=-\cos t$) 成立,由此即有 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ 开区间 $\left(\text{或}\frac{\pi}{2}<t<\frac{3}{2}\pi\right)$ 存在,使$|\boldsymbol{a}|$在其上是可微的. 正则参数曲面片的定义域一定为开集的要求即由此而产生[1].

一般地,设函数向量 $\boldsymbol{a}(t)\in R^m$ 关于 t 可微且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 则其归一化形式记为

$$\tilde{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}\qquad \|\boldsymbol{a}\|=(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})^{\frac{1}{2}}\neq 0$$

那么,易知

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{a}}}{\mathrm{d}t}=(I_m-\tilde{\boldsymbol{a}}\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}})\frac{\boldsymbol{a}'}{\|\boldsymbol{a}\|}\qquad \boldsymbol{a}'=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{—(1.2.15a)}$$

所以,当 $\|\boldsymbol{a}\|\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 存在,且 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 必可微.

---

〔1〕 附带地说,对于参数曲线也有类似的要求,见下文.

因此，存在可微的 $\tilde{a}$ 的条件即是 $\|\boldsymbol{a}\|>0$ 所决定的 t 的开集即 $\tilde{a}$ 的定义域上. 由 Euclid 范数的定义，设可以有以下形式

$$(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})^{\frac{1}{2}}=\pm A(t)$$

即 $(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})^{\frac{1}{2}}$ 可以开方成 $\pm A(t)$，则上述 $\tilde{a}$ 的定义域可表示成以下

$$\|\boldsymbol{a}\|>0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(t)>0 \\ -A(t)>0 \end{cases}$$

这两种形式所决定的 t 的开集之一，如以上所举的示例.

当 $(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})^{\frac{1}{2}}$ 不能被开方成 $\pm A(t)$ 函数的形式，那么，直接由

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}>0$$

决定 $\tilde{a}$ 的定义域.

现在，如果将 $\tilde{a}$ 看成是正则参数曲面片 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 上的可微单位法向量 $\boldsymbol{n}$，则 $\tilde{a}$(即 $\boldsymbol{n}$)的定义域无疑也就是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的定义域. 这只需用自变量(向量)$\boldsymbol{u}$ 取代 t 即可.

曲面的第一、第二基本二次型

对于 R^3 空间上的 Monge 形式的曲面[1]

$$z=f(x,\ y)$$

第一基本二次型是指微分不变形式

$$\mathrm{d}s^2=E\mathrm{d}x^2+2F\mathrm{d}x\mathrm{d}y+G\mathrm{d}y^2 \qquad \text{—(1.2.16)}$$

其中

$$E=1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \quad F=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} \quad G=1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \qquad \text{—(1.2.17)}$$

E、F、G 称为第一基本量. $\mathrm{d}s$ 是曲面上点 $(x,\ y,\ z)$ 处的弧微分(线元素).

第二基本二次型是指微分不变形式

$$\varphi_2=L\mathrm{d}x^2+2M\mathrm{d}x\mathrm{d}y+N\mathrm{d}y^2 \qquad \text{—(1.2.18)}$$

其中

$$\begin{cases} L=\dfrac{r}{h} \quad M=\dfrac{s}{h} \quad N=\dfrac{t}{h} \\ r=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad s=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \quad t=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ p=\dfrac{\partial z}{\partial x} \quad q=\dfrac{\partial z}{\partial y} \quad h=\sqrt{1+p^2+q^2} \end{cases} \qquad \text{—(1.2.19)}$$

---

〔1〕 Monge 形式曲面函数的第一、二基本形式，见《数学手册》，人民教育出版社，1979 年，第 417～419 页.

L、M、N 称为第二基本量. φ_2 反映的是曲面在空间上的弯曲程度.

记

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = [\dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2] \qquad \text{—(1.2.20)}$$

则 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$ 是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的 Jacobi 矩阵 $\left(\text{Jacobi 矩阵的行列式即为 Jacobi 行列式 } \frac{\partial(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)}{\partial(u_1, u_2)}\right)$. 注意 $\dot{\boldsymbol{r}}_{1,2}$ 都是列向量.

在正则参数曲面片 S 上,第一基本二次型可表示为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \mathrm{d}\boldsymbol{u} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad \text{—(1.2.21)}$$

其中

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = (\mathrm{d}u_1, \mathrm{d}u_2)^{\mathrm{T}} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \mathrm{d}\boldsymbol{u}$$

是微分算子向量.

这里

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{r}}_1^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_1 & \dot{\boldsymbol{r}}_1^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_2 \\ \dot{\boldsymbol{r}}_2^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_1 & \dot{\boldsymbol{r}}_2^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_2 \end{bmatrix} \qquad \text{—(1.2.22)}$$

是由线性无关的列向量组$(\dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2)$构造的 Gram 矩阵. 这一矩阵是正定的[1].

规定以下记号

$$\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \boldsymbol{I} \\ E = g_{11} = \dot{\boldsymbol{r}}_1^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_1 \quad F = g_{12} = g_{21} = \dot{\boldsymbol{r}}_1^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_2 \quad G = g_{22} = \dot{\boldsymbol{r}}_2^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_2 \end{cases} \qquad \text{—(1.2.23)}$$

称(1.2.23)式决定的 E、F、G 为正则参数曲面片 S 上的第一基本量.

记

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{n}}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u_1} \quad \dot{\boldsymbol{n}}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} = [\dot{\boldsymbol{n}}_1, \dot{\boldsymbol{n}}_2] \end{cases} \qquad \text{—(1.2.24)}$$

---

[1] 见本书 § 5.8.1 节的说明.

则$\dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}}$是 S 上的单位法向量的 Jacobi 矩阵. 这里规定 $\boldsymbol{n}$、$\dot{\boldsymbol{n}}_{1,2}$均为列向量.

则正则参数曲面片 S 上的第二基本形式可表示为

$$\varphi_2 = -\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \mathrm{d}\boldsymbol{u} = -\mathrm{d}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad \text{—(1.2.25)}$$

其中

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} \mathrm{d}\boldsymbol{u}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{n}}_1^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_1 & \dot{\boldsymbol{n}}_1^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_2 \\ \dot{\boldsymbol{n}}_2^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_1 & \dot{\boldsymbol{n}}_2^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_2 \end{bmatrix} \qquad \text{—(1.2.26)}$$

并规定以下记号

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = -\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = -\mathbb{I}\!\mathbb{I} \\ L = c_{11} = -\dot{\boldsymbol{n}}_1^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_1 \quad M = c_{12} = c_{21} = -\dot{\boldsymbol{n}}_2^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_1 = -\dot{\boldsymbol{n}}_1^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_2 \\ N = c_{22} = -\dot{\boldsymbol{n}}_2^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_2 \end{cases} \qquad \text{—(1.2.27)}$$

称(1.2.27)式决定的 L、M、N 是正则参数曲面片 S 上的第二基本量[1].

正则参数曲面片上的曲率——Gauss、Weingarten 映射

定义 1.2.5 (Gauss 映射)设 $S \subset R^3$ 是具有定向 $\boldsymbol{n}$ 的曲面. 映射 $\boldsymbol{n}: S \to R^3$ 取值于单位球面 S^2

$$S^2 = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

这样得到的映射 $\boldsymbol{n}: S \to S^2$ 称为 S 的 Gauss 映射. ■

显然,这样的 $\boldsymbol{n}$ 即为 S 上的单位法向量. $\boldsymbol{n}$ 是可微的. $\boldsymbol{n}$ 在点 $\boldsymbol{p} \in S$ 的微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}_p$ 是从 S 的切平面 L_S 到单位球面上的点 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p})$的切平面 L_{S^2} 上的线性映射. 因为 L_S 与 L_{S^2} 是平行的平面,故 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}_p$ 可以看作是 L_S 上的线性映射.

线性映射 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}_p: L_S \to L_{S^2}$ 的作用如下. 对 S 中每一条使 $\boldsymbol{\beta}(0) = \boldsymbol{p}$ 的参数曲线 $\boldsymbol{\beta}(t)$,考虑在 S^2 中的对应的参数曲线

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\beta}(t)) = \boldsymbol{n}(t)$$

从而 $\boldsymbol{n}(t)$是限制在曲线 $\boldsymbol{\beta}(t)$上的法向量. 其切向量

$$\dot{\boldsymbol{n}}(0) = \mathrm{d}\boldsymbol{n}_p(\dot{\boldsymbol{\beta}}(0))$$

---

[1] 正则参数曲面片上的第一、二基本形式及基本量的公式参见《微分几何》,孟道骥、梁科,见前注,第61～69 页.

是 L_S 中的向量. $d\boldsymbol{n}_p$ 度量了 $\boldsymbol{n}(t)$ 沿 $\boldsymbol{\beta}(t)$ 曲线在 $t=0$ 处的变化率. 所以 $d\boldsymbol{n}_p$ 度量了 $\boldsymbol{n}$ 如何从 $\boldsymbol{n}(p)$ 向 $\boldsymbol{p}$ 点近旁离开. 对 S 是曲线的情况，这个测度的数值就是 S 在点 $\boldsymbol{p}$ 处的曲率，对 S 是曲面的情况，这个测度由一个线性映照刻划.

由于切平面 L_S 由(1.2.14)式给出，故$(\dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2)$线性无关向量组就是 L_S 的一组基. 利用这一组，可以得到在$(\dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2)$基向量组下的线性映射 $d\boldsymbol{n}_p$ 的矩阵表示.

设 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$是曲面 S 在 $\boldsymbol{p}\in S$ 近旁的一个参数表示，$\boldsymbol{\beta}(t)=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}(t))$ 是 S 上过 $\boldsymbol{p}$ 点的参数曲线，且 $\boldsymbol{\beta}(0)=\boldsymbol{p}$. 约定以下出现的所有偏导函数均在 $\boldsymbol{p}$ 点取值.

$\boldsymbol{\beta}(t)$在 $\boldsymbol{p}$ 点的切向量是 $\dot{\boldsymbol{\beta}}=\dot{\boldsymbol{r}}_1\dot{u}_1+\dot{\boldsymbol{r}}_2\dot{u}_2$ 以及

$$d\boldsymbol{n}(\dot{\boldsymbol{\beta}})=\dot{\boldsymbol{n}}(u_1(t),\ u_2(t))=\dot{\boldsymbol{n}}_1\dot{u}_1+\dot{\boldsymbol{n}}_2\dot{u}_2$$

因为 $d\boldsymbol{n}_p$ 是 L_S 上的线性映射，故 $\dot{\boldsymbol{n}}_1$、$\dot{\boldsymbol{n}}_2$ 应是 L_S 上的向量. 设 $\dot{\boldsymbol{n}}_1$、$\dot{\boldsymbol{n}}_2$ 在$(\dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2)$基向量下的矩阵是

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{n}}_1^{\mathrm{T}}\\ \dot{\boldsymbol{n}}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{r}}_1^{\mathrm{T}}\\ \dot{\boldsymbol{r}}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \qquad \text{—(1.2.28)}$$

或写成为

$$\frac{\partial\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{u}}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\frac{\partial\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{u}} \qquad \text{—(1.2.28a)}$$

$$d\boldsymbol{n}(\dot{\boldsymbol{\beta}})=(a_{11}\dot{u}_1+a_{21}\dot{u}_2)\dot{\boldsymbol{r}}_1+(a_{12}\dot{u}_1+a_{22}\dot{u}_2)\dot{\boldsymbol{r}}_2$$

因此，在$(\dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2)$基下，有

$$d\boldsymbol{n}\begin{bmatrix}\dot{u}_1\\ \dot{u}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}_1\\ \dot{u}_2\end{bmatrix}$$

从而 $d\boldsymbol{n}$ 由矩阵 $[a_{ij}]^{\mathrm{T}}$ $i, j=1, 2$ 给出. 并可证 $d\boldsymbol{n}_p$ 是自伴随线性映射，从而其矩阵$[a_{ij}]$是对称矩阵. 但是不利用曲面的第一、二基本形式而要给出$[a_{ij}]$矩阵的形式是不方便的(在高维情形下是很困难的). 为此，对(1.2.28)式构造(1.2.26)式的乘积，并利用(1.2.23)式、(1.2.27)式的符号规定，可得

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{n}}_1^{\mathrm{T}}\\ \dot{\boldsymbol{n}}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}[\dot{\boldsymbol{r}}_1,\ \dot{\boldsymbol{r}}_2]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{r}}_1^{\mathrm{T}}\\ \dot{\boldsymbol{r}}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}[\dot{\boldsymbol{r}}_1,\ \dot{\boldsymbol{r}}_2]$$

所以有

$$\begin{bmatrix}-L & -M\\ -M & -N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E & F\\ F & G\end{bmatrix}$$

这样就可得到由第一、二基本二次型矩阵与 $d\boldsymbol{n}$ 矩阵$[a_{ij}]$的关系(并注意到第一

基本二次型矩阵正定可逆)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L & -M \\ -M & -N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} = -\mathit{II}\,\mathit{I}^{-1} \quad —(1.2.29)$$

其中I、II分别为第一、二基本二次型矩阵.

对(1.2.29)式两边取行列式,就有

$$|\,\mathrm{d}\boldsymbol{n}\,| = \det([a_{ij}]) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \kappa \quad —(1.2.30)$$

这里的κ即是 Gauss 曲率.(1.2.29)式与(1.2.28)式即是 Weingarten 方程的一种形式[1]. 这里的 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}$ 是在($\dot{\boldsymbol{r}}_1$, $\dot{\boldsymbol{r}}_2$)基向量组下的矩阵表示.

定义 1.2.6 (1.2.28)式决定的矩阵(取负值)$[-a_{ij}]$, i, $j=1$, 2 可称为是 $L_S \to L_{S^2}$ 上的 Weingarten 映射的矩阵形式. ■

故 W 映射是

$$W:\ \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{r}}_1^{\mathrm{T}} \\ \dot{\boldsymbol{r}}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -\dot{\boldsymbol{n}}_1^{\mathrm{T}} \\ -\dot{\boldsymbol{n}}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \quad —(1.2.31)$$

其矩阵用 W 表示,是

$$W = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} = \mathit{II}\,\mathit{I}^{-1} \quad —(1.2.32)$$

可知 W 映射矩阵的特征值、特征向量就是曲面上点 $\boldsymbol{p}$ 处的主曲率、主方向(定义见下文). 而 W 映射矩阵的特征值、特征向量显然由(1.2.27)式,应为以下形式方程组的解

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

λ 为 W 映射特征值. 利用(1.2.32)式,可有

$$\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

作变换

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \quad —(1.2.32\mathrm{a})$$

---

[1] 这一节以上的内容基本上引自 M P. do Carmo,见前注. 第 98 页定义 1 及其以下以及第 111 页 3.3 节. 但符号上及有些表述上有所不同.

就可得到 Weigarten 映射意义上的特征向量$(\hat{u}_1\hat{u}_2)^T$(是从 E、F 等不变量取值点处的 $\boldsymbol{x}$ 点出发的方向向量). 并有,

$$\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix}$$

上式可写成为以下齐次形式,

$$\left(\lambda\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} = 0$$

即知 W 映射矩阵特征值 λ 是下列方程的根

$$\det\left(\lambda\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}\right) = 0 \qquad \text{—(1.2.33)}$$

或可写成 $\quad |\lambda I_2 - W| = 0 \quad$ (I_2 — 2×2 阶单位矩阵) —(1.2.33a)

这里还可以附带指出,(1.2.32)式两边取行列式的结果与(1.2.29)式是相同的,即 $\det([a_{ij}]) = \det([-a_{ij}])$ $\quad i, j = 1, 2$. 所以,可以说 W 映射矩阵行列式也就是 Gauss 曲率.

曲面的法曲率、主(法)曲率、主方向、平均曲率

对于曲面 S 上任一固定点 $\boldsymbol{p}$,设 $\vec{n}$ 为 S 在 $\boldsymbol{p}$ 点的法向量,$\vec{T}$ 为 S 在 $\boldsymbol{p}$ 点的任一切向量. 过 $\boldsymbol{p}$ 点及 $\vec{T}$ 方向作曲面 S 的法平面 L_π,如图 1.2.1. 称 L_π 与曲面 S 的交线 c 为曲面在 $\boldsymbol{p}$ 点沿 $\vec{T}$ 方向的**法截曲线**. c 在 $\boldsymbol{p}$ 点的曲率称为 S 在 $\boldsymbol{p}$ 点沿 $\vec{T}$ 方向的**法(截)曲率**,记为 κ_n. 当 $\vec{T}$ 在 S 曲面 $\boldsymbol{p}$ 点的切平面 L_S 上变动时,法曲率 κ_n 也随之变动. 法曲率取极值的方向称为**主方向**,沿主方向的法曲率称为**主(法)曲率**. S 曲面上不止有一个主法曲率. 称 S 曲面上所有主法曲率的乘积为 S 在 $\boldsymbol{p}$ 点的总曲率. 总曲率就是 **Gauss 曲率** κ. 称 S 曲面上所有主法曲率的算术平均值为 S 在 $\boldsymbol{p}$ 点的**平均曲率** h[1].

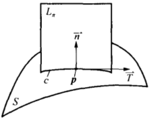


图 1.2.1

本书在以下分析中所涉及的其他微分几何的概念,在引用时会另行说明.

*** 关于向量内积的定义与符号表示的注释**

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in R^m$ 是两个向量,用符号 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的**标准内积**(简

---

〔1〕 引自《数学词典》,谷超豪主编,上海科技出版社,1992 年,第 218 页"法曲率".

称内积)，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{m}b_i a_i \qquad —(1.2.34)$$

由于 a_i、b_i 都是实数，以及乘法的交换律，故在实 Euclid 空间上，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \qquad —(1.2.35)$$

所以，本书在 R^m 空间上使用向量内积算法时，不加区别地使用 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$ 的形式.

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in C^m$，仍使用以上符号表示复 Euclid 空间上的内积. 则规定**标准内积**是指

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\bar{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{m}\bar{b}_i a_i \qquad a_i,\ b_i\in C \qquad —(1.2.36)$$

其中 $\bar{\boldsymbol{b}}$ 是指 $\boldsymbol{b}$ 的共轭向量，$\bar{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}$ 是指共轭转置向量. 由于在复数域上一般

$$\bar{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}\neq\bar{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

故 C^m 上标准内积的形式只使用(1.2.36)式的形式.

为分析之需要，本书在复 Euclid 空间 C^m 上还使用**复向量乘积**. 复向量乘积使用符号 $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}\in C^m$

$$\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{m}b_i a_i \qquad a_i,\ b_i\in C \qquad —(1.2.37)$$

由复数乘法的可交换性，知复向量乘积也具有可交换性，

$$\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}*\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} \qquad —(1.2.38)$$

所以，本书在 C^m 空间上使用复向量乘积时，也不加区别地使用 $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$ 的形式.

向量的标准内积的性质为人熟知，不用详述，复向量乘积则需给以具体的说明. 这可见本书 §4 章的有关内容.

§1.3　Debreu 定理评述

由以上 §1.2 节所引内容，并比照 §1.1 节中 Debreu 关于定理 1.1.1 的证明，可以看到，在其证明中有以下几个地方不甚清晰. 第一是(1.1.5)式的给出.

〔1〕 引自《数学词典》，谷超豪主编，上海科技出版社，1992 年，第 218 页"法曲率".

(1.1.5)式的推出，由前述，仍是基于 W 映射的概念. 但由§1.2节可知，W 映射应是指的(1.2.31)式. 这与推出(1.1.5)式时所使用的映射(即(1.1.2)式)在形式与意义上是有区别的.

将(1.1.3)～(1.1.4)式理解为对曲面 $u(\boldsymbol{x})$ 作了一个参数变换，即令

$$\begin{cases} x_i = v_i \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 \\ x_m = \zeta(v_1, v_2, \cdots, v_{m-1}) \end{cases} \qquad \text{—(1.3.1)}$$

则 $u(\boldsymbol{x})$ 即被参数化地表示

$$u = u(v_1, v_2, \cdots, v_{m-1}, \zeta(v_1, v_2, \cdots, v_{m-1})) \qquad \text{—(1.3.2)}$$

并用 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_{m-1})^{\mathrm{T}} \in R^{m-1}$ 记号，那么，(1.1.2)式的映射是

$$\boldsymbol{v} \to \begin{bmatrix} g_1(\boldsymbol{v}, \zeta(\boldsymbol{v})) \\ g_2(\boldsymbol{v}, \zeta(\boldsymbol{v})) \\ \vdots \\ g_{m-1}(\boldsymbol{v}, \zeta(\boldsymbol{v})) \end{bmatrix} \qquad \text{—(1.3.3)}$$

其中 $g_j(\cdot) \quad j = 1, 2, \cdots, m-1$ 是 $u(\boldsymbol{x})$ 曲面在 $\boldsymbol{x}$ 点处的单位法向量的前 $m-1$ 个分量(函数). 显然，(1.3.3)式的含义与(1.2.31)式是有区别的. 这样(1.1.5)式是指以下 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(g_1, g_2, \cdots, g_{m-1})}{\partial(v_1, v_2, \cdots, v_{m-1})} = \kappa$$

这里的 κ 是 Gauss 曲率.

第二，Debreu 指出，从(1.1.5)式到(1.1.6)式可以利用行列式的直接展开而推出. 在 $m = 2$ 时，这是可行的. 如设

$$u(x_1, x_2) = c$$

并设 $\dfrac{\partial u}{\partial x_2} \neq 0$，由隐函数定理

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_2}}$$

记
$$\nabla u(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^{\mathrm{T}}$$

并简记 $\nabla u(\boldsymbol{x})$ 为 ∇u，有

$$g_1(\boldsymbol{x}) = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}{\|\nabla u(\boldsymbol{x})\|}$$

则 Jacobi 行列式即为

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1}=\frac{1}{\|\nabla u\|}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)-$$

$$-\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}{\|\nabla u\|^3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\|\nabla u\|^3}\left(-2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2\right)$$

$$=-\frac{|H_\partial|}{\|\nabla u\|^{m+1}}\qquad(m=2)$$

但对于一般形式下的 Jacobi 行列式，注意，有

$$g_i=\frac{u_i}{\|\nabla u\|}\qquad u_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}\qquad i=1,2,\cdots,m$$

以及从

$$u(\boldsymbol{x})=c$$

中可得到 $\left(\text{设}\dfrac{\partial u}{\partial x_m}\neq 0\right)$，$\dfrac{\partial x_m}{\partial x_i}=-\dfrac{u_i}{u_m}\quad i=1,2,\cdots,m-1$

$$\frac{\partial(g_1,g_2,\cdots,g_{m-1})}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1})}=\frac{\partial\left(\dfrac{u_1}{\|\nabla u\|},\dfrac{u_2}{\|\nabla u\|},\cdots,\dfrac{u_{m-1}}{\|\nabla u\|}\right)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1})}$$

$$=|[U_{ij}]_{(m-1)\times(m-1)}|$$

其中通项

$$U_{ij}=[(u_{ij}-u_{im}u_j/u_m)\cdot\sum_{k=1}^m u_k^2-u_i\cdot(\sum_{k=1}^m u_k(u_{kj}-u_{km}u_j/u_m))]/\|\nabla u\|^3$$

$$u_{ij}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\qquad i,j=1,2,\cdots,m$$

是非常繁杂的. 要从以上矩阵$[U_{ij}]$的行列式中推出定理 1.1.1 的结果并非易事.

第三，即便能够对任意的 m，由$[U_{ij}]$矩阵的行列式推出

$$|[U_{ij}]|=-\frac{|H_\partial|}{\|\nabla u\|^{m+1}}=\kappa$$

的结果，注意到以上等式左边是一个 $m-1$ 阶行列式，而中间的分子部分则是

$m+1$ 阶行列式. 与 W 映射行列式(在 $m=3$ 时，是 $m-1$ 阶行列式)相比较，中间分子行列式的阶数是令人疑惑的. 并且已知 W 映射矩阵的特征值为曲面的主法曲率这一重要意义，在加边 Hessian 矩阵 H_a 中还缺少相对应的特征量. 因为在传统的矩阵特征值理论中，H_a 矩阵的特征值是以下方程的根

$$\begin{vmatrix} \lambda I_m - H & \nabla u \\ \nabla u^{\mathrm{T}} & \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad —(1.3.4)$$

其中 $H=\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right]$ 是 u 的 Hessian 矩阵，I_m 是 $m\times m$ 阶单位矩阵. 这样 H_a 矩阵应有 $m+1$ 个特征值、特征向量. 但确知的是在 $m=3$ 时，曲面上只可能有由 W 映射矩阵决定的 2 个特征值，对应于曲面的 2 个主法曲率. 这样，H_a 矩阵的 $m+1$ 个特征值在个数上即与微分几何已有结论不相容了〔1〕.

以上 3 点大概就是导致 §1.1 节所指情形的原因.

§1.4 内容提要

本书在大的章节上分为了五个部分，分别为

§2 章——经典微分几何基本概念在 R^m 空间上的推广. 这部分内容从本书的逻辑结构上讲，是为了 §3 章内容的论述而作的一个准备. 但这一章内容本身也具有重要性. 比如，在 §2.4 节中建立了 R^m 空间上的**多重矢量积**方法. 从而，利用这一方法，就可以顺畅地将 R^3 空间上的正则参数曲面片的第一、二基本微分形式直接地推广到 R^m 空间上去. 这一点的意义毋须赘言. 由此，经典微分几何中在 R^3 空间上利用第一、二基本微分形式得出的诸多重要定理，都可以方便地拓展到了 R^m 空间. 须注意有些定理的拓展将产生一些新的意义，比如著名的 **Gauss Egregium 定理**(见 §2.3.1)，在一般的 R^m 空间上，仅当 m 是奇数时，这一定理才能严格成立，而在 m 是偶数的 R^m 空间上，这一定理是不能严格成立的(即仅利用曲面的第一基本不变量及其偏导数，只能得到曲面总曲率的绝对值而不能确定总曲率的符号).

利用多重矢量积方法，在 §2.4.4 节中，还给出了 R^m 空间上 n 维曲面的第一、二基本形式与 **Gauss-Codazzi 方程**，并指出了在 $1<n<m-1$ 时，存在有**法向迷向**的一类曲面(相比较，球面应看成是**切向迷向**的曲面). 同时，还分析了内蕴几何方法的适用性限制条件，这常为人忽视的问题.

---

〔1〕 在一般 R^m 空间上，曲面具有的主法曲率及其个数，本书下一章内容中会证明 R^m 空间上的曲面可有 $m-1$ 个主法曲率及对应的主法方向.

§2 章中其他的内容还有如 R^m 空间上的曲线的 **Frenet 标架**的分析. 这一部分内容从结论上讲是已为人所熟知的. 但这里还讨论了曲线局部坐标系的手性及其由此决定的 Frenet 标架系数矩阵中的各阶挠率的取符号问题.

诚如高斯(C. F. Gauss)所确立的方法，在微分几何中，有本质上不同的两种表述，其一是预先假定空间曲面已具有确定形状的那类，另一类论述则是与曲面可能具有的形状无关[1]. 后一类论述在现在通常被称为曲面的"内蕴几何性质". 应当指出，本书在方法上更侧重于前一类论述，即在已确定形状的曲面上展开分析. 当然，所谓的"已确定形状的曲面"仅指曲面的一般函数形式上已给出，如有 $f(\boldsymbol{x})=0\quad \boldsymbol{x}\in D_x\subset R^m$ 的正则曲面函数存在.

之所以如此，基于以下几点考虑，首先由 Debreu 定理即知，只能先假设曲面一般函数存在；其次，易见的是在确定了曲面形状下所能得到的结论，在内容上，肯定要比曲面的内蕴几何性质更丰富；再次，从应用的角度，比如经济学的领域看来，其所面对的各个曲面都是具有明确经济意义因此必具有确定形状的曲面(附带地说，这些经济学上的曲面是不允许随意给予参数化表示的一般函数形式规定的曲面). 当然，先假设曲面具有确定形状的分析，也就因此而具有其局限性. 相比较而言，基于曲面内蕴几何性质的分析方法，更具有概括能力和抽象能力. 但须注意，内蕴几何的分析方法的隐含前提条件本身对其的应用范围也给予了一个限制. 比如在 R^m 空间上的 n 维曲面上 $(1<n<m-1)$，不能将传统的 Gauss 曲率归结为内蕴几何量(即不能将 Gauss 曲率定理应用到这一情形). 具体可见§2.4.4 节.

因此，§2 章中还包含有基于一般曲面函数形式 $f(\boldsymbol{x})=0\quad \boldsymbol{x}\in D_x\subset R^m$ 形式的正则曲面的第一、二基本形式的确定问题以及诸如法截曲率、主法曲率等概念在一般曲面函数形式上的表示等等内容.

需要指出，本书所涉及的微分几何仅指经典微分几何中的若干基本概念，且主要局限在曲率论. 对于建立在这些概念之上，利用各种变换为工具的进一步分析的内容几乎没有涉及.

§3 章——加边实对称矩阵的拟特征值及拟特征向量. 这一章可以说是本书的"硬核". 这一部分内容建立了一种加边实对称矩阵的新的分析工具——**拟特征值(向量)**分析方法.

所谓拟特征值，即是指 $m\times m$ 阶矩阵 A 和 m 阶向量 $\boldsymbol{b}$，构造以下 μ 多项式

$$\begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (I_m - m \text{ 阶单位阵}) \qquad —(1.4.1)$$

决定的根 μ_i，即为加边矩阵 A_b

[1] 《关于曲面的一般研究》，高斯，载于《数学珍宝—历史文献精选》，李文林主编，科学出版社，1998年，第565～570页.

$$A_b = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

的拟特征值. 比较(1.3.4)式与(1.4.1)式(将(1.3.4)式中的 H、∇u 看成这里的 A、$\boldsymbol{b}$)即可知拟特征值 μ 的定义与 A_b 矩阵的特征值 λ 的定义的不同之处.

将A、$\boldsymbol{b}$ 看成是 R^m 空间上的某个一般曲面函数 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ 的 Hessian 矩阵 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$、梯度向量$\nabla f(\boldsymbol{x})$,那么,(1.4.1)式给出的拟特征值 μ_i 刚好有 $m-1$ 个,并且,这些拟特征值与曲面的主法曲率 κ_i 之间有关系

$$\kappa_i = -\frac{\mu_i}{\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|} \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$$

这一关系便给出了拟特征值的几何意义,而拟特征值对应的拟特征向量就是曲面切空间上的主法方向向量. 由此即知加边实对称矩阵的拟特征值(向量)的分析与微分几何的曲率理论存在紧密的关系.

这样,利用拟特征值分析方法,并与一般曲面函数形式相结合,就开拓了关于曲面的曲率分析的一个新的途径. 附带地,由此也就可以顺利地解决 Debreu 定理中(上文已提及的)问题.

由于拟特征值分析在矩阵代数的现有文献中是没有的,所以,§3 章不得不用许多篇幅去建立关于拟特征值、拟特征向量的矩阵分析方面的理论框架. 这一部分内容相当多. 可幸的是矩阵代数已是发展的十分成熟的数学分支,故而,大多基本定理可方便地利用矩阵代数的已有成果推广得来.

还应指出,§3.2.5～3.2.6 节内容是利用了拟特征值(向量)分析方法(以及经典微分几何方法)去分析 R^m 空间上的曲面上的特殊曲线——曲率线、测地线以及 **Darboux 标架**(测地的 Frenet 标架)、**Dupin 标形**、渐近线等内容. 这部分内容也有许多新的结论. 比如说,导出了一个 R^m 空间曲面上的(非内蕴几何形式的)测地线方程

$$(I_m - \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}})\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \qquad \text{—(3.2.5.137)}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是单位法向量,$\ddot{\boldsymbol{x}}$ 是测地线函数 $\boldsymbol{x}(s)$的二阶导数向量. 这一方程具有简洁的结构. 它与 Riemann 流形上的测地线方程(内蕴几何形式)是等价的方程.

§4 章——曲率张量. 这一章是前几章内容的一个综合应用. 本章只讲述了几个重要的问题: Riemann 截面曲率、Ricci 曲率张量(标量)、Einstein 空间及**真空 Einstein 方程**的几何解. 在这里,并没有使用任何张量分析的方法. 所有的推导均只使用了经典微积分、矩阵代数方法. 因为以 Riemann 符号 R^k_{iij}、R_{iijk}所表示的张量其实是一个二阶行列式(子)式. 特别地,R_{iijk}符号等价于曲面的第二基本不变量矩阵的二阶子式. 同样地,Ricci 曲率张量 R_{ij} 也可以由 Weingarten 映射矩阵的二阶子式表出.

在这一章中，还讨论了**常曲率曲面**问题. 在一个以等温参数形式的第一基本微分形式给出的曲面上，若这一曲面是常曲率曲面，那么，以 $v(\boldsymbol{u})$ 表示等温参数，则 v 必须符合一个椭圆型二阶偏微分方程. 在 $u \in R^6$ 时，这一偏微分方程具有以下最简形式

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 v}{\partial u_k^2} + m\kappa v^2 = 0 \quad (m = 6) \qquad —(4.1.1.12)$$

其中，κ 是曲率常数. 由这一方程即可知，Riemann 首先给出的等温参数因子

$$v(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\kappa}{4}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2)\right)^2}$$

以及著名的 Poincaré 上半平面等温参数因子

$$v(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{u_m^2}$$

都是这一二阶偏微分方程的特解.

这一部分内容中特别指出的是关于真空 Einstein 方程的几何解问题. 所谓"几何解"，是指可以利用一个曲面函数形式去构造出一个度规 g，使 g 的二次型矩阵的元素因子刚好满足真空 Einstein 方程的解的条件. 分析表明，这样的几何解以曲面的 Weingarten 映射矩阵的属性区分，只能有——平凡解、秩 1 解和(秩 1、秩 2)幂零解这几种类型，并且，分别给出了相应的示例. 同时，分析还指出，真空 Einstein 方程还存在着非几何解的类型(解析解). 比如著名的史瓦许(K. Schwarzschild)度规即是一个非几何解的解析解.

§5 章——线性不等式方程组的解. 毫无疑问，本书在 §2～4 章与 §5 章以及 §5 章与 §6 章之间存在着内容上的转向(或说是跳跃). 这实在是一件难以处理的事. 之所以要在这里插入关于线性不等式方程组的解，是因为在微分几何分析中的 Dupin 标形内容方面以及 §6 章关于 **Kuhn-Tucker 条件**的分析中均要利用线性不等式方程组的解的构造. 特别是在 Kuhn-Tucker 条件的分析中，需要涉及到总共 6 组不同意义与形式的线性不等式方程组.

相对于线性等式方程组，线性不等式方程组的理论在传统的线性代数文献中是非常欠缺的. 因此，§5 章需要在许多方面给予论述. 由那里的分析表明，形式上林总繁多的线性不等式方程组或者可以直接解出或者均可以被归结为以下两种标准形式予以求解

$$\begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad \begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad C \in R^{n\times m} \qquad \boldsymbol{b} \in R^n \qquad \boldsymbol{x} \in R^m$$

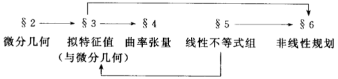
而这两组线性不等式方程组的解，则可以由**(拓展的)多胞形表示定理**予以构造.

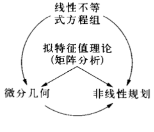
在此基础上，§5 章的许多篇幅用以给出线性不等式方程组解的算法描述以及示例. 同时也给出了诸如 $A\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ 一类不等式方程组解所决定的矩阵 A 的值域的表示定理. 这个定理对于理解不等式方程组解空间的几何性状具有重要的意义.

由 §5 章的分析可以理解，矩阵——这一计算机时代最重要的数学概念之一——可以而且也应当建立在线性不等式方程组的理论形式之上. 对此，§5 章对此有所涉及. 比如在那里给出了可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的一个几何模型(闭锥)，也给出了广义逆矩阵 A^{+} 的一个几何模型.

§6 章——非线性规划理论中的 **Kuhn-Tucker 条件**. 非线性规划理论是微观经济学的数学基础之一. 对于作者的主要研究方向(经济学)而言，非线性规划理论无疑具有特别的意义. 但之所以要在本书的框架中专门设置一个章节用以讨论 Kuhn-Tucker 条件，还有以下几个更直接的原因：其一是在拟特征值理论分析中所涉及到的加边实对称矩阵这一数学模型中，有一类矩阵——**Lagrange 函数**的加边 Hessian 矩阵就出现在非线性规划理论之中，或者说，非线性规划理论中必要使用到拟特征值理论的有关结论；其二是传统文献中关于 $K-T$ 定理的论述中存在一些尚可改进之处. 比如，未能给出 $K-T$ 条件的充要条件形式；再如，未能对于 $K-T$ 条件中含有一阶、二阶约束品性条件的意义给予明确的说明；以及未能就 $K-T$ 定理的应用给出明确的方法与几何意义上的说明(因为没有关于线性不等式方程组的解的完整的理论以及 R^m 空间上的曲面的 Dupin 标形).

这里需要说明，由于本书的论述中包含有许多已有文献上所没有的内容，因此，阅读本书最好从头至尾顺序进行而不要跳跃阅读. 从本书内容的延续上讲，本书的各部分内容的关系如下图所示：





但从本书内容的逻辑结构上讲，如左图所示.

本书的篇幅因作者在表述、推理上的笨拙、繁琐而过于冗长了. 对此，希读者给予谅解. 因为本书的作者并非专业数学研究者，故本书也不能被视为是专业的数学书著. 因此——特别是作者眼睛往往因他的固执己见而被遮蔽——本书中的一些错误，还需要有读者给予指正. 对此，谨预先表示欢迎.

注 释

本书扉页上的引文——是杰出的思想家西美尔(G. Simmel)关于印度文化的一个批评,而我认为这一意见对于中国文化也一样是非常切中要害的——是在1890年,以《分化与省力的原则》[1]为题的一篇论文中在分析那种思维方式——"往往是松弛和毫无矛盾、逃避事物的尖锐的、严酷的现实,无力解决个性的种种谜团,但却总是被推得越来越高,最后直至宇宙一体(das All-Ein)的形而上学的理念,在这种理念下,任何特定的思维都不复存在了."西美尔接着即说出了下面这段在我看来是用否定式的话语肯定了一种迂迴的思想方法的语句:

"某一种更方便的、更不费力的思维方式不是让人下到世界各个细微部分的黑洞洞的矿坑里去——只能从那里取出真正的和公正的认识的黄金,而是干脆跳跃过存在的种种对立——它本身更应该力争统一这些对立.这种思维方式沐浴在宇宙一体和天下皆善(all-einund all-gut)的原则的苍穹里."[2]

从经济学角度看,西美尔所指的"分化"也就是"分工"现象.这一现象是伴随现代化进程(即资本主义进程)而持续地出现的.分工的细化和深化,在经济上,使原料—最终产品的生产过程变得更曲折、更长,但同时,在结果上也就更丰富和在总体上更具效率.在经济学上,自亚当·斯密始,就高度注意到这一现象.与西美尔同时代的杰出经济学家庞巴维克在解释利息现象时,特别提出了"迂迴的生产方式"这一用语以表征这一现象的效率优势.事实上,西美尔自己在上述引文之后马上就援引了一个事例——火车与邮政马车的比较[3]:火车运输作为更迂迴的方式具有更高的效率.但西美尔的特别之处在于将这种"下到细微部分的黑洞洞的矿坑里去"的迂迴方式,去比较与分析不同的思维方式(及文化形态)上.

虽然西美尔的批评直接地是指向印度的婆罗门教,但不难看到,他所黑指的那种"松弛和毫无矛盾"、"逃避事物的尖锐的、严酷的现实"、"无力解决个性的种种谜团"但又总是被推至越来越高直至宇宙一体,或是跳跃过种种细微部分而直达天下皆善的大同境界的思想方式的诸弊端,无一不见诸中国文化,并深潜于这一文化之中.

中国文化(可能可以扩大地说成是"东方文化")传统中的直达彼岸式的思想方式本质上是非理性(就这一用语所指是逻辑的自治的思维方式及其话语体系而言)的,因此,它就只能是直觉的思维.

这种直觉形式的思维方式在绝对意义上无疑是彻底的和深刻的,但又正因为如此,中国文化注定了一旦形成(成形)就陷于停滞的状态——就如同这一文

[1] 见《社会是如何可能的》G. Simmel 林荣远译 广西师范大学 2002年.
[2] 着重号是后加的.
[3] 有意思的是,熊彼特后来同样援引过这一事例以说明企业家创新.

化所在的那个社会一样.这样,中国文化中就不会有历史、不会有时间,当然,也就不含有逻辑意义上的数学(而只存在断断续续局部有所改进的算法).

所以,自近代中国学人关于“科学—民主”的诉求觉醒以来,用理性方式特别是用数学形式表述一个思想的方法,始终是盘桓在中国人文学科的学者前的一道鸿沟.

本书是作者在研究经济学基础理论过程中的副产品,它权且是一次试图跨越这一鸿沟的努力.

当然,这里的注释对于本书的内容则是题外之言……

作　者

2007 年元月

§ 2　R^m 空间上曲线、曲面的标架与基本形式

在§1导言中,已扼要地引用了经典微分几何关于曲面的一些基本概念.鉴于本书所要讨论的内容(Debreu 定理、非线性规划),均是以一般的隐函数形式来表示曲面、曲线的,并且,这些曲面、曲线均是 R^m 空间上的几何对象,所以,有必要就 R^m 空间上的以一般的隐函数形式(如(1.2.1)式)所表示的曲面(或曲线)给出基本形式的分析方法.同时,也必须对不同函数形式所给出的曲面、曲线之间的相互关系给予说明[1].

为此,以下先建立一般曲面函数形式的法截曲率的概念,再分别讨论 R^m 空间上曲线的(局部)标架、曲面的第一、第二基本形式.

§ 2.1　2 维平面局部坐标系上曲线的相对曲率

在微分几何中,曲面、曲线上任一点处的曲率,一般都是由这一点邻域上的局部坐标系上的曲率来表示的.通常,这个局部坐标系是高维的.但为了给出高维坐标系上的曲率,必须先搞清过曲面(曲线)上一点处的 2 维平面局部坐标系上的曲率.

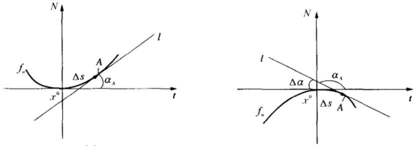
过某一曲面 F 上任一点处的 2 维平面局部坐标系可用许多种方式定义.其中最重要的是**法截平面**局部坐标系.简单地说,法截平面局部坐标系,是定义其原点在曲面 F 上的 $\boldsymbol{x}^0$ 点处,其横轴为曲面 F 上 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切超平面上(任取的)一条直线,而纵轴则是曲面 F 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处以某一方式给定的法方向 $\boldsymbol{n}$ 为正向的直线.这样给出的局部坐标系是正交坐标系.并且,使这个局部坐标系的横、纵轴方向始终与 R^2 平面上的自然基底坐标系($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$)的方向一致[2].这个 2 维正交坐标系所在的平面就是曲面 F 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的(无穷多个)法截平面之一.这个法截

[1] 虽然有若干内容其实与本书后面的分析无关,但考虑到叙述的最低限度的完整性,还是给予一一列出.

[2] $\boldsymbol{e}_1=(1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1)^{\mathrm{T}}$.

平面与曲面 F 就有一条相交而成的曲线. 称这条曲线为曲面 F 的**法截曲线**. 注意,法截曲线一定是 2 维平面上的曲线. 由于 2 维平面上的曲线具有相对曲率,所以,利用定义曲面 F 上 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的法截曲线相对曲率的方式,就可以将高维 R^m 空间的曲面 F 上 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的弯曲性状化简为 2 维平面上的曲线来分析. 这即是微分几何(也是本书)所使用的基本分析方法.

由以上关于法截平面局部坐标系的规定,可以想见,曲面 F 在法截平面上的交曲线常具有以下图形[1].



(a) (b)

图 2.1.1

图中 f_a 是法截曲线,t 轴是位于曲面 F 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切平面上的,而 N 轴是法方向轴. 因此,要给出 f_a 曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的相对曲率,可以考察以下一般情形下,即一条与固定坐标系 Oxy 在原点处与横轴(x 轴)相切的曲线

$$y = f(x)$$

在 $x=0$, $y=0$ 处的相对曲率. 设其图形类似图 2.1.1 的(a),只不过现在 t 轴为 x 轴,N 轴是 y 轴,f_a 即为 $y=f(x)$ 曲线(简称为曲线 f).

由曲率的定义,曲率 κ

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \qquad \text{—(2.1.1)}$$

其中 Δs 是当曲线上的一个动点,从原点移动到 A 点(即移动方向是沿横坐标 t 增加的方向)时,所经过的曲线 f 上的弧长,而角 α_A 则是曲线 f 在 A 点处的切线 l 与 x 轴的夹角(以逆时针方向度量),即 l 的方向角. 则

$$\Delta \alpha = \alpha_A - \alpha_0$$

α_0 是 A 点为原点时的切线 l 的方向角. 由于 Δs 总是大于(等于)0 的数,故(2.1.1)式定义的曲率 κ 的符号完全由 $\Delta\alpha$ 的符号决定.

---

[1] 显然法截曲线还具有其他的更复杂的几何形状,但这不影响以下的分析.

在图(2.1.1)的(a)中，当 A 点沿曲线 f 移动到原点时，A 点的切线 l 与 x 轴的夹角 α_A 显然趋于 0，所以，$\alpha_0 = 0$. 因此在这一情形，

$$\Delta\alpha = \alpha_A - \alpha_0 = \alpha_A \geqslant 0 \qquad \text{(等号仅在 } A \text{ 为原点时成立)}$$

所以，当 $\Delta s \to 0$，A 点沿曲线 f 趋近于原点，

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \geqslant 0$$

而在图 2.1.1 的(b)中，当 A 点沿曲线 f 移动到原点时，A 点切线的方向角 α_A 是趋于 π 的，所以，$\alpha_0 = \pi$. 因此，在这一情形

$$\Delta\alpha = \alpha_A - \pi \leqslant 0 \qquad \text{(等号仅在 } A \text{ 为原点时成立)}$$

所以，有

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \leqslant 0$$

其次，由弧长的微分得

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2} \cdot \mathrm{d}x \qquad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

以及

$$\alpha_A = \operatorname{arctg} y'$$

$$\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\alpha_A = \frac{y''}{1 + y'^2}\mathrm{d}x$$

即得

$$\kappa = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{—(2.1.2)}$$

但因为现在 $y = f(x)$ 曲线在 Oxy 坐标系原点处与 x 轴相切，故

$$y'(0) = 0$$

所以，

$$\kappa\,|_{x=0} = y''(0) \qquad \text{—(2.1.3)}$$

由二阶导数 y'' 的性质即知，在图(2.1.1)的(a)情形下，

$$y''(0) > 0 \Leftrightarrow \kappa > 0$$

而在(b)情形下，

$$y''(0) < 0 \Leftrightarrow \kappa < 0$$

将以上在固定坐标系 Oxy 上定义的(2.1.3)式，转换到前面所指的法截曲线的 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的局部坐标系，若法截曲线 f_a[1] 在局部坐标系 OtN 上也表示为

$$N = f_a(t)$$

的显式，则 f_a 在 $t = 0$ 处的曲率就是

$$\kappa = f''_a(0) \qquad —(2.1.4)$$

一般地，法截曲线是以

$$f(t,\ N) = 0$$

的隐函数形式表示的. 由(2.1.4)式的意义及隐函数偏导数的求导规则，

$$f'_a = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\frac{f'_t}{f'_N}$$

$$f''_a = \frac{\mathrm{d}^2 N}{\mathrm{d}t^2} = \frac{2f''_{tN}f'_t f'_N - f''_{tt}(f'_N)^2 - f''_{NN}(f'_t)^2}{(f'_N)^3}$$

即可得到

$$\kappa = \frac{\begin{vmatrix} f''_{tt} & f''_{tN} & f'_t \\ f''_{Nt} & f''_{NN} & f'_N \\ f'_t & f'_N & 0 \end{vmatrix}}{(f'_N)^3} \quad (t = 0,\ N = 0) \qquad —(2.1.5)$$

(2.1.5)式就是在局部坐标系下，法截曲线相对曲率的基本公式. 可以注意(并与(1.1.1)式相比较)，在(2.1.5)式等号的右边没有“－”号项.

容易理解，(2.1.5)式是在规定构成法截曲线的局部坐标系的纵、横轴正方向的两个方向——曲面 F 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的法方向和(取定的一个)切方向，始终与 R^2 坐标系中的 $\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_1$ 方向相一致的条件下得到的. 如果规定局部坐标系的纵、横轴正方向是曲面 F 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的负法方向和取定的一个切方向，并且，局部坐标系的纵、横轴(N、t 轴)正方向仍保证与 $\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_1$ 一致，即曲面的法方向 n 现在与 $\boldsymbol{e}_2$ 的正方向相反，那么，法截曲线的隐函数形式将是

$$F(t,\ N) = f(t,\ -n) = 0$$

则在 $t = 0$，$N = 0$ 的原点处，

$$F'_t = f'_t \quad F'_N = -f'_n$$

---

[1] 如何在曲面 F 上构造法截曲线 f_a 的函数形式，详见下一节内容.

$$F''_{tt} = f''_{tt} \quad F''_{tN} = -f''_{tn} \quad F''_{NN} = f''_{nn}$$

即得

$$\kappa = \frac{\begin{vmatrix} F''_{tt} & F''_{tN} & F'_{t} \\ F''_{Nt} & F''_{NN} & F'_{N} \\ F'_{t} & F'_{N} & 0 \end{vmatrix}}{(F'_N)^3} = -\frac{\begin{vmatrix} f''_{tt} & f''_{tn} & f'_{t} \\ f''_{tn} & f''_{nn} & f'_{n} \\ f'_{t} & f'_{n} & 0 \end{vmatrix}}{(f'_n)^3} \qquad —(2.1.6)$$

从而(2.1.6)式的等号右边就会有“－”号项. 本书使用(2.1.5)式为相对曲率公式.

把图 2.1.1 的(a)这样的法截曲线称为在 $\boldsymbol{x}^0$ 点(即局部坐标系的原点)处是向上凹的(简称为凹、上凹),而将(b)这样的法截曲线称为在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处向上凸的(简称为凸、上凸). 那么,法截曲线 f_a 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的相对曲率 κ 的符号就具有几何意义. 当 $\kappa > 0$, 即表明法截曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处是上凹的;反之,则是上凸的. 而当 $\kappa = 0$, 则表明法截曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处或者是平直的,或者是一个拐点.

如果在 2 维法截平面的局部坐标系上,曲面 F 的法截曲线由参数方程形式给出

$$\begin{cases} t = t(s) \\ N = N(s) \end{cases} \qquad —(2.1.7)$$

由参数方程的求导规则

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\dot{N}}{\dot{t}} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 N}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\dot{t}\ddot{N} - \ddot{t}\dot{N}}{\dot{t}^3} \end{cases} \qquad —(2.1.8)$$

因为法截曲线在 $t = 0$, $N = 0$ 处与 t 轴相切,故在局部坐标系原点处,

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \quad \dot{N} = 0 \quad \dot{t} \neq 0$$

所以,法截曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的相对曲率

$$\kappa = \frac{\ddot{N}}{\dot{t}^2} \qquad —(2.1.9)$$

如果 s 是弧长参数,则在 $\boldsymbol{x}^0$ 处有

$$\dot{t}^2 + \dot{N}^2 = 1 \Rightarrow \dot{t} = 1 \quad (\because \dot{N} = 0)$$

故此时有

$$\kappa = \ddot{N} \qquad (t = 0,\ N = 0) \qquad —(2.1.10)$$

(2.1.9～10)式即是法截曲线为参数曲线在局部坐标系表示下的相对曲率公式.

如果曲面 F 由显式即 Monge 形式的函数

$$F:\ z = f(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x} \in D \subset R^n$$

给出,则还可以考虑以下截平面及截平面与曲面的交曲线上的曲率.

任取曲面 F 上的一点$(\boldsymbol{x}^0,\ z^0)$,并在该点作 Otz 局部坐标系,其中,z 轴是曲面 F 所在的

$$R^{n+1} = \forall(\boldsymbol{x},\ z) \quad \boldsymbol{x} \in R^n \quad z \in R$$

空间上的 z 轴的 O 点平移到$(\boldsymbol{x}^0,\ z^0)$点处,而 t 轴是取定的过 $\boldsymbol{x}^0$ 点处

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0$$

给出切平面中的任一直线. t 轴的 O 点,也在$(\boldsymbol{x}^0,\ z^0)$点,其正方向右手性决定.

Otz 局部坐标系所在平面一般不是曲面 F 在$(\boldsymbol{x}^0,\ z^0)$点处的法截平面,所以曲面 F 与这一平面的交曲线一般也不是法截曲线. 注意 Otz 坐标系的纵轴(z 轴)的方向始终与 R^{n+1} 空间中的固定坐标系的 z 轴相同,所以,Otz 坐标系是半固定方向的坐标系. 这一点与前面所讲的 OtN 局部坐标系是不同的. 虽如此,若将曲面 F 在 Otz 局部坐标系上的交曲线用隐式或参数函数表出,那么,交曲线在 Otz 局部坐标系原点(即$(\boldsymbol{x}^0,\ z^0)$点)处的相对曲率 κ,在形式上仍由(2.1.5)或(2.1.9)式给出.

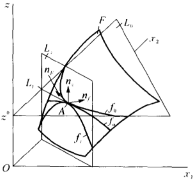


图 2.1.2

Otz 局部坐标系在非线性规划中有重要理论价值,它是 Lagrange 乘子法的几何基础. 具体可见本书 §6 章以及以下有关说明. 这里仅利用图 2.1.2 给予一个直观的表示.

在图 2.1.2 中,F 曲面是 Ox_1x_2z 坐标系上上凸的曲面. 设其函数形式为

$$z = f(x_1,\ x_2) \quad x_1,\ x_2 \geqslant 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \geqslant 0$$

在曲面 F 上的 A 点处,设 $A = (x_1^0,\ x_2^0,\ z^0)$. 作

$$L_0:\ z = z^0$$

水平平面，则 L_0 平面与曲面 F 有截面曲线（交曲线）f_0. f_0 是 L_0 上的（平面）曲线，且 f_0 过 A 点. 在 f_0 曲线上的 A 点，可作切线 L_f. 因 f_0 曲线的方程是

$$f_0:\ f(x_1,\ x_2) = z^0$$

故切线 L_f 的方程是

$$L_f:\ \nabla f(x_1^0,\ x_2^0)\cdot \boldsymbol{\alpha} = 0 \qquad (\boldsymbol{\alpha} = (x_1,\ x_2)^{\mathrm{T}} - (x_1^0,\ x_2^0)^{\mathrm{T}})$$

其中 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ \alpha_2)^{\mathrm{T}}$ 是从 A 点出发的方向向量. 显然，$\boldsymbol{\alpha}$ 可表示成

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{f_1}{f_2} \end{bmatrix} t \qquad f_{1,2} = \frac{\partial f(x_1^0,\ x_2^0)}{\partial x_{1,2}} \qquad \text{设}\frac{\partial f}{\partial x_2} \neq 0$$

则作

$$L_z:\ \begin{cases} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{f_1}{f_2} \end{bmatrix} \cdot t \\ z' = z^0 + z \end{cases}$$

所得到的平面即是 Otz 局部坐标系所在的平面. Otz 坐标系的原点也在 A 点，且平面 $L_z \perp L_0$.

在 L_z 平面上，可得到 L_z 与曲面 F 的交曲线 f_z. f_z 可表示为

$$f_z:\ z + z^0 = f\left(x_1^0 + t,\ x_2^0 - \frac{f_1}{f_2}t\right)$$

那么，在 L_0 平面的 f_0 曲线 A 点处，可得到 f_0 曲线的单位法向量 $\boldsymbol{n}_f$，

$$\boldsymbol{n}_f = \begin{bmatrix} \dfrac{\nabla f(x_1^0,\ x_2^0)}{\| \nabla f(x_1^0,\ x_2^0) \|} \\ 0 \end{bmatrix}$$

由此可将 L_0 平面表示成

$$L_0:\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{f_1}{f_2} \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \frac{s}{(f_1^2 + f_2^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (z = z^0)$$

而在 L_z 平面上的 f_z 曲线的 A 点处，可得到 f_z 曲线的单位法向量 $\boldsymbol{n}_z$，显然，

$$\boldsymbol{n}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则在曲面 f 的 A 点处，可得到的曲面 F 的单位法向量是 $\boldsymbol{n}_F$. 其中

$$F(x_1, x_2, z) = z - f(x_1, x_2) = 0$$

$$\boldsymbol{n}_F = \begin{bmatrix} -f_1(x_1^0, x_2^0) \\ -f_2(x_1^0, x_2^0) \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (1 + f_1^2 + f_2^2)^{-\frac{1}{2}}$$

利用 $\boldsymbol{n}_F$ 可得到曲面 F 在 A 点处的法截平面(未标出)与法截曲线 f_a.

其中法截平面(用 L_π 表示)可表示为

$$L_\pi: \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ z^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{f_1}{f_2} \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{s}{(1 + f_1^2 + f_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

法截曲线可表示为

$$f_a: z' = f(x_1', x_2')$$

在法截平面上 $x_{1,2}'$、z'均是 t, s 的函数,且 t, s 已规定了原点在 A 点的 Ots 坐标系(即上文所说的 OtN 坐标系).

如图 2.1.2 所示. 在 f_0、f_z、f_a 曲线的 A 点处各自对应的法向量 $\boldsymbol{n}_f$、$\boldsymbol{n}_z$ 和 $\boldsymbol{n}_F$ 的定向下的局部坐标系上, f_z、f_a 曲线在 A 点处的相对曲率都是负数(但一般不会相同),而 f_0 曲线在 A 点处的相对曲率则是正数.

从更广的意义上,可以将 R^m 空间上

$$f(\boldsymbol{x}) = c \qquad c - \text{const}$$

表示的曲面,理解成是一个在 R^{m+1}空间的曲面

$$z = f(\boldsymbol{x})$$

在 $z = c$ 决定的超平面上的交曲线(曲面). 图 2.1.2 直观地给出了二者的几何关系及意义上的区别. 把握这一点,对于许多问题的理解是有帮助的.

§ 2.2 R^m 空间上曲面的法截曲线与法截曲率

§ 2.2.1 一般曲面函数决定的法截曲线与曲率

对于 R^m 空间上的正则(参数)曲面 f,只有给出可微单位法向量,才能构造法截平面. 但确定单位法向量的方法不止有一种. 在这一节,只考虑用一般形式的曲面函数表示 R^m 空间中的曲面时,直接利用曲面函数的梯度向量构造单位

法向量的方法，而将矢量积方法留在以下章节中叙述.

设 R^m 空间上的曲面 f 由(1.2.1)式隐式地给出. 为方便，不妨总设(1.2.1)式中的 $c=0$. 若 $c\neq 0$，总可以重新规定

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})-c=0$$

的形式作为 R^m 空间上曲面的函数.

设 $f(\boldsymbol{x})\quad \boldsymbol{x}\in D\subset R^m$ 上是正则的，即 $\nabla f(\boldsymbol{x})\neq \boldsymbol{0}$.

设 $f(\boldsymbol{x})$关于 $\boldsymbol{x}$ 是二阶(以上)可微函数.

设 $\boldsymbol{x}^0\in D\subset R^m$ 是曲面 f 上的任一点，$f(\boldsymbol{x}^0)=0$. 则曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的法向量是$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$，单位法向量是

$$\widetilde{\mathbf{N}}(\boldsymbol{x}^0)=\frac{\nabla f(\boldsymbol{x}^0)}{\|\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\|} \qquad —(1.2.11)$$

切平面 L_f 是

$$L_f:\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}=0\qquad \boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0\quad \boldsymbol{x}\in R^m \qquad —(1.2.9)$$

由于 f 是正则的，故$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$分量中至少有一个分量 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_i}\neq 0$，从而，(1.2.9)式有解. 不妨设 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_m}\neq 0$，可得到(1.2.9)式的解是

$$\boldsymbol{\alpha}=\Lambda\boldsymbol{t}\quad \boldsymbol{t}\in R^{m-1} \qquad —(2.2.1.1)$$

其中矩阵 Λ 是 $m\times(m-1)$ 阶矩阵，即(1.2.9)式齐次线性方程组的基础解系矩阵. Λ 矩阵的形式通常可取为

$$\Lambda=\Lambda(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix} & I_{(m-1)} & & \\ -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_m}}, & -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial f}{\partial x_m}}, & \cdots, & -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x_{m-1}}}{\frac{\partial f}{\partial x_m}}\end{bmatrix} \qquad —(2.2.1.2)$$

(2.2.1.2)式中各偏导数均在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处取值. $I_{(m-1)}$是 $(m-1)\times(m-1)$ 阶单位矩阵. Λ 矩阵是列满秩的. 所以，利用 Schmidt 正交化方法，也可以再由(2.2.1.2)式得到 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0$ 点处的列向量正交的基础解系矩阵. 因此，在需要时，允许我们直接设定在曲面上某一点处的 Λ 矩阵是列向量正交的矩阵.

设 $\widetilde{\Lambda}$ 是从 Λ 矩阵中得到的(归一化的)列向量正交的基础解系矩阵. 任取一个不为 $\boldsymbol{0}$ 的且归一化的 $\boldsymbol{t}\in R^{m-1}$，构造

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}=\widetilde{\Lambda}\boldsymbol{t}\quad \boldsymbol{t}\in R^{m-1}\quad \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}=1\quad \widetilde{\Lambda}^{\mathrm{T}}\widetilde{\Lambda}=I_{(m-1)} \qquad —(2.2.1.3)$$

则有

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\tilde{\Lambda}\tilde{\Lambda}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t} = 1$$

即 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ 是切平面 L_f 上从 $\boldsymbol{x}^0$ 点出发且归一化的方向向量，也就是 f 曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的单位切(方向)向量. 显然总成立 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \neq \mathbf{0}$.

简记 $\widetilde{\mathbf{N}}(\boldsymbol{x}^0) = \widetilde{\mathbf{N}}$，可知亦有 $\widetilde{\mathbf{N}} \neq \mathbf{0}$. 利用 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$，$\widetilde{\mathbf{N}}$方向向量，构造 f 曲面上过 $\boldsymbol{x}^0$ 点的截平面 L_π，

$$L_\pi = \{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0 \mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0 = \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \cdot t + \widetilde{\mathbf{N}} \cdot s \quad t,\ s \in R\} \qquad \text{—(2.2.1.4)}$$

现在 f 曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的单位切向量、法向量 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$、$\widetilde{\mathbf{N}}$本身也位于 L_π上，即 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$，$\widetilde{\mathbf{N}} \in L_\pi$. 故 L_π平面就是 f 曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处由 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ 方向向量决定的一个法截平面.

注意不要混淆(2.2.1.3)式中的 $\boldsymbol{t}$ 与(2.2.1.4)式中的 t. (2.2.1.3)式中的 $\boldsymbol{t}$ 是 R^{m-1}中的某个归一化的向量，并已确定. (2.1.4)式中的 t 是标量，是作为一个参量出现的，并且 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \cdot t = (\widetilde{\Lambda \boldsymbol{t}}) \cdot t$.

L_π与 R^m 空间上的 $m-1$ 维 f 曲面必有交曲线存在(见推论 2.4.4.7). 用 f_α 表示这条交曲线. f_α 显然同时是 f、L_π上的曲线，故 f_α 是平面曲线. 它就是 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处沿 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ 切方向的法截曲线. 将(2.2.1.4)中决定的 $\boldsymbol{x}$ 写成为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}t + \widetilde{\mathbf{N}}s \qquad \text{—(2.2.1.5)}$$

并将(2.2.1.5)式代回到 $f(\boldsymbol{x}) = 0$，便得到过 $\boldsymbol{x}^0$ 点的法截曲线 f_α 的方程，

$$f_\alpha:\ f_\alpha(t,\ s) = f(\boldsymbol{x}^0 + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}t + \widetilde{\mathbf{N}}s) = 0 \qquad \text{—(2.2.1.6)}$$

可注意到在按(2.2.1.4)式构造法截平面 L_π时，实际上已经在 L_π平面上定义了一个原点在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的 Ots 坐标系[1]. Ots 坐标系的横轴取为 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}t$ 轴，纵轴是$\widetilde{\mathbf{N}}s$ 轴. 因为

$$\widetilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = 0$$

故 Ots 是正交坐标系，且就是平面曲线 f_α 的 Frenet 标架.

现在法截曲线 f_α 刚好就是 Ots 坐标系上的平面曲线，所以 f_α 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的曲率，就是 f_α 在 Ots 坐标系上 $t = s = 0$ 原点处的相对曲率. 用 $\kappa_f(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})$表示这个曲率.

简记 $\nabla f_\alpha(\cdot) = \nabla f_\alpha \quad \nabla^2 f_\alpha(\cdot) = \nabla^2 f_\alpha$，由平面曲线(相对)曲率的计算式(2.1.5)，有

[1] Ots 坐标系就是§2.1节中所指的 OtN 坐标系.

$$\kappa_f(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{\begin{vmatrix} \nabla^2 f_\alpha & \nabla f_\alpha \\ \nabla f_\alpha^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix}}{\left(\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial s}\right)^3} \qquad —(2.2.1.7)$$

简单地说，(2.2.1.7)式规定下的曲率 $\kappa_f(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$，总使平面上的圆周上任一点的曲率在(1.2.11)式规定的法方向下是负数.

(2.2.1.7)式的各偏导数均在 $t = s = 0$ 处取值. 同样简记 $\nabla f(\cdot) = \nabla f$ $\nabla^2 f(\cdot) = \nabla^2 f$，且规定这些偏导数均在 $\boldsymbol{x}^0$ 处取值，可有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \nabla f^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{\alpha}} = 0 & \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial s} = \nabla f^{\mathrm{T}}\, \widetilde{\boldsymbol{N}} = \|\nabla f\| \\ \dfrac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t^2} = \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} H \widetilde{\boldsymbol{\alpha}} & \dfrac{\partial^2 f_\alpha}{\partial s^2} = \widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}} H\, \widetilde{\boldsymbol{N}} \\ \dfrac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t \partial s} = \dfrac{\partial^2 f_\alpha}{\partial s \partial t} = \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} H\, \widetilde{\boldsymbol{N}} = \widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}} H \widetilde{\boldsymbol{\alpha}} & \end{cases} \qquad —(2.2.1.8)$$

其中 $H = \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)$ 是曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的 Hessian 矩阵. 将(2.2.1.8)式代入(2.2.1.7)式，有

$$\kappa_f(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{\begin{vmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\alpha}} H \widetilde{\boldsymbol{\alpha}} & \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} H\, \widetilde{\boldsymbol{N}} & 0 \\ \widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}} H \widetilde{\boldsymbol{\alpha}} & \widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}} H\, \widetilde{\boldsymbol{N}} & \|\nabla f\| \\ 0 & \|\nabla f\| & 0 \end{vmatrix}}{\|\nabla f\|^3} = -\frac{\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} H \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}}{\|\nabla f\|} \qquad —(2.2.1.9)$$

(2.2.1.9)式给出的 $\kappa_f(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$就是曲面 f 在其梯度向量$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$给出的法方向下，在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处沿 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$ 给出的切方向的法截曲率.

由于(2.2.1.9)式所得到的 $\kappa_f(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$是 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$ 的二次型，故，显然就有

$$\kappa_f(-\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \kappa_f(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) \qquad —(2.2.1.10)$$

成立. 这是法截曲率的基本性质之一.

由以上的 $\kappa_f(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$符号的几何意义，马上可知，法截曲线 f_α 在 Ots 坐标系原点处曲率圆的圆心(称为法曲率中心)，即在以 $\mathrm{sign}(\kappa_f(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}))\cdot(\widetilde{\boldsymbol{N}})$为方向[1]，以 $\dfrac{1}{|\kappa_f(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}})|}$为矢经长度，从 Ots 原点(即 R^m 空间上的 $\boldsymbol{x}^0$ 点)出发的矢量指向的那一

---

[1] sign(·)是取符号函数. $\mathrm{sign}(a) = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ 0 & a = 0. \\ -1 & a < 0 \end{cases}$

点(终点)上. 故我们可以说,当 $\kappa_f(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) > 0$,则法曲率中心在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处以 $\widetilde{\mathbf{N}}$ 为方向的射线上距 $\boldsymbol{x}^0$ 点为 $\kappa_f(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}})^{-1}$ 距离的点上;当 $\kappa_f(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) < 0$,则法曲率中心在 $-\widetilde{\mathbf{N}}$ 为方向从 $\boldsymbol{x}^0$ 出发的射线上距 $\boldsymbol{x}^0$ 点为 $|\kappa_f(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}})|^{-1}$ 距离的点上. 由此,可以很容易给出法曲率中心的计算公式. 此处不再详述.

以下示例予以具体说明.

例 2.2.1.1 对 R^m 空间上的超球面,求其上任一点处的法截曲线及法曲率.

解: 超球面方程为

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_i^m (x_i - a_i)^2 = r^2 \qquad (r > 0)$$

任取其上一点 $\boldsymbol{x}^0$,利用以上符号,作

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \widetilde{\boldsymbol{\alpha}} \cdot t + \widetilde{\mathbf{N}} \cdot s$$

有

$$f_\alpha(t, s) = \sum_i^m (x_i^0 + \tilde{\alpha}_i t + \widetilde{N}_i s - a_i)^2 = r^2$$

从而得到

$$\sum_i^m (x_i^0 - a_i)^2 + \sum_i^m \tilde{\alpha}_i^2 \cdot t^2 + \sum_i^m \widetilde{N}_i^2 \cdot s^2 + 2\sum_i^m (x_i^0 - a_i)\tilde{\alpha}_i t +$$
$$+ 2\sum_i^m (x_i^0 - a_i)\widetilde{N}_i s + 2\sum_i^m \tilde{\alpha}_i \widetilde{N}_i t s = r^2$$

由以下关系

$$\sum_i^m (x_i^0 - a_i)^2 = r^2$$

$$\sum_i^m \tilde{\alpha}_i^2 = 1 \qquad \sum_i^m \widetilde{N}_i^2 = 1 \qquad \sum_i^m \tilde{\alpha}_i \widetilde{N}_i = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2(x_i^0 - a_i) \Rightarrow 2\sum_i^m (x_i^0 - a_i)\tilde{a}_i = 0$$

$$\widetilde{N}_i = \frac{x_i^0 - a_i}{r} \Rightarrow 2\sum_i^m (x_i^0 - a_i)\widetilde{N}_i = 2r$$

上式即可化简为

$$t^2 + s^2 + 2rs = 0$$

从而

$$f_\alpha(t, s) = t^2 + (s + r)^2 = r^2$$

因此 R^m 空间的超球面的法截曲线是 Ots 坐标系上的圆. 这个圆的圆心在 Ots 坐标系纵轴负半轴上的 $(0, -r)$ 点, 半径为 r, 也就是超球的球半径. 由于超球面上任一点的法方向 $\widetilde{\boldsymbol{N}}$ 均指向球面外部(外向), 这一方向就是 Ots 坐标系纵轴的正方向. 由几何意义易知 Ots 上的 $(0, -r)$ 点, 就是 R^m 空间中超球面的球心 (a_i). 因为令

$$a_i = x_i^0 + \widetilde{N}_i r \Rightarrow x_i^0 = a_i - \widetilde{N}_i r$$

显然有

$$\sum_i^m (x_i^0 - a_i)^2 = \sum_i^m \widetilde{N}_i^2 \cdot r^2 = r^2$$

成立.

由

$$H = \nabla^2 f = \text{diag}[2, 2, \cdots, 2] \quad \|\nabla f\| = 2r$$

可知

$$\kappa_f(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) = -\frac{\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} H \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}}{\|\nabla f\|} = -\frac{2\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}}{2r} = -\frac{1}{r}$$

而从 $f_a(t, s) = 0$ 中可得

$$s = -r \pm (r^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}$$

在 $t = s = 0$ 处应有

$$s = -r + (r^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}s(0)}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}^2 s(0)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{r}$$

图 2.2.1.1 对 $m = 2$ 上的圆给出一个 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的 Ots 坐标系的示意. 由图可见, 对圆周曲线, f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点(即 Ots 的原点)处是凸的, 从而 $\kappa_f(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) = -\dfrac{1}{r} < 0$.

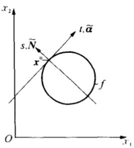


图 2.2.1.1

作为比较, 可以再对经济学中常用的 ρ 次齐次效用函数 $u(\boldsymbol{x})$ 在 $m = 2$ 平面上给出 Ots 坐标及法截曲率.

$$u(\boldsymbol{x}) = x_1^\rho + x_2^\rho = c > 0 \quad 0 < \rho < 1 \quad x_1, x_2 > 0$$

任取 $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) > 0$, 有

$$\nabla u(\boldsymbol{x}^0) = \rho\begin{bmatrix}(x_1^0)^{\rho-1}\\(x_2^0)^{\rho-1}\end{bmatrix} > 0 \qquad \nabla^2 u(\boldsymbol{x}^0) = \rho(\rho-1)\begin{bmatrix}(x_1^0)^{\rho-2} & 0\\ 0 & (x_2^0)^{\rho-2}\end{bmatrix}$$

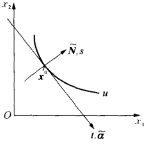


图 2.2.1.2

在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处

$$\kappa_f(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) = (1-\rho)\frac{((x_1^0)^{\rho-2}\widetilde{\alpha}_1^2 + (x_2^0)^{\rho-2}\widetilde{\alpha}_2^2)}{((x_1^0)^{2\rho-2} + (x_2^0)^{2\rho-2})^{\frac{1}{2}}} > 0$$

其图形如左图. 在图 2.2.1.2 中由$\nabla u(\boldsymbol{x}^0)$决定的$\widetilde{\boldsymbol{N}}$指向 $\boldsymbol{x}^0$ 点的右上方,这就是 s 轴的正向. 从 Ots 局部坐标系上看,u 曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点,是凹的,此即 $\kappa_f(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) > 0$ 的意义.

§2.2.2 R^m 空间上曲线的曲率

在传统微分几何中,已在 R^3 空间上证明了有 Meusnier 定理成立. 这一定理是指:在 R^3 空间的 S 曲面上经过给定的一点 $\boldsymbol{p}$ 且具有相同切线的所有曲线在这一点处有相同的法曲率. 根据这一定理,就可以确切地说在 S 曲面上的 $\boldsymbol{p}$ 点沿给定切方向的法曲率,并且,这一法曲率可以由任选 S 曲面上经过 $\boldsymbol{p}$ 点且与给定切方向相切的曲线求其在 $\boldsymbol{p}$ 点的法曲率得到. 这一结论的另一种说法即是曲面 S 上过 $\boldsymbol{p}$ 点沿给定切方向的法曲率与求取法曲率时选用的曲面 S 上过 $\boldsymbol{p}$ 点且其切向量与给定切方向一致的具体曲线的形式无关. 因此,求取曲面 S 上 $\boldsymbol{p}$ 点法曲率就可以选取形式上最简洁的平面曲线,比如过 $\boldsymbol{p}$ 点的 S 曲面的法截平面上的法截曲线.

为了确知在一般的 R^m 空间上的超曲面上给定的一点 $\boldsymbol{p}$ 并沿任一过 $\boldsymbol{p}$ 点的 S 的切方向的法截曲率也具有类似以上所说的 R^3 空间上 Meusnier 定理的结论这一性质,就需要将 Meusnier 定理推广到一般的 R^m 空间上去. 为此,先给出 R^m 空间上的曲线的曲率的定义及计算公式.

定义 2.2.2.1 称以 t 为参数的向量函数 $\boldsymbol{x}(t) \in R^m$, $t \in D_t \subset R$, 其中 D_t 是 R 中的连通开区间,是 R^m 空间上的参数曲线方程. 设 $\boldsymbol{x}(t) = (x_i(t))$, 且 $x_i(t)$关于 t 二阶以上可导. 记

$$\nabla\boldsymbol{x} = \left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}x_m}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{x} = \left(\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^2x_m}{\mathrm{d}t^2}\right)^{\mathrm{T}}$$

是 $\boldsymbol{x}(t)$的一、二阶导数向量. 若在 $t = t^0 \in D_t$ 处$\nabla\boldsymbol{x}(t^0) \neq \boldsymbol{0}$,且 $\|\nabla\boldsymbol{x}(t)\|$ 函数是可微的,则称 t^0 是 $\boldsymbol{x}(t)$的正则点,若任一 $t \in D_t$, $\boldsymbol{x}(t)$都是正则的,称 $\boldsymbol{x}(t)$是正

则参数曲线. ■

若 t^0 是 $\boldsymbol{x}(t)$ 的正则点，则 $\nabla\boldsymbol{x}(t^0)$ 显然是曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 R^m 空间上的 $\boldsymbol{x}(t^0)$ 点处的切方向向量.

以上定义是 R^3 空间上曲线定义的推广. 以下继续推广 R^3 空间上的曲线弧长及其微分、曲率的定义.

令

$$s = \int_a^b \| \nabla\boldsymbol{x} \| \, \mathrm{d}t \qquad [a, b] \subset D_t \qquad —(2.2.2.1)$$

易证 s 是曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 的不变量[1]. s 是 t 从 a 到 b 变动所对应的 $\boldsymbol{x}(t)$ 曲线上的弧长.

令

$$s(t) = \int_a^t \| \nabla\boldsymbol{x} \| \, \mathrm{d}t \qquad [a, t] \subset D_t \qquad —(2.2.2.2)$$

则

$$\mathrm{d}s = \| \nabla\boldsymbol{x} \| \, \mathrm{d}t \qquad —(2.2.2.3)$$

$\mathrm{d}s$ 是 $\boldsymbol{x}(t)$ 的弧长微分，$\mathrm{d}s$ 也是曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 的不变量.

由(2.2.2.3)式，可知对于正则参数曲线 $\boldsymbol{x}(t)$，当且仅当

$$\| \nabla\boldsymbol{x} \| = 1 \qquad t \in D_t \qquad —(2.2.2.4)$$

则 $\mathrm{d}t$ 就是 $\boldsymbol{x}(t)$ 的弧长微分，故 t 就是弧长参数.

设正则参数曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 的参数 t 是弧长参数，故(2.2.2.4)式成立，将(2.2.2.4)式两边平方再对 t 求导，得

$$2 \cdot \nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2\boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow \nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2\boldsymbol{x} = 0 \qquad —(2.2.2.5)$$

显然，当且仅当

$$\nabla\boldsymbol{x} = \mathrm{const} \Rightarrow \nabla^2\boldsymbol{x} = 0$$

此时 $\boldsymbol{x}(t)$ 即为 R^m 空间上的直线.

以下设 $\nabla^2\boldsymbol{x} \neq 0$. 由(2.2.2.5)式，$\nabla^2\boldsymbol{x}$ 是与 $\nabla\boldsymbol{x}$ 正交的向量. 称 $\nabla^2\boldsymbol{x}(t^0)$ 是 $\boldsymbol{x}(t)$ 曲线在 R^m 空间 $\boldsymbol{x}(t^0)$ 处的主法向量.

定义 2.2.2.2 记 κ_x 是曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 t 处的曲率.

$$\kappa_x = \| \nabla^2 \boldsymbol{x}(t) \| \qquad (\text{仅当 } \| \nabla\boldsymbol{x}(t) \| = 1) \qquad —(2.2.2.6)$$

■

[1] 为节约篇幅，此处不给予详述.

定义 2.2.2.2 是参数 t 为曲线弧长参数时曲线曲率的定义. 当 t 不是弧长参数时,记曲线的单位切向量为$\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}$,

$$\nabla\tilde{\boldsymbol{x}} = \nabla\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\nabla\boldsymbol{x}(t)}{\|\nabla\boldsymbol{x}(t)\|} \qquad \text{—(2.2.2.7)}$$

则曲线的曲率可表示为

$$\kappa_x = \frac{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\|}{\|\nabla\boldsymbol{x}(t)\|} \qquad \nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\mathrm{d}(\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}(t))}{\mathrm{d}t} \qquad \text{—(2.2.2.8)}$$

(2.2.2.8)式可以直接从传统微分几何中的曲线曲率的计算公式[1]

$$\kappa_x = \frac{|\nabla\boldsymbol{x}(t)\times\nabla^2\boldsymbol{x}(t)|}{|\nabla\boldsymbol{x}(t)|^3} \qquad \text{—(2.2.2.9)}$$

中得到. 因为由矢量乘法的几何意义知

$$|\nabla\boldsymbol{x}\times\nabla^2\boldsymbol{x}| = \|\nabla\boldsymbol{x}\|\ \|\nabla^2\boldsymbol{x}\|\cdot\sin\theta \qquad \text{—(2.2.2.10)}$$

因为

$$\cos\theta = \frac{\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\ \nabla^2\boldsymbol{x}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|\ \|\nabla^2\boldsymbol{x}\|} \qquad \text{—(2.2.2.11)}$$

故

$$\sin\theta = \pm\left(1-\frac{(\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\ \nabla^2\boldsymbol{x})^2}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2\ \|\nabla^2\boldsymbol{x}\|^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

注意,由(2.2.2.11)式定义的两向量间的夹角 θ,显然有

$$0\leqslant\theta\leqslant\pi$$

故总有 $\sin\theta\geqslant 0$, 所以,规定

$$\sin\theta = \left(1-\frac{(\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\ \nabla^2\boldsymbol{x})^2}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2\ \|\nabla^2\boldsymbol{x}\|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 0 \qquad \text{—(2.2.2.12)}$$

将(2.2.2.10)式、(2.2.2.12)式代入(2.2.2.9)式得

$$\kappa_x = \frac{\|\nabla\boldsymbol{x}\|\ \|\nabla^2\boldsymbol{x}\|\cdot\sin\theta}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^3} = \frac{\|\nabla^2\boldsymbol{x}\|\sin\theta}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2} \qquad \text{—(2.2.2.13)}$$

以下证明

$$\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\| = \frac{\|\nabla^2\boldsymbol{x}\|}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|}\sin\theta \qquad (0\leqslant\theta\leqslant\pi) \qquad \text{—(2.2.2.14)}$$

---

[1] 陈维桓,见前注,第 22 页.

由于

$$\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=\left(\frac{x_1'}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|},\frac{x_2'}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|},\cdots,\frac{x_m'}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|}\right)^{\mathrm{T}}$$

且

$$\tilde{x}_i''=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x_i'}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|}\right)=\frac{x_i''-x_i'\cdot a}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|}\qquad a=a(t)=\frac{\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\,\nabla^2\boldsymbol{x}(t)}{\|\nabla\boldsymbol{x}(t)\|^2}$$

—(2.2.2.15)

由于 $\|\nabla\boldsymbol{x}\|\neq 0$,且 $\|\nabla\boldsymbol{x}\|$ 是可微的,x_i 是二阶可微的,故 x_i'' 是存在的.

所以

$$\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}=\frac{\nabla^2\boldsymbol{x}-\nabla\boldsymbol{x}\cdot a}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|}\qquad \text{—(2.2.2.16)}$$

注意(2.2.2.16)式等号右边的分式的分子部分是$\nabla^2\boldsymbol{x}$、$\nabla\boldsymbol{x}$ 两向量按 Schmidt 正交化的计算方式所得的公式.

$$\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|=\frac{[(\nabla^2\boldsymbol{x}-\nabla\boldsymbol{x}a)^{\mathrm{T}}\cdot(\nabla^2\boldsymbol{x}-\nabla\boldsymbol{x}a)]^{\frac{1}{2}}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|}$$

将上式等号右边分式中的分子作乘法展开,并注意到有

$$a\cdot\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2\boldsymbol{x}=a^2\cdot\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{x}=\frac{(\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2\boldsymbol{x})^2}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2}$$

即有

$$\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|=\frac{\left[\|\nabla^2\boldsymbol{x}\|^2-\dfrac{(\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2\boldsymbol{x})^2}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2}\right]^{\frac{1}{2}}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|}=\frac{\|\nabla^2\boldsymbol{x}\|}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|}\sin\theta$$

此即(2.2.2.14)式,从而可得到(2.2.2.8)式.

由以上推导同时可知,

$$\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|=\frac{[\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2\,\|\nabla^2\boldsymbol{x}\|^2-(\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2\boldsymbol{x})^2]^{\frac{1}{2}}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2}\qquad \text{—(2.2.2.17)}$$

故,(2.2.2.8)式又可表示成

$$\kappa_x=\frac{[\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2\,\|\nabla^2\boldsymbol{x}\|^2-(\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2\boldsymbol{x})^2]^{\frac{1}{2}}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^3}\qquad \text{—(2.2.2.18)}$$

当 t 是弧长参数时,$\|\nabla\boldsymbol{x}\|=1$,$\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2\boldsymbol{x}=0$,(2.2.2.18)式就成为(2.2.2.6)式,且从(2.2.2.14)式中,此时必有 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$,此即“正交”的几何意义.

由此也可知，当 t 不是弧长参数时，一般可以有 $\nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{x} \neq 0$.

在 R^m 空间上，$\boldsymbol{x}(t)$(代数)曲线一般可以由 $m-1$ 个函数隐式地给出，

$$f_i(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)=0 \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1 \quad \boldsymbol{x}\in D_i\subset R^m \qquad \text{—(2.2.2.19)}$$

用

$$G_f(\boldsymbol{x})=\left[\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right]_{(m-1)\times(m-1)} \quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1 \qquad \text{—(2.2.2.20)}$$

则 G_f 是(2.2.2.19)式的 Jacobi 矩阵的前 $(m-1)\times(m-1)$ 阶顺序主子矩阵. 显然，通过适当的下标编号及排序，如果(2.2.2.19)式可以决定 R^m 空间上的一条曲线，则必应有

$$|G_f(\boldsymbol{x})|\neq 0 \qquad \boldsymbol{x}\in\bigcap_i D_i$$

由隐函数定理，这时可成立

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(x_m)\\ x_2(x_m)\\ \vdots\\ x_{m-1}(x_m)\\ t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_{m-1}(t)\\ t\end{bmatrix} \qquad \text{—(2.2.2.21)}$$

且总有 $\nabla \boldsymbol{x}(t)\neq 0$，故 $\boldsymbol{x}(t)$ 曲线是正则的.

引用以下符号

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}x_m}=\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_m}\\ \vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}x_{m-1}}{\mathrm{d}x_m}\end{bmatrix} \qquad \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}x_m^2}=\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}x_m^2}\\ \vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}^2x_{m-1}}{\mathrm{d}x_m^2}\end{bmatrix}$$

注意 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}x_m}$、$\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}x_m^2}$ 都是 $m-1$ 维(列)向量. 其中

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x_m}=\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}x_m^2}=\frac{\mathrm{d}^2x_i(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

其次，由隐函数定理中成立的关系式

$$\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}x_m}+\frac{\partial f_i}{\partial x_m}=0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1 \qquad \text{—(2.2.2.22)}$$

即得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}x_m} = -G_f^{-1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_m} \qquad —(2.2.2.23)$$

其中

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_m} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_m},\ \frac{\partial f_2}{\partial x_m},\ \cdots,\ \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_m}\right)^{\mathrm{T}}$$

对(2.2.2.22)式再求关于 x_m 的偏导数，有

$$\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}x_m}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}x_m} + \sum_{j=1}^{m-1}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_m \partial x_j}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}x_m} + \sum_{j=1}^{m-1}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\mathrm{d}^2 x_j}{\mathrm{d}x_m^2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_m}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}x_m} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_m^2} = 0 \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1 \qquad —(2.2.2.24)$$

故可以从中解出$\frac{\mathrm{d}^2 x_j}{\mathrm{d}x_m^2}$导数，写成矩阵形式，有

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}x_m^2} = -G_f^{-1} \cdot \left\{ 2\frac{\partial G_f}{\partial x_m}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}x_m} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_m^2} + \begin{bmatrix} \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}x_m}\right)^{\mathrm{T}} \nabla^2 \tilde{f}_1 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}x_m} \\ \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}x_m}\right)^{\mathrm{T}} \nabla^2 \tilde{f}_2 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}x_m} \\ \vdots \\ \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}x_m}\right)^{\mathrm{T}} \nabla^2 \tilde{f}_{m-1} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}x_m} \end{bmatrix} \right\} \qquad —(2.2.2.25)$$

其中

$$\frac{\partial G_f}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m}\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1},\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2},\ \cdots,\ \frac{\partial f_1}{\partial x_{m-1}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1},\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2},\ \cdots,\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{m-1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_1},\ \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_2},\ \cdots,\ \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_{m-1}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_m^2} = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_m^2},\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_m^2},\ \cdots,\ \frac{\partial^2 f_{m-1}}{\partial x_m^2}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\nabla^2 \widetilde{f}_i = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2}, & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_2}, & \cdots, & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_{m-1}} \\ \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_1}, & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_2^2}, & \cdots, & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_{m-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_{m-1} \partial x_1}, & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_{m-1} \partial x_2}, & \cdots, & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_{m-1}^2} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \cdots, m-1$$

即$\nabla^2 \widetilde{f}_i$是$\nabla^2 f_i$矩阵的前$(m-1)\times(m-1)$阶顺序主子矩阵.

(2.2.2.25)式表明,若G_f可逆,f_i是二阶可微函数,则$\dfrac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = \nabla^2 \boldsymbol{x}$就一定存在,由此,按前述诸式即可得到(2.2.2.19)式表示交曲线的主法方向[1].

§2.2.3 Meusnier 定理

现将R^3空间上的Meusnier定理推广至R^m空间.规定

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}_x = \widetilde{\boldsymbol{N}}_x(t) = \frac{\nabla^2 \widetilde{\boldsymbol{x}}(t)}{\| \nabla^2 \widetilde{\boldsymbol{x}}(t) \|} \qquad \text{—(2.2.3.1)}$$

是曲线$\boldsymbol{x}(t)$的单位主法向量,$\boldsymbol{x}(t)\in R^m$且$\|\nabla^2 \boldsymbol{x}\| \neq 0$.

对任一给定的t,称由下式决定的2维平面L_x为$\boldsymbol{x}(t)$处的密切平面

$$L_x = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = u \cdot \nabla \widetilde{\boldsymbol{x}} + v \cdot \widetilde{\boldsymbol{N}}_x \quad u, v \in R\} \qquad \text{—(2.2.3.2)}$$

定义 2.2.3.1 设f是R^m空间上的一个曲面,$\boldsymbol{p}$是f曲面上给定的一个点,$\boldsymbol{x}(t)$是曲面f上过$\boldsymbol{p}$点,且正则的曲线.$\widetilde{\boldsymbol{N}}$、$\widetilde{\boldsymbol{N}}_x$分别是曲面$f$、曲线$\boldsymbol{x}(t)$在$\boldsymbol{p}$点处的单位法向量,$\kappa_x$是$\boldsymbol{x}(t)$在$\boldsymbol{p}$点处的曲率,则

$$\kappa_n = \kappa_x \cos\theta \qquad \cos\theta = \widetilde{\boldsymbol{N}}_x^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{N}} \qquad \text{—(2.2.3.3)}$$

是曲线$\boldsymbol{x}(t) \subset f$在$\boldsymbol{p}$点的法曲率. ■

定义2.2.3.1的几何意义见图2.2.3.1.线段$\overline{pb}$就是$|\kappa_n|$法曲率(绝对值).$\overline{ap}$线段是$\kappa_x \cdot \widetilde{\boldsymbol{N}}_x$向量的经长即$\kappa_x$.$\theta'$角是$\widetilde{\boldsymbol{N}}_x$与$-\widetilde{\boldsymbol{N}}$向量的夹角.故$|\kappa_n|$就是$\kappa_x$在$-\widetilde{\boldsymbol{N}}$方向上的投影[2].且当$0 \leqslant \theta' \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ $\kappa_n \leqslant 0$,当$\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta' \leqslant \pi$ $\kappa_n \geqslant 0$.

设R^m空间曲面f上给定的一点$\boldsymbol{x}^0$,$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}} \neq \boldsymbol{0}$是$\boldsymbol{x}^0$处给定的一个单位切向量.

---

[1] 确定(2.2.2.19)式给出的交曲线的主法方向,还可以利用R^m空间上的多重矢量积方法(见§2.4节).

[2] 参见M P. do Carmo. 见前注. 第102页图3-8及其说明.这里规定的θ'刚好是那里的$\pi-\theta$角.

$\boldsymbol{x}(t)$是 f 上经过 $\boldsymbol{x}^0$ 点的正则曲线，并且 $\boldsymbol{x}(t)$在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的单位切向量 $\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}=\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$. 不妨设 $t=0$ 时有 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}^0$.

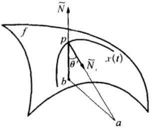


图 2.2.3.1

由于 $\boldsymbol{x}(t)$是 f 曲面上的曲线，并设 $f(\boldsymbol{x})=0$ 是曲面 f 的方程，且可设 t 不是弧长参数. 应有

$$f(\boldsymbol{x}(t))=0$$

对此式求 t 的一、二阶导数，并在 $t=0$(即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0$)处取值.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\boldsymbol{x}(t))\mid_{t=0}=\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{x}=\nabla f^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\,\|\nabla\boldsymbol{x}\|=0 \qquad —(2.2.3.4)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(\boldsymbol{x}(t))\mid_{t=0}=\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\,\nabla\boldsymbol{x}+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla^2\boldsymbol{x}=0 \qquad —(2.2.3.5)$$

从而得到

$$-\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla^2\boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}H\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2 \qquad —(2.2.3.6)$$

另一方面，由(2.2.3.3)式

$$-\widetilde{\boldsymbol{N}}_x^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{N}}=-\frac{\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|}\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}=\cos\theta'$$

即得

$$-\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}=\|\nabla f\|\,\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|\cdot\cos\theta' \qquad —(2.2.3.7)$$

再由(2.2.2.16)式，并注意到(2.2.3.4)式

$$\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}=\frac{1}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|}(\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla^2\boldsymbol{x}-\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{x}a)=\frac{\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla^2\boldsymbol{x}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|}$$

将此结果代入(2.2.3.7)式，有

$$-\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla^2\boldsymbol{x}=\|\nabla\boldsymbol{x}\|\,\|\nabla f\|\,\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|\cdot\cos\theta'$$

再将此结果代入(2.2.3.6)式即得到

$$\frac{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|}\cos\theta'=\frac{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}H\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}{\|\nabla f\|}$$

注意，由(2.2.3.3)式的规定，

$$\theta'=\pi-\theta$$

$$\cos\theta'=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$

所以，由上式

$$\frac{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|}\cos\theta=-\frac{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}H\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}{\|\nabla f\|}$$

由(2.2.1.9)式，(2.2.2.8)式，即知上式就是

$$\kappa_x\cos\theta=\kappa_f(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) \qquad \text{—(2.2.3.8)}$$

由定义 2.2.3.1 便有

$$\kappa_n\equiv\kappa_f(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) \qquad \text{—(2.2.3.9)}$$

这即是一般 R^m 空间上的 Meusnier 定理的结论.

定理 2.2.3.1(Meusnier) R^m 空间曲面 f 上经过一点 $\boldsymbol{x}^0$ 且具有相同切线的所有曲线在这一点有相同的法曲率[1]. ■

(2.2.3.2)式给出了 R^m 空间上过某一点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的正则曲线 $\boldsymbol{x}(t)$在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的密切平面 L_x. 现在仍设曲线 $\boldsymbol{x}(t)$位于 R^m 空间的曲面 f 上. 则超平面 L_x 与曲面 f 应有交曲线存在. 这一交曲线是位于 L_x 上的平面曲线，称其为曲面 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处，沿$\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}$、$\tilde{\boldsymbol{N}}_x$ 方向的密切平面上的**截面曲线**. 以下分析 $\boldsymbol{x}(t)$在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的曲率 κ_x 与密切平面上的截面曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的(相对)曲率之间的关系.

利用 L_x 密切平面上的关系，有

$$\boldsymbol{x}\in L_x\Rightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0+\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}(0)u+\tilde{\boldsymbol{N}}_x(0)v \quad u,\ v\in R$$

则由曲面 f 的方程 $f(\boldsymbol{x})=0$，可得密切平面上的截面曲线(记为 f_0)的方程，

$$f_0(u,\ v)=f(\boldsymbol{x}^0+\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}(0)u+\tilde{\boldsymbol{N}}_x(0)v)=0 \qquad \text{—(2.2.3.10)}$$

类似(2.2.1.8)式，并设$\tilde{\boldsymbol{N}}$是 f 曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的单位法向量，可得

$$\frac{\partial f_0}{\partial u}=\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}=0$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial v}=\nabla f^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{N}}_x=\|\nabla f\|\cos\theta$$

$$(\text{由 }\cos\theta=\tilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{N}}_x\Rightarrow\nabla f^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{N}}_x=\|\nabla f\|\cos\theta)$$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial u^2}=\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\nabla\tilde{\boldsymbol{x}} \qquad \frac{\partial^2 f_k}{\partial v^2}=\tilde{\boldsymbol{N}}_x^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\tilde{\boldsymbol{N}}_x$$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 f_0}{\partial v\partial u}=\tilde{\boldsymbol{N}}_x^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}=\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\tilde{\boldsymbol{N}}_x$$

---

[1] MP. do Carmo 见前注 第 103 页 命题 2.

用 $\kappa_{f_0}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \theta)$ 表示 f_0 截面曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的(相对)曲率，其中 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \nabla\tilde{\boldsymbol{x}}$. 注意，这里必须设 $\cos\theta \neq 0$，若否，则 $\frac{\partial f_0}{\partial u} = 0$，$\frac{\partial f_0}{\partial v} = 0$，$f_0(\cdot)$曲线在 Ouv 坐标系原点就是非正则的. 这时，无法确定 f_0 曲线在 Ouv 原点处的曲率. 设 $\cos\theta \neq 0$，由(2.2.1.7)式，有

$$\kappa_{f_0}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \theta) = \frac{\begin{vmatrix} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} H\tilde{\boldsymbol{\alpha}} & \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} H \tilde{\boldsymbol{N}}_x & 0 \\ \tilde{\boldsymbol{N}}_x^{\mathrm{T}} H\tilde{\boldsymbol{\alpha}} & \tilde{\boldsymbol{N}}_x^{\mathrm{T}} H \tilde{\boldsymbol{N}}_x & \|\nabla f\|\cos\theta \\ 0 & \|\nabla f\|\cos\theta & 0 \end{vmatrix}}{(\|\nabla f\|\cos\theta)^3}$$

由此可得

$$\kappa_{f_0}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \theta) = -\frac{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} H\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\,\|\nabla f\|^2\cos^2\theta}{\|\nabla f\|^3\cos^3\theta} = -\frac{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} H\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}{\|\nabla f\|}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

从而有

$$\kappa_{f_0}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \theta)\cos\theta = \kappa_f(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) \qquad (\text{仅当} \cos\theta \neq 0) \qquad \text{—(2.2.3.11)}$$

将(2.2.3.11)式与(2.2.3.8)式相比较，有

$$\kappa_{f_0}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \theta) = \kappa_x \qquad \text{—(2.2.3.12)}$$

注意，这里曲面 f 上的曲线 $\boldsymbol{x}(t)$是任意给定的. 故有以下定理.

定理 2.2.3.2 设 $\boldsymbol{x}^0$ 是曲面 f 上的一点，L_x 是过 $\boldsymbol{x}^0$ 点的且与 f 相交的超平面，并且 L_x 的法向量与曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的法向量不是正交的. 并设 $\boldsymbol{x}(t)$是经过 $\boldsymbol{x}^0$ 点，位于曲面 f 上的任一曲线. 若 $\boldsymbol{x}(t)$在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的密切平面就是 L_x，那么，曲面 f 在 L_x 上的截面曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的(相对)曲率，就是曲线 $\boldsymbol{x}(t)$在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的曲率. ■

例 2.2.3.1 求 R^4 空间上由以下方程决定的曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的曲率.

$$\boldsymbol{x}(t): \begin{cases} f_1: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \\ f_2: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1 \\ f_3: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_2 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}^0 = (0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$$

解: 选取 $x_3 = t$，有

$$G_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_4 \\ 2x_1 - 1 & 2x_2 & 0 \\ 2x_1 & 2x_2 - 2 & 0 \end{bmatrix}$$

故 $$G_f(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix}0&0&2\\-1&0&0\\0&-1&0\end{bmatrix}\qquad G_f^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&-2&0\\0&0&-2\\1&0&0\end{bmatrix}$$

记
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}x_3}=\left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_3},\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_3},\frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}x_3}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_3}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3},\frac{\partial f_2}{\partial x_3},\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right)^{\mathrm{T}}$$

类似地，有 $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}x_3^2},\frac{\partial^2\boldsymbol{f}}{\partial x_3^2}$.

并且记 $$\nabla^2\tilde{f}_1=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}&\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1\partial x_2}&\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1\partial x_4}\\\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2\partial x_1}&\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}&\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2\partial x_4}\\\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_4\partial x_1}&\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_4\partial x_2}&\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_4^2}\end{bmatrix}$$

类似地有$\nabla^2\tilde{f}_2$、$\nabla^2\tilde{f}_3$.

有 $$\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_3}=\begin{bmatrix}2x_3\\2x_3\\2x_3\end{bmatrix}$$

在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0$ 处

$$\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_3}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\qquad\frac{\partial^2\boldsymbol{f}}{\partial x_3^2}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial G_f}{\partial x_3}=[0]$$

$$\nabla^2\tilde{f}_1=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\qquad\nabla^2\tilde{f}_2=\nabla^2\tilde{f}_3=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

由以上(2.2.2.23)式、(2.2.2.25)式，得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}x_3}=-G_f^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_3}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}x_3}=-G_f^{1}\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial x_3^2}=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$$

有

$$\nabla\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_3}\\\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_3}\\1\\\dfrac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}x_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}x_3^2}\\\dfrac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}x_3^2}\\0\\\dfrac{\mathrm{d}^2x_4}{\mathrm{d}x_3^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\0\\-1\end{bmatrix}$$

由(2.2.2.18)式，并注意到 $\|\nabla\boldsymbol{x}\|=1$，$\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\nabla^2\boldsymbol{x}=0$，得

$$\kappa_x=\|\nabla^2\boldsymbol{x}\|=3$$

此即 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的曲率.

现在，再将 $\boldsymbol{x}(t)$ 看成是 $f_1(\cdot)=0$ 决定的曲面(即 R^4 空间上的单位球面)上的曲线. 作 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的密切平面 L_x，

$$L_x:\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}\dfrac{2}{3}\\\dfrac{2}{3}\\0\\-\dfrac{1}{3}\end{bmatrix}v\qquad u,\ v\in R$$

则 L_x 与 f_1 的交曲线(截面曲线)是

$$f_0: \frac{4}{9}v^2+\frac{4}{9}v^2+u^2+\left(1-\frac{1}{3}v\right)^2=1$$

即

$$f_0: u^2+\left(v-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

可知 f_0 在 $u=v=0$ 处的曲率也就是 $\kappa=3$ [1].

以上已给予由(1.2.1)式给出的曲面 f 上的 $\boldsymbol{x}^0$ 点处法截曲率 $\kappa_f(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})$ 的定义与表达式,并对于 $\kappa_f(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})$ 的符号意义给予了详细说明.

以下再给出 Monge 形式的曲面函数决定的曲面 F 上的法截曲线及法截曲率的计算公式. 由 $F: z=f(\boldsymbol{x})\quad \boldsymbol{x}\in D\subset R^m$,作 $\bar{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, z)^{\mathrm{T}}\in R^{m+1}$ 令

$$F(\bar{\boldsymbol{x}})=z-f(\boldsymbol{x})=0 \qquad —(1.2.8)$$

应当注意 Monge 形式的曲面函数中变元 $\boldsymbol{x}$ 向量的维数在不同场合有不同的表示.

在(1.2.8)式中,$\bar{\boldsymbol{x}}\in R^{m+1}\quad \boldsymbol{x}\in R^m$. 但若在隐函数

$$f(\boldsymbol{x})=0\quad \boldsymbol{x}\in D\subset R^m$$

中,利用 $\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\neq 0$,将其转换成

$$x_m=\tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}})\quad \hat{\boldsymbol{x}}=(x_1, x_2, \cdots, x_{m-1})$$

的 Monge 形式函数时,

$$\hat{\boldsymbol{x}}\in D_{\hat{x}}\subset R^{m-1}$$

由

$$\nabla F(\bar{\boldsymbol{x}})=(-\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}), 1)^{\mathrm{T}} \qquad —(2.2.3.13)$$

对 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}\in R^{m+1}$,作切平面方程

$$\nabla F(\bar{\boldsymbol{x}})\cdot\bar{\boldsymbol{\alpha}}=0 \qquad —(2.2.3.14)$$

易知(2.2.3.14)式的基础解系矩阵,记为 Λ_F,可表示成

$$\Lambda_F=\begin{bmatrix} I_m \\ \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\end{bmatrix} \qquad —(2.2.3.15)$$

故(2.2.3.14)式的解可表示成下式(仍记为 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$),

---

[1] 但显然 f_0 并不是 $\boldsymbol{x}(t)$ 曲线.

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \Lambda_F \boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \nabla f^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{t} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{t} \in R^m \qquad \text{—(2.2.3.16)}$$

并有 F 关于 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的 Hessian 矩阵，记为 H_F

$$H_F = \nabla^2 F(\bar{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} -\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{—(2.2.3.17)}$$

设 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ 是由(2.2.3.16)式给出的 F 曲面的单位切方向向量，$\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\alpha}} = 1$. F 曲面沿 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ 方向的法曲率，记为 $\kappa_F(\bar{\boldsymbol{\alpha}})$. 由(2.2.1.9)式，得

$$\kappa_F(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) = -\frac{\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} H_F \bar{\boldsymbol{\alpha}}}{\| \nabla F \|} = \frac{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} H \boldsymbol{t}}{(1 + \nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{—(2.2.3.18)}$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t} + (\nabla f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t})^2 = 1 \qquad \boldsymbol{t} \in R^m$$

注意这里 $0 < \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t} = 1 - (\nabla f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t})^2 \leqslant 1$.

(2.2.3.18)式即为在(1.2.2)式给出的 Monge 形式的曲面函数下的法截曲率计算公式. 注意与(2.2.1.9)式相比较，(2.2.3.18)式的等号右边没有负号.

由上可见法截平面上的曲面的交曲线的相对曲率，与曲面函数的 Hessian 矩阵决定的二次型有密切关系. 而在§2.1 节中，还指出了本书在非线性规划理论分析中会用到的，关于曲面的 Monge 形式的函数的 Otz 局部坐标系. 为便于比较，一并在此先给出 Monge 形式曲面函数在 Otz 局部坐标系上的相对曲率的公式.

设

$$z = f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$$

是 R^{m+1} 空间上的曲面函数. 作

$$F(\bar{\boldsymbol{x}}) = z - f(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad \bar{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, z) \in R^{m+1}$$

令 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ 是取定的，以下方程

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0$$

的一个特解，且 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = 1$. 作

$$L_z: \begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\alpha} t \\ z' = z^0 + z \end{cases} \qquad (z^0 = f(\boldsymbol{x}^0) \text{ 成立}) \qquad \text{—(2.2.3.19)}$$

则

$$f_z: z + z^0 = f(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\alpha} t) \qquad \text{—(2.2.3.20)}$$

是 L_z 平面上的截面曲线，且 f_z 过$(\boldsymbol{x}^0, z^0)$点. 则在$(\boldsymbol{x}^0, z^0)$点处，由(2.2.3.20)

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \nabla f^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} \nabla^2 f^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}$$

由(2.1.4)式，知 f_z 曲线在($\boldsymbol{x}^0$, z^0)处的曲率 $\kappa_z(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})$，应为

$$\kappa_z(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} \nabla^2 f \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \qquad (\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = 1) \qquad —(2.2.3.21)$$

与(2.2.3.18)式相比较，可知，取(2.2.3.18)式中的 $\boldsymbol{t}$ 就是(2.2.3.21)式中的 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$，是可以的. 那么，此时就有(2.2.3.16)式中

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad —(2.2.3.22)$$

并且

$$\kappa_F(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} H \tilde{\boldsymbol{\alpha}}}{(1 + \nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\kappa_z(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})}{(1 + \nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f)^{\frac{1}{2}}} \qquad —(2.2.3.23)$$

即 $\kappa_F(\bar{\boldsymbol{\alpha}})$与 $\kappa_z(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})$仅相差一个正数倍率. 这个正数倍率刚好就是 L_z 截平面在($\boldsymbol{x}^0$, z^0)点处的法向量

$$\boldsymbol{n}_z = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (\boldsymbol{0} \in R^m)$$

与曲面 F 的法向量

$$\nabla F = (-\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0),\ 1)^{\mathrm{T}}$$

的夹角余弦.

现可以再以 $\boldsymbol{n}_f$ 表示 R^{m+1}空间的曲面

$$f(\boldsymbol{x}) = z^0 \qquad —(2.2.3.24)$$

在($\boldsymbol{x}^0$, z^0)点处的单位法向量. 则有

$$\boldsymbol{n}_f = (\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0),\ 0)^{\mathrm{T}}$$

故

$$\cos\angle(\boldsymbol{n}_f,\ \nabla F) = -\frac{\| \nabla f \|}{\| 1 + \nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f \|}$$

而(2.2.3.24)式决定的曲面，也可以理解是 R^{m+1}上的

$$z = f(\boldsymbol{x})$$

曲面与 $z=z^0$ 平面的交曲线. 此交曲线上,以 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ 为切方向,以 $\boldsymbol{n}_f$ 为法方向的法截曲率就是

$$\kappa_f(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = -\frac{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} H \tilde{\boldsymbol{\alpha}}}{\|\nabla f\|} \qquad -(2.2.1.9)$$

故又成立(仅在由(2.2.3.22)式决定的 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ 条件下)

$$\kappa_F(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) = \kappa_f(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) \cdot \cos\angle(\boldsymbol{n}_f, \nabla F) = -\frac{\|\nabla f\|}{\|1+\nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f\|}\kappa_f(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) \qquad -(2.2.3.25)$$

(2.2.3.23、25)式,显然就是定理 2.2.3.1 的结论. 所以,附带地可知有

$$\kappa_f(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = -\frac{\kappa_z(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})}{\|\nabla f\|} \qquad -(2.2.3.26)$$

(2.2.3.23、25、26)式给出了曲面函数为 Monge 形式时,曲面上的 $\boldsymbol{x}^0$ 点处,以 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ 为切方向,以 $\boldsymbol{n}_f$、$\boldsymbol{n}_z$ 和∇F 为法方向时的截面曲线的曲率间的相互关系.

§2.3 R^m 空间上的曲线及其(局部)标架

§2.3.1 曲线的 Frenet 标架及其手性

由经典微分几何已知,在 R^3 空间上,曲线 $\boldsymbol{x}(s)$完全由其的 Frenet 标架方程式决定. 本节将曲线的这一性质,推广到一般的 R^m 空间上去. 继续沿用上一节中的相关符号,仍设 $\boldsymbol{x}(t) \in R^m$ 是曲线的向量函数. 这里 $\boldsymbol{x}(t)$是正则的,$t \in D_t \subset R$, D_t 是开区间. 使用以下符号

$$\nabla\tilde{\boldsymbol{x}} = \frac{\nabla \boldsymbol{x}}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|}$$

$$\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}$$

$$\vdots$$

推广 $\boldsymbol{x}(t)$是正则且规范的条件

设 $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{a}) \in R^m \quad t \in D_t \subset R$, 其中 $\boldsymbol{a}$ 是参(常)数(向量). 若对 $d=1, 2, \cdots, m-1$, $\nabla^d\tilde{\boldsymbol{x}}$存在且可微,则称 $\boldsymbol{x}(t)$是正则参数曲线,如果 $\boldsymbol{x}(t)$中含有的参(常)数 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots)$ 满足 $a_i > 0$, 则称 $\boldsymbol{x}(t)$是正则且规范的参数曲线. ■

正则条件显然已蕴含了各 $\|\nabla^d x\| \neq 0$ 及可微的条件在内. $\|\cdot\|$ 函数的可微条件是正则参数曲线的基本要求,否则,R^3 空间上的 Frenet 标架及公式均无法推出. 而以上关于 $\|\nabla^d \tilde{x}\|$ 可微的条件,则更加强了这一条件. 以下给出两个例子予以说明.

先可以理解,若 $x(t)=(x_i(t))$ 函数中,$x_i(t)$关于 t 有 $1, 2, \cdots, m$ 阶导数,$t\in D_t$,且 $\|\nabla^d x\| = c_d \quad d=1, 2, \cdots, m-1$,$c_d$ 为常数,那么,以上条件自然是满足的. 如圆柱螺线

$$x(t)=(\gamma\cos\omega t,\ \gamma\sin\omega t,\ h\omega t)^{\mathrm{T}} \quad \gamma>0 \quad \omega=(\gamma^2+h^2)^{-\frac{1}{2}}$$

易知

$$\|\nabla x\| = 1$$

$$\|\nabla^d x\| = \omega^d\gamma \quad d\geqslant 2$$

且 $\cos\omega t$、$\sin\omega t$ 具有任意阶导数,故以上条件成立,且 $D_t=R$. 事实上对于 $x(t)$,任意的 $d>0$,$\nabla^d\tilde{x}$均存在且可微.

另如以下平面曲线

$$x(t)=(\cos^3 t,\ \sin^3 t,\ b)^{\mathrm{T}} \quad t\in D_t \quad b>0$$

易知

$$\|\nabla x\| = 3\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}=\frac{3}{2}\ |\sin 2t|$$

由 $\|\nabla x\|\neq 0$ 及 $\|\nabla x\|$ 的可微性要求,有 $\sin 2t>0$,即

$$t\in D_t=\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

则在 $t\in D_t$ 开区间上,

$$\nabla\tilde{x}=\frac{\nabla x}{\|\nabla x\|}=(-\cos t,\ \sin t,\ 0)^{\mathrm{T}}$$

于是$\nabla\tilde{x}$是可微的,且 $\|\nabla^d\tilde{x}\|=1$,故以上条件是满足的.

以下设 $x(t)$是 $t\in D_t$ 上的正则且规范的参数曲线. 在 § 2.2 节中已给出了 $x(t)$的曲率 κ_x 的公式(2.2.2.8)式. 由于现在 κ_x 的公式中,没有再使用矢量积,故可以直接推广(2.2.2.8)式,从而得到 R^m 空间上的挠率及自然标架[1].

复写出以下关系式

---

〔1〕 之所以只称以下给出的方法确定的是"自然标架"而非"Frenet 标架"是有原因的,可见下文.

$$\nabla\tilde{\boldsymbol{x}} = \frac{\nabla\boldsymbol{x}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|} \qquad \text{—(2.2.2.7)}$$

$$\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}} = \frac{\nabla^2\boldsymbol{x}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|} - \frac{\nabla\boldsymbol{x}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|}\cdot\frac{\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\nabla^2\boldsymbol{x}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2} \qquad \text{—(2.2.2.16)}$$

$$\boldsymbol{\kappa}_x = \frac{\|\nabla^2\boldsymbol{x}\|}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2}(1-\cos^2\theta_{21})^{\frac{1}{2}} \qquad \text{—(2.2.2.13)}$$

这里规定

$$\cos\theta_{21} = \frac{\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\nabla^2\boldsymbol{x}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|\ \|\nabla^2\boldsymbol{x}\|} \qquad \text{—(2.3.1.1)}$$

(2.3.1.1)式也就是(2.2.2.11)式，只不过为方便以下的递推，特意对夹角 θ 加上了双下标“21”，表示 θ_{21} 是 $\boldsymbol{x}(t)$ 的第 2 阶导数向量与第 1 阶导数向量的夹角(下同).

引入以下缩写符号，

$$\boldsymbol{y}_1 = \frac{\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|} \qquad \text{—(2.3.1.2)}$$

且由

$$\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 = 1 \Rightarrow \nabla\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 = 0$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}_1}{\mathrm{d}t} = \nabla\boldsymbol{y}_1 = \frac{\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|} - \frac{\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|}\cdot\frac{\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2} \qquad \text{—(2.3.1.3)}$$

规定

$$\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1 = \nabla\boldsymbol{y}_1 - \frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|}\cdot\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2} \qquad \text{—(2.3.1.4)}$$

由 Schmidt 正交化的方法知，$\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1$ 与$\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}$、$\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}$均是正交的.

规定

$$\boldsymbol{y}_2 = \frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|} \qquad \text{—(2.3.1.5)}$$

可知 $\boldsymbol{y}_2$ 与$\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}$正交，故有

$$\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 = 0$$

对此式求 t 的导数，得

$$\nabla^3 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_2 + \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{y}_2 = 0 \quad \left(\text{其中} \nabla^3 \tilde{\boldsymbol{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}},\ \nabla \boldsymbol{y}_2 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}_2}{\mathrm{d}t}\right)$$

所以

$$\frac{\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}}{\| \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} \|} \cdot \nabla \boldsymbol{y}_2 = -\frac{\nabla^3 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_2}{\| \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} \|} \qquad \text{—(2.3.1.6)}$$

将(2.3.1.4～5)式代入(2.3.1.6)式中的 $\boldsymbol{y}_2$，并整理，可写成以下形式，令

$$\tau_1 = \frac{\nabla^3 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_2}{\| \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} \|} = \frac{\| \nabla^3 \tilde{\boldsymbol{x}} \|^2}{\| \nabla \tilde{\boldsymbol{y}}_1 \| \ \| \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} \|^2} (1 - \cos^2 \theta_{31} - \cos^2 \theta_{32}) \qquad \text{—(2.3.1.7)}$$

其中

$$\begin{cases} \cos \theta_{31} = \dfrac{\nabla \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \nabla^3 \tilde{\boldsymbol{x}}}{\| \nabla \tilde{\boldsymbol{x}} \| \ \| \nabla^3 \tilde{\boldsymbol{x}} \|} \\ \cos \theta_{32} = \dfrac{\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \nabla^3 \tilde{\boldsymbol{x}}}{\| \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} \| \ \| \nabla^3 \tilde{\boldsymbol{x}} \|} \end{cases} \qquad \text{—(2.3.1.8)}$$

注意，在这样的规定中 $\tau_1 \geqslant 0$. 还可有

$$\frac{\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}}{\| \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} \|} \nabla \boldsymbol{y}_2 = -\tau_1 \qquad \text{—(2.3.1.9)}$$

称 τ_1 为 R^m 空间曲线 $\boldsymbol{x}(t)$的 1 阶挠率. 由(2.3.1.7)式，可知 1 阶挠率的几何意义(同时也即是 Schmidt 正交化方法的几何意义)，即以$\nabla \tilde{\boldsymbol{x}}$、$\dfrac{\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}}{\| \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} \|}$ 为方向向量构造过 R^m 空间 $\boldsymbol{x}(t)$点处的二维(子)平面 L_2，这里视 t 已给定，

$$L_2:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) + \nabla \tilde{\boldsymbol{x}} \cdot u_1 + \frac{\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}}{\| \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} \|} \cdot u_2 \qquad u_1,\ u_2 \in R$$

则由于 $\dfrac{\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}}{\| \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} \|}$ 就是 $\boldsymbol{x}(t)$的主法(单位)向量，故 L_2 即 $\boldsymbol{x}(t)$的密切平面. 在 L_2 上，已规定了一个原点在 $\boldsymbol{x}(t)$处的正交坐标系 Ou_1u_2. 则若 $\boldsymbol{x}(t)$就是密切平面上的曲线(从而就是平面曲线)，那么，在 $\boldsymbol{x}(t)$处的$\nabla^3 \tilde{\boldsymbol{x}}$导数向量与 Ou_1u_2 的纵、横坐标轴的夹角余弦的平方和为 1. 但现在 Ou_1u_2 的纵、横坐标轴显然就是以$\nabla \tilde{\boldsymbol{x}}$、

$\dfrac{\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}\|}$ 所决定的有向直线，故$\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}$与 Ou_1u_2 坐标轴的夹角的余弦就是 $\cos\theta_{31}$、$\cos\theta_{32}$. 所以，若

$$\cos^2\theta_{31} + \cos^2\theta_{32} = 1$$

则必有 $\tau_1 = 0$，即 $\boldsymbol{x}(t)$是密切平面上的曲线，若

$$\cos^2\theta_{31} + \cos^2\theta_{32} < 1$$

则 $\tau_1 > 0$，即说明$\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}$方向向量没有落在密切平面上，从而 $\boldsymbol{x}(t)$不可能是密切平面上的曲线. 所以，$\boldsymbol{x}(t)$要是平面上的曲线，则其任一点处的$\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}$必位于密切平面上，必有 $\tau_1 = 0$.

关于 Schmidt 正交化及 Frenet 标架的几何构造，可用下图予以说明. 设有平面上 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 2 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 不是线性相关的，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 不共线. 要利用 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 构造出正交化的 $\boldsymbol{\alpha}'_1$、$\boldsymbol{\alpha}'_2$，可令 $\boldsymbol{\alpha}'_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$，如图 2.3.1.1. 并在 $\boldsymbol{\alpha}'_1$ 决定的射线 β_1 上取一个 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1$ 向量，并使

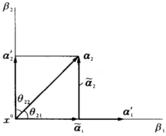


图 2.3.1.1

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1 \text{ 且 } \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2 \perp \boldsymbol{\alpha}'_1$$

再令

$$\boldsymbol{\alpha}'_2 = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2 (\text{平移})$$

即得到从 $\boldsymbol{x}^0$ 点出发的直交向量组 $\boldsymbol{\alpha}'_1$、$\boldsymbol{\alpha}'_2$. 而 $\boldsymbol{\alpha}'_1$、$\boldsymbol{\alpha}'_2$ 决定的射线 β_1、β_2 就构成 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的一个正交标架. 由以上几何关系即知

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} \cdot (\|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cos\theta_{21}) = \frac{\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2}{\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1}\boldsymbol{\alpha}_1$$

故

$$\boldsymbol{\alpha}'_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2}{\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1}\boldsymbol{\alpha}_1$$

这即是 Schmidt 正交化的方法. 由几何意义知

$$\|\boldsymbol{\alpha}'_2\| = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cos\theta_{22} = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \sin\theta_{21}$$

将这里的 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别看成是曲线 $\boldsymbol{x}(t)$上的点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的切方向向量$\nabla\boldsymbol{x}$ 与二阶导数$\nabla^2\boldsymbol{x}$，则由(2.2.2.16)式即得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla\tilde{\boldsymbol{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\nabla\boldsymbol{x}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|} = \nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}} = \frac{\nabla^2\boldsymbol{x} - \nabla\boldsymbol{x}\cdot a}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|}$$

$$a = \frac{\nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{x}}{\| \nabla \boldsymbol{x} \|^2}$$

故$\nabla\tilde{x}$的导数$\nabla^2\tilde{x}$刚好是按 Schmidt 正交化所得到的$\nabla^2\boldsymbol{x}-\nabla\boldsymbol{x}a$ 向量除以 $\|\nabla\boldsymbol{x}\|$ 范数，即$\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\perp\nabla\tilde{x}$. 而由(2.2.2.8)式表明，曲率 κ_x 刚好就是两正交向量$\nabla\boldsymbol{x}$与$\nabla^2\tilde{x}$的范数之比.

再看挠率 τ_1 的几何意义. 由图 2.3.1.2，当对 R^3 空间中的线性无关的 3 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 作 Schmidt 正交化，所得到的 $\boldsymbol{\alpha}_1'$、$\boldsymbol{\alpha}_2'$、$\boldsymbol{\alpha}_3'$ 可决定一个在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的正交标架 β_1、β_2、β_3. 并且 $\boldsymbol{\alpha}_3'$ 可由下式得到

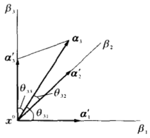


图 2.3.1.2

$$\boldsymbol{\alpha}_3' = \boldsymbol{\alpha}_3 - \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_1'}{\|\boldsymbol{\alpha}_1'\|}\cdot(\|\boldsymbol{\alpha}_3\|\cos\theta_{31}) + \frac{\boldsymbol{\alpha}_2'}{\|\boldsymbol{\alpha}_2'\|}\cdot(\|\boldsymbol{\alpha}_3\|\cos\theta_{32})\right)$$

$$= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3}{(\boldsymbol{\alpha}_1')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1'}\boldsymbol{\alpha}_1' - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3}{(\boldsymbol{\alpha}_2')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2'}\boldsymbol{\alpha}_2'$$

$$\|\boldsymbol{\alpha}_3'\| = \|\boldsymbol{\alpha}_3\|\cos\theta_{33} = \|\boldsymbol{\alpha}_3\|(1-\cos^2\theta_{31}-\cos^2\theta_{32})^{\frac{1}{2}}$$

当将曲线 $\boldsymbol{x}(t)$在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的$\nabla\boldsymbol{x}$、$\nabla\overset{2}{x}$、$\nabla\overset{3}{x}$ 看成是以上的 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 向量，则由$\nabla\boldsymbol{x}\to\nabla\tilde{x}$ 及$\nabla^2\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{y}_1$（见(2.3.1.2)式)，已完成了 $\boldsymbol{\alpha}_1\to\boldsymbol{\alpha}_1'$、$\boldsymbol{\alpha}_2\to\boldsymbol{\alpha}_2'$ 的正交化，而(2.3.1.3～4)式，即是由此再构造出与$\nabla\tilde{x}$、$\nabla^2\tilde{x}$正交的 $\boldsymbol{y}_2$ 向量(见(2.3.1.5)式).

注意，从形式上讲，由(2.3.1.7)式给出的 τ_1 与由(2.2.2.13)式给出的 κ_x 似乎是有差异的，但(由下文的推导可知)由于

$$\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1^{\mathrm{T}}\,\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1 = \frac{\|\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|}(1-\cos^2\theta_{31}-\cos^2\theta_{32})$$

故按(2.3.1.7)式，其实有

$$\tau_1 = \frac{\|\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|}\sin\theta_{33} \qquad \sin\theta_{33} = (1-\cos^2\theta_{31}-\cos^2\theta_{32})^{\frac{1}{2}}$$

—(2.3.1.10)

的关系. 与(2.2.2.13)式相比较，可知，挠率与曲率具有相似的几何意义[1]. 易知，由以上方式构造的挠率 τ_1，相当于经典微分几何中所指挠率的绝对值.

以下继续构造 R^m 空间上的自然标架. 由(2.3.1.5)式，又得到

---

[1] 但为以下推导的方便起见，关于挠率 τ 的公式仍采用(2.3.1.7)式的形式.

$$\boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 = 1$$

从而可以继续递推下去，由上式两边对 t 求导，得

$$\nabla\boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2 = 0$$

$$\nabla\boldsymbol{y}_2 = \frac{\nabla^2\tilde{\boldsymbol{y}}_1}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|} - \frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|}\cdot\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1^{\mathrm{T}}\nabla^2\tilde{\boldsymbol{y}}_1}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|^2} \qquad \text{—(2.3.1.11)}$$

类似地，规定

$$\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_2 = \nabla\boldsymbol{y}_2 - \frac{\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|}\frac{\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^2\tilde{\boldsymbol{y}}_1}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2} - \frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|}\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^2\tilde{\boldsymbol{y}}_1}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2} \qquad \text{—(2.3.1.12)}$$

仍由 Schmidt 正交化方法知，$\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_2$ 与$\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1$、$\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}$、$\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}$均是正交的.

再规定

$$\boldsymbol{y}_3 = \frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_2}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_2\|} \qquad \text{—(2.3.1.13)}$$

则由

$$\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_3 = 0$$

对上式再求 t 的导数，得

$$\nabla^2\tilde{\boldsymbol{y}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_3 + \nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{y}_3 = 0$$

得到

$$\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1^{\mathrm{T}}}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|}\nabla\boldsymbol{y}_3 = -\frac{\nabla^2\tilde{\boldsymbol{y}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_3}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|} \qquad \text{—(2.3.1.14)}$$

将(2.3.1.11～13)式代入(2.3.1.14)式的 $\boldsymbol{y}_3$，并经整理即可令

$$\tau_2 = \frac{\nabla^2\tilde{\boldsymbol{y}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_3}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|} = \frac{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|^2}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_2\|\,\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|^2}(1-\cos^2\theta_{41}-\cos^2\theta_{42}-\cos^2\theta_{43}) \qquad \text{—(2.3.1.15)}$$

其中

$$\begin{cases}\cos\theta_{41} = \dfrac{\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^2\tilde{\boldsymbol{y}}_1}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}\|\,\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|}\\[2ex] \cos\theta_{42} = \dfrac{\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^2\tilde{\boldsymbol{y}}_1}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|\,\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|}\\[2ex] \cos\theta_{43} = \dfrac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1^{\mathrm{T}}\nabla^2\tilde{\boldsymbol{y}}_1}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|\,\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|}\end{cases} \qquad \text{—(2.3.1.16)}$$

并易知

$$\|\nabla\tilde{\mathbf{y}}_2\| = \frac{\|\nabla^2\tilde{\mathbf{y}}_1\|}{\|\nabla\tilde{\mathbf{y}}_1\|}(1-\cos^2\theta_{41}-\cos^2\theta_{42}-\cos^2\theta_{43})^{\frac{1}{2}}$$

故可以有

$$\tau_2 = \frac{\|\nabla^2\tilde{\mathbf{y}}_1\|}{\|\nabla\tilde{\mathbf{y}}_1\|}\sin\theta_{44}$$

$$\sin\theta_{44} = (1-\cos^2\theta_{41}-\cos^2\theta_{42}-\cos^2\theta_{43})^{\frac{1}{2}} \qquad —(2.3.1.17)$$

且知 $\tau_2 \geqslant 0$.

注意$\nabla^2\tilde{\mathbf{y}}_1$ 是对(2.3.1.4)式给出的$\nabla\tilde{\mathbf{y}}_1$ 求关于 t 的导数得到的向量,故$\nabla^2\tilde{\mathbf{y}}_1$中包含的最高阶导数是 $\nabla^4\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla^3\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\nabla^2\tilde{\mathbf{x}}$.

同时亦有

$$\frac{\nabla\tilde{\mathbf{y}}_1^{\mathrm{T}}}{\|\nabla\tilde{\mathbf{y}}_1\|}\nabla\mathbf{y}_3 = -\tau_2 \qquad —(2.3.1.18)$$

称 τ_2 是 $\mathbf{x}(t)$的 2 阶挠率. 2 阶挠率的意义是在 R^m 空间曲线 $\mathbf{x}(t)$给定的 $\mathbf{x}(t)$点处,作 3 维平面[1],

$$L_3:\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) + \nabla\tilde{\mathbf{x}}u_1 + \frac{\nabla^2\tilde{\mathbf{x}}}{\|\nabla^2\tilde{\mathbf{x}}\|}u_2 + \frac{\nabla\tilde{\mathbf{y}}_1}{\|\nabla\tilde{\mathbf{y}}_1\|}u_3 \quad u_1,\ u_2,\ u_3 \in R$$

$$—(2.3.1.19)$$

则在 L_3 平面上同时给出了原点在 $\mathbf{x}(t)$处的正交坐标系 $Ou_1u_2u_3$. 这一坐标系的 3 个坐标轴,分别由$\nabla\tilde{\mathbf{x}}$、$\frac{\nabla^2\tilde{\mathbf{x}}}{\|\nabla^2\tilde{\mathbf{x}}\|}$ 及$\frac{\nabla\tilde{\mathbf{y}}_1}{\|\nabla\tilde{\mathbf{y}}_1\|}$ 决定. 则若 $\mathbf{x}(t)$是 3 维平面上的曲线,则在 $\mathbf{x}(t)$处的$\nabla^2\tilde{\mathbf{y}}_1$ 导数与 $Ou_1u_2u_3$ 坐标轴夹角的余弦平方和

$$\cos^2\theta_{41} + \cos^2\theta_{42} + \cos^2\theta_{43} = 1$$

从而必要有 $\tau_2 = 0$. 否则,$\nabla^2\tilde{\mathbf{y}}_1$ 导数向量必不落在 L_3 平面上,$\mathbf{x}(t)$也就不可能是 3 维平面上的曲线.

然后,再由

$$\mathbf{y}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{y}_3 = 1$$

---

[1] 这里不加区别称 R^3 空间为 3 维平面.

$$\nabla \mathbf{y}_3^{\mathrm{T}} \mathbf{y}_3 = 0$$

$$\vdots$$

可以继续沿用以上方法递推下去，并得到 3 阶、4 阶、…，直到 $m-2$ 阶挠率 τ_3、τ_4、…、τ_{m-2}.

由此，就得到了在 R^m 空间上 $\boldsymbol{x}(t)$ 点处曲线上的 L_m 超平面及 $Ou_1u_2\cdots u_m$ 坐标系. 此坐标系的各轴由相互正交的单位方向向量决定的直线组成，这些单位方向向量即是

$$\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}\|},\ \frac{\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|},\ \frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|},\ \frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_2}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_2\|},\ \cdots,\ \frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_{m-2}}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_{m-2}\|} \qquad \text{—(2.3.1.20)}$$

以(2.3.1.20)式表示的单位正交向量组为基，所得到的就是 $\boldsymbol{x}(t)$ 曲线上的自然标架. 在这一标架上，曲率及 1、2，…，$m-2$ 阶**挠率均取为非负数**.

为此，可以验证以上这一组标准正交基之间存在 Frenet 公式表示的关系，设 t 为弧长参数（$\|\nabla\boldsymbol{x}(t)\|=1$）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla\tilde{\boldsymbol{x}} = \kappa_x\frac{\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|} \qquad \text{—(2.3.1.21)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|} = -\kappa_x\nabla\tilde{\boldsymbol{x}} + \tau_1\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|} \qquad \text{—(2.3.1.22)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|} = -\tau_1\frac{\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|} + \tau_2\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_2}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_2\|} \qquad \text{—(2.3.1.23)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_2}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_2\|} = -\tau_2\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|} + \tau_3\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_3}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_3\|} \qquad \text{—(2.3.1.24)}$$

$$\vdots$$

(2.3.1.21)～(2.3.1.24)式即为曲线自然标架的变动公式. 其中(2.3.1.21)式可直接得到，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla\tilde{\boldsymbol{x}} = \nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}$$

且由于若 t 是弧长参数，$\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}=\nabla^2\boldsymbol{x}$，并由(2.2.2.6)式，$\kappa_x = \|\nabla^2\boldsymbol{x}\|$，故以上关系成立.

将(2.3.1.22)式理解为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|} = a_1\nabla\tilde{\boldsymbol{x}} + a_2\frac{\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|} + \sum_{j=1}^{m-2}a_{j+2}\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_j}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_j\|} \qquad \text{—(2.3.1.25)}$$

其中 $a_i \quad i=1,2,\cdots,m$ 是待定系数. 注意由(2.3.1.3～4)式,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{y}_1=\nabla\boldsymbol{y}_1=\frac{\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|}-\frac{\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|}\cdot\frac{\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2}$$

故

$$\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{y}_1=\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|}\qquad(\because\ \nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}=0)$$

另方面,由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}})=\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}+\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}=0$$

$$\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}=-\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2$$

故

$$\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{y}_1=-\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|=-\kappa_x$$

且由以上的递推知$\nabla\tilde{x}$与$\nabla^2\tilde{x}$及$\nabla\tilde{y}_j \quad j=1,2,\cdots,m-2$ 均是正交的,所以,从(2.3.1.25)式两边用$\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}$ 左乘便得到

$$a_1=-\kappa_x$$

并知 $\nabla\boldsymbol{y}_1\perp\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}$ (见(2.3.1.3)式),且$\nabla^2\tilde{x}$与$\nabla\tilde{x}$及各$\nabla\tilde{y}_j$ 均正交,所以,对(2.3.1.25)式两边用$\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}$ 左乘便有

$$\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{y}_1=0\Rightarrow a_2=0$$

再用 $\dfrac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1^{\mathrm{T}}}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|}$ 左乘(2.3.1.25)式的两边,

由

$$\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1^{\mathrm{T}}}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|}\nabla\boldsymbol{y}_1=\frac{1}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|}\left(\nabla\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}-\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|}\cdot\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\nabla\boldsymbol{y}_1$$

$$=\frac{1}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|}\left(\nabla\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{y}_1-\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{y}_1}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|}\cdot\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2}\right)$$

其中由(2.3.1.3)式,

$$\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{y}_1=\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|}$$

$$\nabla\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{y}_1=\frac{\|\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2}\left(1-\frac{(\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}})^2}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2\|\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2}\right)$$

将以上二式的结果再代入前一式，有

$$\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1^{\mathrm{T}}}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|}\nabla\boldsymbol{y}_1=\frac{\|\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|\,\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2}\left(1-\frac{(\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}})^2}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2\,\|\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2}-\frac{(\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}})^2}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2\,\|\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2}\right)$$

由(2.3.1.7)式，

$$\frac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1^{\mathrm{T}}}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|}\nabla\boldsymbol{y}_1=\tau_1$$

而 $\dfrac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1^{\mathrm{T}}}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|}$ 左乘(2.3.1.25)式的右边的结果，由正交性应为 a_3

故有

$$a_3=\tau_1$$

至于其他的 $\dfrac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_j^{\mathrm{T}}}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_j\|}$ $j=2,3,\cdots,m-2$，左乘(2.3.1.25)等号两边，易知由 $\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_1\perp\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_j^{\mathrm{T}}$ 的关系及(2.3.1.4)式，注意 $\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}\perp\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_j$，故知应有左边是 $\dfrac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_j^{\mathrm{T}}}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_j\|}\nabla\boldsymbol{y}_1=0$，而右边为 a_{j+2}. 故知

$$a_{j+2}=0\qquad j=2,3,\cdots,m-2$$

由此知(2.3.1.22)式成立.

由以上方法，可证(2.3.1.23)式及以下各式均成立.(2.3.1.21～24)式，就是 R^m 空间上曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 的自然标架的变化公式.

简化符号，规定设 $\|\nabla\boldsymbol{x}\|=1$, $\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}=\nabla\boldsymbol{x}$, $\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}=\nabla^2\boldsymbol{x}$

$$\begin{cases}\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}\|},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|},\ \boldsymbol{\gamma}_{2+j}=\dfrac{\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_j}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_j\|}\quad j=1,2,\cdots,m-2\\[2ex]\tau_0=\kappa_x=\dfrac{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}\|}\sin\theta_{22}\\[2ex]\tau_1=\dfrac{\|\nabla^3\tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}\|}\sin\theta_{33}\\[2ex]\tau_j=\dfrac{\|\nabla^2\tilde{\boldsymbol{y}}_{j-1}\|}{\|\nabla\tilde{\boldsymbol{y}}_{j-1}\|}\sin\theta_{(j+2)(j+2)}\quad j=2,3,\cdots,m-2\end{cases}$$

—(2.3.1.26)

即将曲率 κ_x 看成是 0 阶挠率，则(2.3.1.21～24)式可写成为矩阵形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}_1\\\boldsymbol{\gamma}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\gamma}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\tau_0&&&0\\-\tau_0&0&\tau_1&&\\&-\tau_1&0&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&\tau_{m-2}\\0&&&-\tau_{m-2}&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}_1\\\boldsymbol{\gamma}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\gamma}_m\end{bmatrix}$$

$$\tau_j\geqslant 0\quad j=0,1,\cdots,m-2\qquad\text{—(2.3.1.27)}$$

以上导出(2.3.1.27)式的过程较繁琐，但为说明挠率的性质与意义，又是必须的. 从应用上讲，要得到(2.3.1.27)式表示的 Frenet 标架，可直接用 Schmidt 正交化方法，对曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 的 $1\sim m$ 阶导数作正交化而得到.

记曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 的 Wronski 矩阵为[1]

$$D_x=[\nabla\boldsymbol{x},\ \nabla^2\boldsymbol{x},\ \cdots,\ \nabla^m\boldsymbol{x}]$$

由 D_x 矩阵的列向量经 Schmidt 正交化，再经归一化处理，可得到

$$\widetilde{D}_x=[\nabla\boldsymbol{x}_s,\ \nabla^2\boldsymbol{x}_s,\ \cdots,\ \nabla^m\boldsymbol{x}_s]$$

注意，这里指的$\nabla\boldsymbol{x}_s$，$\nabla^2\boldsymbol{x}_s$ 等是已经正交化的且归一化的列向量.

再记

$$\widetilde{D}_x'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{D}_x \text{ 以及 } \widetilde{D}_x^{\mathrm{T}}\widetilde{D}_x=I_m\Rightarrow(\widetilde{D}_x')^{\mathrm{T}}\widetilde{D}_x+\widetilde{D}_x^{\mathrm{T}}\widetilde{D}_x'=[0]$$

则

$$\frac{1}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|}(\widetilde{D}_x')^{\mathrm{T}}\widetilde{D}_x=-\frac{1}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|}\widetilde{D}_x^{\mathrm{T}}\widetilde{D}_x'$$

$$=\begin{bmatrix}0&\tau_0&&&0\\-\tau_0&0&\tau_1&&\\&-\tau_1&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&\tau_{m-2}\\0&&&-\tau_{m-2}&0\end{bmatrix}\qquad\text{—(2.3.1.28)}$$

就得到(2.3.1.27)式等号右边的系数矩阵.

---

[1] 这里所指的 Wronski 矩阵，在文献上常称为 Wronski 行列式，相当于 $|D_x^{\mathrm{T}}|$ 的意义.

对于 $\boldsymbol{x}(t)$ 曲线函数中，当 t 是弧长参数时，(2.3.1.28)式中 $\|\nabla\boldsymbol{x}\|=1$，则其形式上就是人们熟知的 Frenet 标架. 而当 t 不是弧长参数时，$\|\nabla\boldsymbol{x}\|\neq 1$，故这一因子不能忽视. 之所以出现 $\|\nabla\boldsymbol{x}\|^{-1}$ 因子，可利用以下方式予以说明.

以上述符号的意义，

$$\nabla\boldsymbol{x}_s=\frac{\nabla\boldsymbol{x}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{x}_s=\frac{\nabla^2\boldsymbol{x}-\dfrac{\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{x}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2}\cdot\nabla\boldsymbol{x}}{\left\|\nabla^2\boldsymbol{x}-\dfrac{\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{x}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2}\cdot\nabla\boldsymbol{x}\right\|}$$

$$\left\|\nabla^2\boldsymbol{x}-\frac{\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{x}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2}\nabla\boldsymbol{x}\right\|=\left(\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2\boldsymbol{x}-\frac{(\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{x})^2}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla^2\boldsymbol{x}_s=&\left(\nabla^3\boldsymbol{x}-\frac{\nabla^3\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{x}+\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2\boldsymbol{x}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2}\cdot\nabla\boldsymbol{x}\right.\\&\left.-\frac{\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{x}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2}\nabla^2\boldsymbol{x}+2\frac{(\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{x})^2}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^4}\nabla\boldsymbol{x}\right)\cdot\\&\cdot\left(\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2\boldsymbol{x}-\frac{(\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{x})^2}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\nabla^2\boldsymbol{x}-\frac{\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{x}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2}\nabla\boldsymbol{x}\right)\cdot\\&\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2\boldsymbol{x}-\frac{(\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{x})^2}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\end{aligned}$$

则由(2.3.1.28)式、(2.2.2.18)式考虑

$$\begin{aligned}\nabla\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla^2\boldsymbol{x}_s&=\frac{\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla^3\boldsymbol{x}-\nabla^3\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{x}-\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2\boldsymbol{x}-\dfrac{(\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{x})^2}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2}+2\dfrac{(\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{x})^2}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|\cdot\left(\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2\boldsymbol{x}-\dfrac{(\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{x})^2}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\\&=-\frac{1}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|}\left(\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2\boldsymbol{x}-\frac{(\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{x})^2}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2}\right)^{\frac{1}{2}}\\&=-\|\nabla\boldsymbol{x}\|\cdot\kappa_x\end{aligned}$$

故

$$\kappa_x=-\frac{1}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|}\nabla\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla^2\boldsymbol{x}_s$$

即知应有 $\|\nabla\boldsymbol{x}\|^{-1}$ 因子出现在(2.3.1.28)式的左边.

由于现在这样得到 τ_j 全部恒为正的，故(2.3.1.27)式还不同于 Frenet 标

架.由以下关于 R^m 空间上的多重矢量积算法分析中[1],有关任取一组

$$z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}, n$$

单位正交基向量组,只需选取 n 或 $-n$,即可确定 $(z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}, n)$ 构造的坐标系与标准坐标系 $(e_1, e_2, \cdots, e_m)$ 的方向性是否一致.这里的 e_i 是单位矩阵 I_m 的第 i 列向量.这里的意思是说,选取

$$(z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}, n) \text{ 或 } (z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}, -n)$$

中的一个,总能使 $(e_1, e_2, \cdots, e_m)$ 标准坐标系经适当的旋转与之重合.在这个意义上说,上述两个正交坐标系中,总可以取到其中的 1 个是右手性的坐标系.具体的理由可见以下分析.这里仅简单地说明一下.

从坐标变换的观点看这一问题,有

$$[z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}, n]t \Leftrightarrow [e_1, e_2, \cdots, e_m]s \qquad t, s \in R^m$$

其中 t, s 是 R^m 空间上任一(非 $\mathbf{0}$)点在所指的以上 2 个基向量组上的坐标值.则 t, s 间的变换矩阵,就应是 2 个基向量组间的过渡矩阵,记为

$$Z_n^+ = [z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}, n]^{\mathrm{T}}$$

如果 $|Z_n^+| = 1$,则 $(z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}, n)$ 构造的坐标系就是右手性的,否则,取

$$Z_n^- = [z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}, -n]^{\mathrm{T}}$$

则 $|Z_n^-| = 1$,即 $(z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}, -n)$ 就是右手性的.二者必居其一.

这样,只需选取 $\pm n$ 的符号,就可决定 $(z_1, z_2, \cdots, z_m, \pm n)$ 归一化的正交基向量组的手性[2].更一般地,对任取的一组单位正交基向量组

$$(z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}, z_m)$$

则取出 z_i 中的任一个 z_k $\quad 1 \leqslant k \leqslant m$,则用 z_k 或 $-z_k$,总能与其他的 $m-1$ 个 z_i 向量构造出所谓右手性的坐标系.

当然,也可以选取更多的 z_{i_j},事实上是只要选取 $z_{i_1}, z_{i_2}, \cdots, z_{i_k}$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$,且 k 是奇数,则 $z_{i_1}, \cdots, z_{i_k}$ 或 $-z_{i_1}, \cdots, -z_{i_k}$ 两种取法中,总只有一种可以使 z_{i_j} 与其余的 $m-k$ 个 z_i 共同构造出右手性的正交坐标系.但对 $k > 1$ 时,如何选取 z_{i_j} 向量组缺少充足的理由.故以下只考虑 $k = 1$ 的情形.

但这即同时意味着,在以上(2.3.1.27)式给出的自然标架中,只能对 τ_j, $j = 0, 1, \cdots, m-2$ 即 $m-1$ 个 τ_j 系数中的 1 个给予符号选取,而对于其余的

[1] 以下内容可以在读完 R^m 空间上的多重矢量积算法后再来阅读.

[2] 这里涉及到的就是 R^m 空间上的任一组 $m-1$ 个向量组成的单位正交向量组 z_i, $i = 1, \cdots, m-1$ 均可看成是右手性的性质.见下文.

$m-2$ 个 τ_j 系数，只能选为正数(按方便性要求).

这即是说，按 R^3 空间上曲线的 Frenet 标架的关于 τ 挠率的符号选取的规定性，在按以上方式得到的(2.3.1.27)式的单位正交基向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_m$ 后，若这一基向量组的行列式

$$|\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_m| = 1$$

则 $\tau_j > 0$, $j = 0, 1, \cdots, m-2$. 否则，用 $-\boldsymbol{\gamma}_m$ 代替 $\boldsymbol{\gamma}_m$，并用 $-\tau_{m-2}$ 代替 τ_{m-2}，就可以得到仍然满足(2.3.1.27)式的同时又是右手性的标架系. 按以上规定具有符号选取规则的(2.3.1.27)式给出的标架系，即可称为是 R^m 空间上的 **Frenet 标架**.

当然，更方便的处理是在得到了前 $m-1$ 个 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{m-1}$ 向量后，直接利用下文将要介绍的 R^m 空间上的多重矢量积算法，确定

$$\boldsymbol{\gamma}_m = \boldsymbol{\gamma}_1 \times \boldsymbol{\gamma}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{\gamma}_{m-1}$$

则这样得到 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{m-1}, \boldsymbol{\gamma}_m$ 基向量组保证是右手性的，并由此，同时可确定 τ_{m-2} 的符号.

由此，可称 Frenet 标架中的挠率 τ_{m-2} 为传统意义上的"挠率"，而称 τ_0, $\tau_1, \cdots, \tau_{m-3} > 0$ 的这些系数为 1 阶，2 阶，$\cdots$，$m-2$ 阶(绝对)挠率. 当然，反过来称谓也是可以的. 例如传统意义上的(绝对)曲率 κ_r 不妨也可以认为是曲线随其参数 s(或 t)的增加而偏离其切线的速率，故具有挠率的意义.

由各阶挠率的几何意义及 Schmidt 正交化的构造即可得到以下推论.

推论 2.3.1.1 对于 R^m 空间上的曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ $t \in D_t \subset R$，若其第 k 阶挠率中的

$$\sum_{j=1}^{k+1} \cos^2 \theta_{(k+2)j} = 1 \qquad t \in D_t$$

则挠率 $\tau_k = \tau_{k+1} = \cdots = \tau_{m-2} = 0$ ■

因为此时 $\boldsymbol{x}(t)$一定是 R^m 空间中的 k 维子空间上的曲线. 若 $\boldsymbol{x}(t)$是 R^m 空间上的 $k < m$ 维子空间上的曲线，那么，$\boldsymbol{x}(t)$的标架的系数矩阵的 τ_j $j = 0, 1, \cdots, k-2$ 系数全部为正数的. 即此标架只能是 k 维的自然标架. 因为 R^m 空间中，任取的 $k < m$ 个正交的向 $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_k$ 构造的坐标系，都可视之为是右手性的(见下文分析).

由于曲线 $\boldsymbol{x}(t) \in R^m$ 的 Frenet 标架是由 $\boldsymbol{x}(t)$的第 $1 \sim m$ 阶导数向量经 Schmidt 正交化和归一化所得到的，而 Schmidt 正交化之所以可行的充要条件是正交化的 m 个向量应是线性无关的. 所以，可得到 Frenet 标架的存在性条件.

推论 2.3.1.2 $\boldsymbol{x}(t) \in R^m$ 是一个曲线函数. 当且仅当 $\boldsymbol{x}(t)$的第 $1 \sim m$ 阶导数向量是线性无关的，$\boldsymbol{x}(t)$的 Frenet 标架存在且唯一. ■

若 $\boldsymbol{x}(t)$ 的第 $k+1$ 阶导数 $\nabla^{k+1}\boldsymbol{x}$ 与 $\nabla^{k}\boldsymbol{x}$ 线性相关，则由以上的分析即知 $\tau_{k+1}=\tau_{k+2}=\cdots=\tau_{m-2}\equiv 0$，即曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 必只能是 R^{m} 空间的 k 维子空间上的曲线. 从而只能构造出 $\tau_{j}>0$, $j=0,1,\cdots,k-2$ 形式的 k 维子空间上的自然标架.

§ 2.3.2 曲线 Frenet 标架的极值意义

在经典微分几何的曲面论中，曲面任一（正则）点处曲率的极值（极大或极小值）是非常重要的特征量. 而建立曲线上任一正则点处的局部（正交）标架系，无疑可以有无穷多个选择. 如果所有这些标架系没有哪一个有特别的意义，那么，它们在选择上就只能是平权的. 但是，如果其中有唯一的一个标架系，它在关于曲线的曲率、挠率的极值分析中具有极值意义，那么，情况就完全不同了. 如本节以下分析所要表明的那样，Frenet 标架以及以上给出的自然标架系，刚好就是这样一个具有极值意义的标架系. 正因如此，曲线的几何性状，在这样的极值意义的标架系中，可以得到最简洁明了的表示.

设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)\quad s\in D\subset R\quad \boldsymbol{x}\in R^{m}$

$$\|\nabla\boldsymbol{x}(s)\|=1\qquad s\in D$$

是 R^{m} 空间上的正则参数曲线函数. s 是弧长参数.

由于 $\nabla\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{x}(s)$ 的单位切方向向量，则

$$L_{\pi}:\ \nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0 \qquad —(2.3.2.1)$$

的解，给出了 $\nabla\boldsymbol{x}$ 的法空间（正交补空间）. 利用前面的符号，记

$$\Pi_{x}(s)=\begin{bmatrix} & I_{(m-1)} & & \\ -\dfrac{\dot{x}_{1}}{\dot{x}_{m}}, & -\dfrac{\dot{x}_{2}}{\dot{x}_{m}}, & \cdots, & -\dfrac{\dot{x}_{m-1}}{\dot{x}_{m}}\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}\dot{x}_{i}=\dfrac{\mathrm{d}x_{i}(s)}{\mathrm{d}s}\\ \dot{x}_{m}\neq 0\end{matrix} \qquad —(2.3.2.2)$$

是 (2.3.2.1) 式的 $m\times(m-1)$ 阶基础解系矩阵. 则 $\nabla\boldsymbol{x}$ 法空间中的任一非 0 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 均可表成

$$\boldsymbol{\beta}=\Pi_{x}(s)\cdot\boldsymbol{u}\qquad \boldsymbol{u}\in R^{m-1}\quad(\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}) \qquad —(2.3.2.3)$$

任取一个 $s^{0}\in D$，规定以下涉及的 $\boldsymbol{x}(s)$ 的各阶导数均在 $s=s^{0}$ 处取值. 作

$$\breve{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u})=\frac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|}=\frac{\Pi_{x}\boldsymbol{u}}{(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\Pi_{x}^{\mathrm{T}}\Pi_{x}\boldsymbol{u})^{\frac{1}{2}}} \qquad —(2.3.2.4)$$

$\breve{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u})$ 是由参数（向量）$\boldsymbol{u}$ 决定的、关于 $\nabla\boldsymbol{x}$ 的单位法方向向量.

利用 $\nabla\boldsymbol{x}$、$\breve{\boldsymbol{\beta}}$ 构造 R^{m} 中的一个 2 维平面 Oph，

$$Oph = \{\boldsymbol{x}(p, h) \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s^0) + \nabla\boldsymbol{x} \cdot p + \widetilde{\boldsymbol{\beta}} \cdot h \quad p, h \in R\} \qquad \text{—(2.3.2.5)}$$

Oph 是原点在 $\boldsymbol{x}(s^0)$ 处的(局部)正交坐标系.

可将曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 投影到 Oph 坐标平面上去. 如下图,设 a 是 $\boldsymbol{x}(s)$ 上的 b 点在坐标轴 $\nabla\boldsymbol{x}p$ 上的投影点,则 a 点可按下式决定,即对应 a 点的 p 是

$$p = \overline{ac} = \overline{bc} \cdot \cos\theta$$

$$\overline{bc} = \| \boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}(s^0) \|$$

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}(s^0))^{\mathrm{T}} \cdot \nabla\boldsymbol{x}}{\| \boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}(s^0) \| \cdot \| \nabla\boldsymbol{x} \|}$$

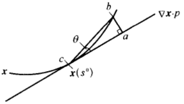


图 2.3.2.1

所以

$$p = p(s) = (\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}(s^0))^{\mathrm{T}} \nabla\boldsymbol{x}(s^0) \qquad \text{—(2.3.2.6)}$$

类似地,可以得到 b 点在 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}h$ 坐标轴上的投影点对应的 h 由下式决定

$$h = h(s, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}(s^0))^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u}) \qquad \text{—(2.3.2.7)}$$

求 p, h 关于 s 的一、二阶偏导数,并在 s^0 处取值,有

$$\dot{p} = \nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0)\nabla\boldsymbol{x}(s^0) = 1$$

$$\ddot{p} = \nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0)\nabla\boldsymbol{x}(s^0) = 0$$

$$\dot{h} = \nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0)\widetilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u}) = 0$$

$$\ddot{h} = \nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0)\widetilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u})$$

注意到 $\boldsymbol{x}(s)$ 在 Oph 上的投影曲线

$$\begin{cases} p = p(s) \\ h = h(s, \boldsymbol{u}) \end{cases}$$

是 s 参数决定的平面曲线. 由平面曲线的相对曲率的定义,投影曲线在 $s = s^0$ 处的相对曲率(记为 κ_s)的公式(2.1.9)式

$$\kappa_s = \kappa_s(s^0, \boldsymbol{u}) = \frac{\ddot{h}}{\dot{p}^2} = \nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0)\widetilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u}) \qquad \text{—(2.3.2.8)}$$

现在可以求 κ_s 关于 $\boldsymbol{u}$ 的极值,即求解以下无约束极值规划

$$\text{极值 } L = \nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0)\widetilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u}) \qquad \text{—(2.3.2.9)}$$

由极值的一阶充要条件，应有

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}} = \nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0)\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0} \qquad \text{—(2.3.2.10)}$$

现记 $\boldsymbol{\pi}^j$ 是基础解系矩阵 Π_x 的第 j 列向量.

$$\Pi_x = [\boldsymbol{\pi}^1, \boldsymbol{\pi}^2, \cdots, \boldsymbol{\pi}^{m-1}]$$

$$\Pi_x^{\mathrm{T}}\Pi_x = [(\boldsymbol{\pi}^i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}^j]$$

则由(2.3.2.4)式，

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\beta}}}{\partial u_k} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}\|}(\boldsymbol{\pi}^k - \tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}^k) \qquad k = 1, 2, \cdots, m-1 \qquad \text{—(2.3.2.11)}$$

并且，由 $\boldsymbol{\pi}^k$ 与 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 的关系，以及 Π_x 是列满秩矩阵，可知

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\beta}}}{\partial u_k} \neq 0$$

将(2.3.2.11)式写成矩阵形式，并用$\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 左乘等号两边，

$$\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0)\cdot\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\beta}}}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}\|}(\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0)\Pi_x - \nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0)\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\Pi_x) = \boldsymbol{0}$$

所以，极值条件下的 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 记为 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}^*$ 以及对应的 $\boldsymbol{u}^*$，则应有

$$\Pi_x^{\mathrm{T}}\nabla^2 \boldsymbol{x}(s^0) = \nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0)\tilde{\boldsymbol{\beta}}^*\cdot\Pi_x^{\mathrm{T}}\Pi_x\frac{\boldsymbol{u}^*}{\|\boldsymbol{\beta}^*\|}$$

因为 $\nabla^2 \boldsymbol{x}(s^0)\tilde{\boldsymbol{\beta}}^* \neq 0$，$|\Pi_x^{\mathrm{T}}\Pi_x| \neq 0$，故从上式中可解出 $\boldsymbol{u}^*$

$$\frac{\boldsymbol{u}^*}{\|\boldsymbol{\beta}^*\|} = [\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0)\tilde{\boldsymbol{\beta}}^*]^{-1}\cdot[\Pi_x^{\mathrm{T}}\Pi_x]^{-1}\Pi_x^{\mathrm{T}}\nabla^2 \boldsymbol{x}(s^0) \qquad \text{—(2.3.2.12)}$$

用 Π_x 矩阵左乘(2.3.2.12)式的两边，并由(2.3.2.4)式，得

$$\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0)\tilde{\boldsymbol{\beta}}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{\beta}}^* = \Pi_x[\Pi_x^{\mathrm{T}}\Pi_x]^{-1}\Pi_x^{\mathrm{T}}\nabla^2 \boldsymbol{x}(s^0) \qquad \text{—(2.3.2.13)}$$

再用$\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 左乘上式等号的两边，得

$$\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0)\tilde{\boldsymbol{\beta}}^* = \pm(\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\Pi_x[\Pi_x^{\mathrm{T}}\Pi_x]^{-1}\Pi_x^{\mathrm{T}}\nabla^2 \boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}} \qquad \text{—(2.3.2.14)}$$

将此结果代回到(2.3.2.13)式，得

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}^* = \pm\frac{\Pi_x[\Pi_x^{\mathrm{T}}\Pi_x]^{-1}\Pi_x^{\mathrm{T}}\nabla^2 \boldsymbol{x}}{(\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\Pi_x[\Pi_x^{\mathrm{T}}\Pi_x]^{-1}\Pi_x^{\mathrm{T}}\nabla^2 \boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{—(2.3.2.15)}$$

由(2.3.2.2)式，不加推导，直接写出以下结果，

$$\begin{cases} \Pi_x^{\mathrm T}\Pi_x = I_{(m-1)} + \left[\dfrac{\dot x_i \dot x_j}{\dot x_m^2}\right] \\ |\Pi_x^{\mathrm T}\Pi_x| = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{\dot x_i}{\dot x_m}\right)^2 \\ [\Pi_x^{\mathrm T}\Pi_x]^{-1} = \dfrac{1}{|\Pi_x^{\mathrm T}\Pi_x|}\left(|\Pi_x^{\mathrm T}\Pi_x|\cdot I_{(m-1)} - \left[\dfrac{\dot x_i \dot x_j}{\dot x_m^2}\right]\right) = \dfrac{[\Pi_x^{\mathrm T}\Pi_x]^*}{|\Pi_x^{\mathrm T}\Pi_x|} \\ [\Pi_x^{\mathrm T}\Pi_x]^* = |\Pi_x^{\mathrm T}\Pi_x|\cdot I_{(m-1)} - \left[\dfrac{\dot x_i \dot x_j}{\dot x_m^2}\right] \end{cases}$$

—(2.3.2.16)

$[\cdot]^*$ 是伴随矩阵.

利用(2.3.2.16)式，可将 $\Pi_x[\Pi_x^{\mathrm T}\Pi_x]^{-1}\Pi_x^{\mathrm T}$ 表成以下形式，

$$\Pi_x[\Pi_x^{\mathrm T}\Pi_x]^{-1}\Pi_x^{\mathrm T} = \frac{1}{|\Pi_x^{\mathrm T}\Pi_x|}\begin{bmatrix} & -\dfrac{\dot x_1}{\dot x_m} \\ [\Pi_x^{\mathrm T}\Pi_x]^* & \vdots \\ & -\dfrac{\dot x_{m-1}}{\dot x_m} \\ -\dfrac{\dot x_1}{\dot x_m}, \cdots, -\dfrac{\dot x_{m-1}}{\dot x_m}, & \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{\dot x_i}{\dot x_m}\right)^2 \end{bmatrix} \quad —(2.3.2.17)$$

由此可知(2.3.2.15)式右边分子部分(是 m 维向量)的第 k 个分量 ($1 \leqslant k \leqslant m-1$) 是

$$\frac{1}{|\Pi_x^{\mathrm T}\Pi_x|}\left(|\Pi_x^{\mathrm T}\Pi_x|\cdot \ddot x_k - \frac{\dot x_k}{\dot x_m^2}\sum_{j=1}^{m-1}\dot x_j \ddot x_j - \frac{\dot x_k}{\dot x_m}\ddot x_m\right) = \ddot x_k$$

$$k = 1, 2, \cdots, m-1$$

并且，第 m 个分量是

$$\frac{1}{|\Pi_x^{\mathrm T}\Pi_x|}\left(-\frac{1}{\dot x_m}\sum_{j=1}^{m-1}\dot x_j \ddot x_j + \ddot x_m \sum_{j=1}^{m-1}\left(\frac{\dot x_j}{\dot x_m}\right)^2\right) = \ddot x_m$$

所以，(2.3.2.15)式可表示成

$$\tilde{\boldsymbol\beta}^* = \pm\frac{\nabla^2\boldsymbol x}{(\nabla^2\boldsymbol x^{\mathrm T}\,\nabla^2\boldsymbol x)^{\frac12}} = \pm\frac{\nabla^2\boldsymbol x}{\|\nabla^2\boldsymbol x\|} \quad —(2.3.2.18)$$

最终便知，由(2.3.2.8)式，$\boldsymbol x(s)$的投影曲线的极值(相对)曲率是

$$\kappa_s^* = \pm \|\nabla^2 \boldsymbol{x}\| \qquad \text{—}(2.3.2.19)$$

(2.3.2.18～19)式即表明了，在以弧长为参数的曲线函数形式下，$\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}$ 所给出的法方向，是曲线的极值法方向，即主法方向.

规定在任一法方向 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 上，R^m 空间曲线的(绝对)曲率 $\kappa_x(\tilde{\boldsymbol{\beta}})$ 是曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 在 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 决定的切平面

$$L_{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s) + \nabla \boldsymbol{x} \cdot u_1 + \tilde{\boldsymbol{\beta}} \cdot u_2 \qquad u_1,\ u_2 \in R$$

上的投影曲线的(相对)曲率(绝对值)度量. 则主法方向的意义即是在 $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \pm \dfrac{\nabla^2 \boldsymbol{x}}{\|\nabla^2 \boldsymbol{x}\|}$ 时，投影曲线的(相对)曲率的绝对值取到极值. 故密切平面(即 $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \tilde{\boldsymbol{\beta}}^*$ 所决定的 $L_{\tilde{\beta}}$平面)就是投影曲线的(相对)曲率能够取到极值的那个切平面.

当取

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_+^* = \frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}}{\|\nabla^2 \boldsymbol{x}\|} \Rightarrow \kappa_s^* = \|\nabla^2 \boldsymbol{x}\| > 0$$

反之，当取

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_-^* = -\frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}}{\|\nabla^2 \boldsymbol{x}\|} \Rightarrow \kappa_s^* = -\|\nabla^2 \boldsymbol{x}\| < 0$$

取 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_+^*$ 时，给出了 κ_s 的极大值，取 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_-^*$ 时则给出极小值. 这可以通过对(2.3.2.10)式求$\dfrac{\partial}{\partial u_h}$偏导数得到的二阶判断条件得知.

有

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{u}^2} = -\frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{\beta}}}{\|\tilde{\boldsymbol{\beta}}\|^2} \Pi_x^{\mathrm{T}} [I_m - \tilde{\boldsymbol{\beta}} \tilde{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}] \Pi_x \qquad \text{—}(2.3.2.20)$$

因为 $\|\tilde{\boldsymbol{\beta}}\| = 1$ 所以 $I_m - \tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}$ 是(半)正定的，从而

$$\Pi_x^{\mathrm{T}} [I_m - \tilde{\boldsymbol{\beta}} \tilde{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}] \Pi_x$$

(半)正定，所以，当 $\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{\beta}}_+^* > 0 \Rightarrow \kappa_s^* = \|\nabla^2 \boldsymbol{x}\|$ 为极大值，反之则为极小值.

因此，取

$$\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} = \frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}}{\|\nabla^2 \boldsymbol{x}\|}$$

作为与$\nabla \boldsymbol{x}$ 正交的局部标架系的一个坐标轴，等价于说取$\nabla \boldsymbol{x}$ 的一个法方向，使得由这一法方向与$\nabla \boldsymbol{x}$ 所决定的切平面上，$\boldsymbol{x}(s)$的投影曲线的曲率，是 $\boldsymbol{x}(s)$所有的切平面上的投影曲线(族)曲率中的极大值.

注意到以上推导中出现的形如

$$\Pi_x[\Pi_x^T\Pi_x]^{-1}\Pi_x^T$$

的矩阵，其实是一个正投影矩阵，所以，也可以从正投影矩阵的性质上，对以上推导给予一个说明.

设 $A\in R^{m\times n}$ 是 $m\times n$ 阶列满秩实矩阵. 则其对应的正投影矩阵记为 P

$$P=A[A^TA]^{-1}A^T \qquad P\in R^{m\times m}$$

显然，总成立

$$PA=A \qquad A^TP=A^T$$

以 A 的列向量组为基，作向量

$$\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{u}\in R^n$$

则所有这样的 $\boldsymbol{x}$(其全体即为 A 的列空间值域)在 P 矩阵的投影变换下是到自身的投影.

$$P\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$$

故知 P 的特征值为 1 或 0. 对这样的向量 $\boldsymbol{x}$，P 矩阵类似一个单位矩阵.

现曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 的切向量是 $\nabla\boldsymbol{x}$，而 $\Pi\in R^{m\times(m-1)}$ 是 $\nabla\boldsymbol{x}$ 的正交补空间的一组基向量为列向量组所组成的矩阵. 仍记

$$P=\Pi[\Pi^T\Pi]^{-1}\Pi^T \qquad \text{—(2.3.2.20a)}$$

是 Π 所构造的正投影矩阵. 显然，P 应将 $\nabla\boldsymbol{x}$ 的正交补空间投影到自身. 因而，由

$$\nabla^2\boldsymbol{x}^T\cdot\nabla\boldsymbol{x}=0$$

故 $\nabla^2\boldsymbol{x}$ 是 $\nabla\boldsymbol{x}$ 的正交补空间中的一个向量，所以总有

$$P\cdot\nabla^2\boldsymbol{x}=\nabla^2\boldsymbol{x}$$

这即是能够得到(2.3.2.18)式结果的几何原理.

以下，再考虑曲线 $\boldsymbol{x}(s)\in R^m \quad m>3$ 时，一阶挠率 τ_1 的极值意义. s 仍为弧长参数，取 $s=s^0$，$\nabla\boldsymbol{x}$、$\nabla^2\boldsymbol{x}$ 均在 $s=s^0$ 处取值.

现记 $\boldsymbol{\beta}$ 是以下方程组的解

$$\begin{cases}\nabla\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{\beta}=0\\ \nabla^2\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}^T\boldsymbol{\beta}=0 \qquad \left(\nabla^2\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}=\dfrac{\nabla^2\boldsymbol{x}}{\|\nabla^2\boldsymbol{x}\|}\right)\end{cases} \qquad \text{—(2.3.2.21)}$$

记 Π_x^1 是(2.3.2.21)式的任一个基础解系矩阵，并记

$$\boldsymbol{\beta}=\Pi_x^1\boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{v}\in R^{m-2} \qquad (\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}) \qquad \text{—(2.3.2.22)}$$

这里假设 $\|\nabla^2\boldsymbol{x}\|\neq 0$. 则 $\nabla\boldsymbol{x}$、$\nabla^2\boldsymbol{x}$ 向量组的正交补空间中的单位向量 $\boldsymbol{n}$，可

表成

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{v}) = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|} = \frac{\Pi_x^1 \boldsymbol{v}}{(\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} (\Pi_x^1)^{\mathrm{T}} \Pi_x^1 \boldsymbol{v})^{\frac{1}{2}}} \quad —(2.3.2.23)$$

对任一 $\boldsymbol{v}$,可构造过 $\boldsymbol{x}(s^0)$点一个 3 维子空间 $Ophq$

$$Ophq = \{\boldsymbol{x}(p, h, q) \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s^0) + \nabla \boldsymbol{x}(s^0) \cdot p + \nabla^2 \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}(s^0) \cdot h + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{v}) \cdot q\} \quad —(2.3.2.24)$$

$\boldsymbol{x}(s)$在 $Ophq$ 空间上的投影曲线记为$\hat{\boldsymbol{x}}$,则$\hat{\boldsymbol{x}}$应满足以下条件

$$\min \quad L = (\boldsymbol{x}(s) - \hat{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{x}(s) - \hat{\boldsymbol{x}}) \quad —(2.3.2.25)$$

取

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}(s^0) + \nabla \boldsymbol{x} \cdot p + \nabla^2 \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}} \cdot h + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{v}) \cdot q \quad —(2.3.2.26)$$

由此,由极值条件,从

$$\frac{\partial L}{\partial p} = 0 \Rightarrow p = p(s) = (\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}(s^0))^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{x}(s^0) \quad —(2.3.2.27)$$

类似地,可以得到

$$h = h(s) = (\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}(s^0))^{\mathrm{T}} \nabla^2 \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}(s^0) \quad —(2.3.2.28)$$

$$q = q(s, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}(s^0))^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{v}) \quad —(2.3.2.29)$$

故现在 $\boldsymbol{x}(s)$在 $Ophq$ 上的投影曲线是

$$\begin{cases} p = p(s) \\ h = h(s) \\ q = q(s, \boldsymbol{v}) \end{cases}$$

求取 p, h, q 关于 s 的一、二、三阶(偏)导数并在 $s = s^0$ 处取值,有

$$\dot{p} = \nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{x} = 1 \quad \ddot{p} = \nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{x} = 0 \quad \dddot{p} = \nabla^3 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{x}$$

$$\dot{h} = \nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2 \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}} = 0 \quad \ddot{h} = \nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2 \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \|\nabla^2 \boldsymbol{x}\| \quad \dddot{h} = \nabla^3 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2 \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}$$

$$\dot{q} = \nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n} = 0 \quad \ddot{q} = \nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n} = 0 \quad \dddot{q} = \nabla^3 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}$$

利用这些结果再由 3 维空间上曲线挠率的定义,$\boldsymbol{x}(s)$曲线在 $Ophq$ 子空间上的投影曲线的挠率的极值,应等价于以下规划

$$\text{极值} \quad \nabla^3 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0) \boldsymbol{n}(\boldsymbol{v}) \quad —(2.3.2.30)$$

设$\nabla^3 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0) \boldsymbol{n}(\boldsymbol{v})$不恒为 0,即 $\boldsymbol{x}(s)$不是平面曲线. 以上关于 $\boldsymbol{v}$ 的极值的条件是

$$\nabla^3 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0)\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{0} \qquad \text{—(2.3.2.31)}$$

类似(2.3.2.10～15)式的步骤，即可得到在投影曲线的挠率取极值处的 $\boldsymbol{n}^*$，由下式决定

$$\boldsymbol{n}^* = \pm \frac{\Pi_x^1[(\Pi_x^1)^{\mathrm{T}}\Pi_x^1]^{-1}(\Pi_x^1)^{\mathrm{T}}\nabla^3\boldsymbol{x}}{(\nabla^3\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\Pi_x^1[(\Pi_x^1)^{\mathrm{T}}\Pi_x^1]^{-1}(\Pi_x^1)^{\mathrm{T}}\nabla^3\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{—(2.3.2.32)}$$

考虑(2.3.2.32)式右边分子部分决定的向量(记为$\boldsymbol{x}^*$)，

$$\boldsymbol{x}^* = \Pi_x^1[(\Pi_x^1)^{\mathrm{T}}\Pi_x^1]^{-1}(\Pi_x^1)^{\mathrm{T}}\nabla^3\boldsymbol{x} \qquad \text{—(2.3.2.33)}$$

并记

$$P^1 = \Pi_x^1[(\Pi_x^1)^{\mathrm{T}}\Pi_x^1]^{-1}(\Pi_x^1)^{\mathrm{T}} \qquad \text{—(2.3.2.34)}$$

则 P^1 是 Π_x^1 构造的正投影矩阵，而 Π_x^1 又是(2.3.2.21)式的基础解系矩阵. 故 P^1 是将任一 $\boldsymbol{y}\in R^m$ 向量正投影到$\nabla\boldsymbol{x}$、$\nabla^2\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}$向量组张成的平面的正交补空间的算子. 且由正投影算子的性质[1]，$\boldsymbol{x}^*$ 给出的方向(即$\boldsymbol{x}^*$ 在单位向量意义上)应是以下规划的解

$$\begin{cases} \min & (\nabla^3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\nabla^3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & \begin{cases}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{x} = 0 \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\nabla^2\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}} = 0\end{cases}\end{cases} \qquad \text{—(2.3.2.35)}$$

构造此规划的 L—函数，$\zeta_{1,2}$是乘子，其中$\nabla^{1,2,3}\boldsymbol{x}$ 向量均在 s^0 处取值，

$$L = (\nabla^3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\nabla^3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}) + \zeta_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{x} + \zeta_2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\nabla^2\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}$$

可得必要条件

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = -2(\nabla^3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}) + \zeta_1\nabla\boldsymbol{x} + \zeta_2\nabla^2\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}$$

用$\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$、$\nabla^2\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}$分别左乘上式，可知

$$\zeta_1 = 2\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\nabla^3\boldsymbol{x} \qquad \zeta_2 = 2\nabla^2\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}^{\mathrm{T}}\nabla^3\boldsymbol{x} \qquad \text{且}\frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{x}^2} = 2\cdot I_m \text{ 是正定的，}$$

故得到(2.3.2.35)规划的解应是

$$\boldsymbol{x}^* = \nabla^3\boldsymbol{x} - (\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\nabla^3\boldsymbol{x})\cdot\nabla\boldsymbol{x} - (\nabla^2\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}^{\mathrm{T}}\nabla^3\boldsymbol{x})\cdot\nabla^2\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}} \qquad \text{—(2.3.2.36)}$$

而由(2.3.1.3～4)式，并注意 $\|\nabla\boldsymbol{x}\| = 1$ 可得

[1] 《常用的矩阵理论和方法》，倪国熙编，上海科技出版社，第 69 页，定理 1.3 的 3°.

$$\nabla \boldsymbol{y}_1 = \left(\nabla^3 \tilde{\boldsymbol{x}} - \frac{\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}}{\| \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} \|} \cdot \frac{\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \nabla^3 \tilde{\boldsymbol{x}}}{\| \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} \|}\right) \Big/ \| \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} \|$$

$$\nabla \tilde{\boldsymbol{y}}_1 = \nabla \boldsymbol{y}_1 - \nabla \boldsymbol{x} \cdot \nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^3 \tilde{\boldsymbol{x}} \Big/ \| \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} \|$$

易知

$$\nabla \tilde{\boldsymbol{x}} = \nabla \boldsymbol{x} \quad \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} = \nabla^2 \boldsymbol{x} \quad \nabla^3 \tilde{\boldsymbol{x}} = \nabla^3 \boldsymbol{x} \quad \nabla^2 \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}}{\| \nabla^2 \boldsymbol{x} \|}$$

即得

$$\nabla \tilde{\boldsymbol{y}}_1 = \frac{1}{\| \nabla^2 \boldsymbol{x} \|} (\nabla^3 \boldsymbol{x} - (\nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^3 \boldsymbol{x}) \nabla \boldsymbol{x} - (\nabla^2 \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}^{\mathrm{T}} \nabla^3 \boldsymbol{x}) \nabla^2 \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}) \qquad —(2.3.2.37)$$

比较(2.3.2.36～37)式，可知(2.3.2.33)式的$\boldsymbol{x}^*$与$\nabla \tilde{\boldsymbol{y}}_1$是各分量成比例的向量，由此即知必有

$$\boldsymbol{n}^* = \pm \frac{\nabla \tilde{\boldsymbol{y}}_1}{\| \nabla \tilde{\boldsymbol{y}}_1 \|} \qquad —(2.3.2.38)$$

取$\nabla \boldsymbol{x}$、$\nabla^2 \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}$向量组的法向量为$\boldsymbol{n}$，

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla \tilde{\boldsymbol{y}}_1}{\| \nabla \tilde{\boldsymbol{y}}_1 \|}$$

所构造的$Ophq$子空间上，$\boldsymbol{x}(s)$的投影函数的挠率应当是$\nabla \boldsymbol{x}$、$\nabla^2 \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}$向量组的全体法向量$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{v})$所能构造的子空间$Ophq$(族)中，$\boldsymbol{x}(s)$的投影函数的挠率取极大值的那个法向量，即主法向量. 并且，很显然，这一主法方向是唯一的.

可以一直递推以上的推导，即可知在R^m空间的曲线$\boldsymbol{x}(s)$上，在自然标架(2.3.1.20)式给出的局部正交坐标系上决定的τ_0，τ_1，…，τ_{m-2}个挠(曲)率，是对应的2维、3维、…子空间上的极大值挠(曲)率. 从而可以称这样的标架是一个(唯一的)极值标架.

§ 2.4 曲面第一、第二基本形式在 R^m 空间上的表示

由曲面的参数函数形式决定的，并且，需要利用矢量积的运算构造曲面的单位法向量场的方法，是R^3空间中的曲面的第一、第二基本形式的基本构造方法. 在一般的R^m空间上，由于经典微分几何理论中缺失了关于R^m空间上的多重矢量积的算法，所以，在定义曲面的第二基本形式时，就遇到了一些会引起含混的

问题.并因此,在 R^3 空间→R^m 空间的推广中,第一、第二基本形式所使用的符号、方法都出现了一个跳跃式的变化,严重削弱了形式上的一贯性.还有就是经典微分几何理论中似乎少有基于一般曲面函数形式的讨论,但对于本书而言,有大量的内容必须基于一般曲面函数 $f(\boldsymbol{x})=0 \quad \boldsymbol{x}\in R^m$ 的形式予以讨论,所以,还必须协调基于一般曲面函数形式与经典的参数曲面形式的分析的相互关系及其内在的一致性.

§2.4.1 R^m 空间上向量的多重矢量积

可以利用多重向量的矢量积方法来确定 R^m 空间中的参数曲面的法方向向量.先引入以下多重矢量积的定义.

定义 2.4.1.1(多重矢量积) 设 $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{m-1}\in R^m$ 是 $m-1$ 个(线性无关)的 m 维向量.规定 $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{m-1}$ 向量的(多重)矢量积是指

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{z}_1\times\boldsymbol{z}_2\times\cdots\times\boldsymbol{z}_{m-1}=(N_1, N_2, \cdots, N_m)^{\mathrm{T}}$$

其中
$$N_i=Z_{im} \qquad i=1, 2, \cdots, m$$

且 Z_{im} 是行列式

$$Z=|\,\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{m-1}, \boldsymbol{b}\,|$$

的第 i 行第 m 列元素的代数余子式. Z 行列式中的 $\boldsymbol{b}$ 向量可以是任取的 m 维(列)向量[1]. ■

定义 2.4.1.1 中的向量 $\boldsymbol{b}$ 可以仅仅是为了满足行列式的写法而任取的.由于 Z_{im} 是 b_i 元素的代数余子式,故 $\boldsymbol{b}$ 如何选取与 Z_{im} 的结果没有关系.当然,如果继续推广 R^3 空间中的矢量的形式,那么,也可以规定

$$\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m)^{\mathrm{T}}$$

其中 $\boldsymbol{e}_i$ 是 R^m 空间中的单位向量.即 $\boldsymbol{e}_i$ 是 I_m 单位矩阵的第 i 列向量.而将 $\boldsymbol{b}$ 看成是符号向量,它代表了 R^m 空间的标准基.当 $R^m=R^3$,且记

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{k}$$

则定义 2.4.1.1 就是人所熟知的 $\boldsymbol{R}^3$ 中的(2 个矢量的)矢量积.还可以得到多重矢量积算法具有类似 R^3 空间上的矢量积的性质.如交换多重矢量积中 $\boldsymbol{z}_i$, $\boldsymbol{z}_j$ 的排序,则多重矢量积的结果 $\boldsymbol{N}$ 将改变符号;如果 $\boldsymbol{z}_i$ 向量组是线性相关的,则 $\boldsymbol{N}\equiv\boldsymbol{0}$,故有非平凡结果的多重矢量积的充要条件是 $\boldsymbol{z}_i$ 向量组线性无关,等等.

---

[1] 引自《微积分和数学分析引论》R. Courant、F. John,张鸿林、周民强译,科学出版社,2002 年,第二卷第一分册,第 76 页及其以下内容.

对于 $\boldsymbol{e}_i$ 标准基的多重矢量积，亦可得以下结论. 设 $i_1, i_2, \cdots, i_{m-1}$ 是 1, 2, …, m 中的任一个随意排列的子列，则

$$\boldsymbol{e}_{i_1} \times \boldsymbol{e}_{i_2} \times \cdots \times \boldsymbol{e}_{i_{m-1}} = \begin{cases} (-1)^{s(i_1, i_2, \cdots, i_{m-1})} \cdot (-1)^{j+m} \boldsymbol{e}_j \\ j = \{1, 2, \cdots, m\} - \{i_1, i_2, \cdots, i_{m-1}\} \\ \qquad 且\ i_k \neq i_t \quad k, t = 1, 2, \cdots, m-1 \\ \boldsymbol{0} \quad 当\ i_k = i_t \quad 1 \leqslant k, t \leqslant m-1 \end{cases} \qquad —(2.4.1.1)$$

其中 $s(i_1, i_2, \cdots, i_{m-1})$ 是 $i_1, i_2, \cdots, i_{m-1}$ 按递增序列要求统计的逆序指数，即通过交换 i_t，$t = 1, 2, \cdots, m-1$ 指标的次序，使之成为递增序列的交换总次数.

这样定义的多重矢量积的结果 $\boldsymbol{N}$ 向量的径长 $\|\boldsymbol{N}\|$，在几何上就是 $\boldsymbol{z}_i$，$i = 1, 2, \cdots, m-1$ 向量组所张成的平行多面体的体积. 由多重矢量积的定义即知，$\boldsymbol{N}$ 向量等价于矩阵

$$[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{m-1}, \boldsymbol{b}]$$

的伴随矩阵的第 m 行向量(转置后的向量). 由此即知，$\boldsymbol{N}$ 与 $\boldsymbol{z}_i$，$i = 1, 2, \cdots, m-1$ 均是正交的. 所以，$\boldsymbol{N}$ 就是 $\boldsymbol{z}_i$ 向量组的法向量. 当 $\boldsymbol{z}_i$ 是线性无关向量组时，$\boldsymbol{N}$ 一定是非 0 向量，并由逆矩阵的唯一性即知，定义 2.4.1.1 规定的算法在结果上亦是唯一的.

利用这样的多重矢量积的算法，得到多重矢量积构造的(非 0)法向量，归一化为单位法向量，

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{\|\boldsymbol{N}\|} \qquad —(2.4.1.2)$$

可证明

$$\|\boldsymbol{N}\| = |Z_{m-1}^{\mathrm{T}} Z_{m-1}|^{\frac{1}{2}} \qquad —(2.4.1.3)$$

特别地，若 $\boldsymbol{z}_i$ 是归一化的正交向量组，则 $|Z_{m-1}^{\mathrm{T}} Z_{m-1}| = 1$，从而 $\|\boldsymbol{N}\| = 1$，即 $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{n}$. (2.4.1.3)式中

$$Z_{m-1} = [\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{m-1}]$$

是 $m \times (m-1)$ 阶矩阵. $Z_{m-1}^{\mathrm{T}} Z_{m-1}$ 则是 $(m-1) \times (m-1)$ 阶 Gram 矩阵. (2.4.1.3)式是指，多重矢量积构造的法向量 $\boldsymbol{N}$ 的径长，是 Gram 矩阵 $Z_{m-1}^{\mathrm{T}} Z_{m-1}$ 行列式的均方根.

由 $\boldsymbol{N}$ 的构造及行列式的展开规则，马上可知有行列式

$$|\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{m-1}, \boldsymbol{N}| = \sum_i^m |Z_{im}|^2 = \sum_i^m N_i^2 = \|\boldsymbol{N}\|^2 \qquad —(2.4.1.4)$$

将以上最左边的行列式按第 m 列元素作展开，再由 $\boldsymbol{N}$ 的构造即知此结果.

其次，可知[1]

$$|\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{m-1}, \boldsymbol{N}|^2 = \left|\begin{bmatrix} Z_{m-1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \cdot [Z_{m-1}, \boldsymbol{N}]\right|$$

但因为

$$\begin{bmatrix} Z_{m-1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} [Z_{m-1}, \boldsymbol{N}] = \begin{bmatrix} Z_{m-1}^{\mathrm{T}} Z_{m-1} & 0 \\ 0^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N} \end{bmatrix}$$

所以，对上式两边取行列式，并利用以上结果，有

$$|\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{m-1}, \boldsymbol{N}|^2 = (\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N})^2 = \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N} \cdot |Z_{m-1}^{\mathrm{T}} Z_{m-1}|$$

即知

$$\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N} = \|\boldsymbol{N}\|^2 = |Z_{m-1}^{\mathrm{T}} Z_{m-1}|$$

此即(2.4.1.3)式. 再由(2.4.1.3～4)式，还可知有

$$\|\boldsymbol{N}\|^2 = |\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{m-1}, \boldsymbol{N}| = |Z_{m-1}^{\mathrm{T}} Z_{m-1}| \quad —(2.4.1.5)$$

附带地，还有

$$|\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{m-1}, \boldsymbol{n}| = \|\boldsymbol{N}\| \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{\|\boldsymbol{N}\|} \quad —(2.4.1.6)$$

由几何意义即知，$\|\boldsymbol{N}\|$ 就是 $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{m-1}$ 张成的平行多面体的体积.

再记

$$\mathscr{A} = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^{m-1} u_i \boldsymbol{z}_i \quad u_i \in R\}$$

是 $\boldsymbol{z}_i$ 向量组张成的线性子空间. 由于 $\boldsymbol{z}_i$ 是线性无关向量组，所以，可在 $\mathscr{A}$ 中另取一组线性无关向量组 $\boldsymbol{y}_j \quad j = 1, 2, \cdots, m-1$. 类似地，记

$$Y_{m-1} = [\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_{m-1}]$$

则在 Z_{m-1}、Y_{m-1} 之间有 $(m-1) \times (m-1)$ 阶满秩矩阵 Q，使基变换关系

$$Y_{m-1} = Z_{m-1} Q$$

成立.

利用 $\boldsymbol{y}_j$ 向量组也可以作多重矢量积，并记

---

[1] 参见 R. Courant 等著. 见前注. 第 206～211 页内容.

$$\boldsymbol{N}_y = \boldsymbol{y}_1 \times \boldsymbol{y}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{y}_{m-1}$$
$$\boldsymbol{N}_z = \boldsymbol{z}_1 \times \boldsymbol{z}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{z}_{m-1}$$

作以下矩阵乘积

$$\begin{bmatrix} Z_{m-1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{N}_z^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \cdot [Y_{m-1} \boldsymbol{N}_y] = \begin{bmatrix} Z_{m-1}^{\mathrm{T}} Z_{m-1} \cdot Q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{N}_z^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N}_y \end{bmatrix}$$

再对上式两边取行列式，并利用(2.4.1.5)式，有

$$| Z_{m-1}^{\mathrm{T}} Z_{m-1} | \cdot | Y_{m-1}^{\mathrm{T}} Y_{m-1} | = \boldsymbol{N}_z^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N}_y \cdot | Z_{m-1}^{\mathrm{T}} Z_{m-1} | \cdot | Q |$$

但
$$| Y_{m-1}^{\mathrm{T}} Y_{m-1} | = | Z_{m-1}^{\mathrm{T}} Z_{m-1} | \cdot | Q |^2 \qquad —(2.4.1.6a)$$

或表成

$$\| \boldsymbol{N}_y \| = \| \boldsymbol{Y}_1 \times \boldsymbol{Y}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{Y}_{m-1} \| = | (| Q |) | \cdot \| \boldsymbol{N}_z \| \qquad —(2.4.1.6b)$$

其中 $|(|\cdot|)|$ 表示行列式绝对值.

所以可知

$$\boldsymbol{N}_z^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N}_y = | Z_{m-1}^{\mathrm{T}} Z_{m-1} | \cdot | Q | \qquad —(2.4.1.7)$$

由于

$$| Z_{m-1}^{\mathrm{T}} Z_{m-1} | = \| \boldsymbol{N}_z \|^2 > 0$$

故 $\boldsymbol{N}_z$、$\boldsymbol{N}_y$ 当 $|Q| > 0$ 时是线性子空间 $\mathscr{A}$ 的同方向的法向量，当 $|Q| < 0$ 则是反方向的法向量. 事实上易知

$$\boldsymbol{n}_z^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}_y = \mathrm{sign}(| Q |) \qquad —(2.4.1.8)$$

并且可知有

$$Q = [Z_{m-1}^{\mathrm{T}} Z_{m-1}]^{-1} \cdot Z_{m-1}^{\mathrm{T}} Y_{m-1} \qquad —(2.4.1.9)$$

所以，

$$\boldsymbol{N}_z^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N}_y = | Z_{m-1}^{\mathrm{T}} Y_{m-1} | \qquad —(2.4.1.10)$$

因此，不需要通过变换矩阵 Q，可以直接从两组基向量 $\boldsymbol{z}_i$、$\boldsymbol{y}_j$ 由(2.4.1.10)式，以 $Z_{m-1}^{\mathrm{T}} Y_{m-1}$ 矩阵的行列式的符号，就可知道 $\boldsymbol{N}_z$、$\boldsymbol{N}_y$ 是同方向还是反方向.

附带指出，(2.4.1.10)式就是 R^3 空间上矢量积的 **Lagrange 恒等式**在 R^m 空间上关于多重矢量积的推广形式. 还应指出，在 Z_{m-1}、Y_{m-1} 的列空间不相同时，虽然仍可利用(2.4.1.9)式构造出 Q 矩阵，但这样得到的 Q 矩阵不能使(2.4.1.6a)式成立. 事实上，在这样的场合，不存在可以使(2.4.1.6a)式成立的 Q 矩阵.

以下对于多重矢量积再给出3个具体问题的说明.

1. 多重矢量积的混合积. 设 $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{m-1}, \boldsymbol{r} \in R^m$，则 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{z}_i$ 向量组的多重矢量积的混合积由以下关系决定

$$\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{z}_1 \times \boldsymbol{z}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{z}_{m-1}) = |\, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{m-1}, \boldsymbol{r} \,| \quad \text{—(2.4.1.11)}$$

这里"·"是指向量的内积，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_i a_i b_i$，$|\cdot|$ 是行列式运算符号.

(2.4.1.11)式由定义2.4.1.1直接可得. 当 $m = 3$，由(2.4.1.11)对 R^3 上的3个矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的混合积，有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) &= |\, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \,| = |\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \,| \\
&= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right\} \cdot \boldsymbol{c} \\
&= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}
\end{aligned}$$

类似地有

$$\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{z}_1 \times \boldsymbol{z}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{z}_{m-1}) = (-1)^{m-1} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{z}_1 \times \boldsymbol{z}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{z}_{m-2}) \cdot \boldsymbol{z}_{m-1} \quad \text{—(2.4.1.12)}$$

以及

$$\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{z}_1 \times \boldsymbol{z}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{z}_{m-1}) = -(\boldsymbol{z}_1 \times \boldsymbol{z}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{z}_{j-1} \times \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{z}_{j+1} \times \cdots \times \boldsymbol{z}_{m-1}) \cdot \boldsymbol{z}_j \quad \text{—(2.4.1.13)}$$

多重矢量积的混合积的其他一些性质，可由(2.4.1.11)式及行列式的性质推出.

2. R^m 空间上任意正交坐标系的右(左)手性问题. 当 $m > 3$ 时，严格地说"右(左)手性"这一说法是不合理的. 但在以下规定的意义上借用"右(左)手性"的说法还是可以的.

设 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m) \in R^m$ 是 R^m 空间上任意给定的一组归一化的正交基向量组，$\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{e}_i = 1$，$\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{e}_j = 0$，$i \neq j$. 若 $\boldsymbol{e}_i$ 向量组满足以下(2.4.1.14)式，称 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m)$ 为**右手性**的正交坐标系.

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{e}_{j-1} \times \boldsymbol{e}_{j+1} \times \cdots \times \boldsymbol{e}_m = (-1)^{j+m} \boldsymbol{e}_j \quad j = 1, 2, \cdots, m \quad \text{—(2.4.1.14)}$$

(2.4.1.14)式可从(2.4.1.1)式中直接得到. 取 $\boldsymbol{e}_i$ 是单位矩阵 I_m 的第 i 列向量，$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m)$ 构成的 R^m 空间的标准正交坐标系就满足(2.4.1.14)式，故是右手性的.

由定义 2.4.1.1 以及(2.4.1.14)式,设 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_{j-1}, \boldsymbol{e}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ 是单位正交向量组,可得到若取以下矩阵

$$E = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_{j-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_m] \qquad (\boldsymbol{b}\text{ 是任取的向量})$$

的伴随矩阵 E^* 的第 j 行向量 $\boldsymbol{e}_j^*$ 的转置$(\boldsymbol{e}_j^*)^{\mathrm{T}}$,并记

$$\boldsymbol{E}_j = (\boldsymbol{e}_j^*)^{\mathrm{T}}$$

那么$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_{j-1}, \boldsymbol{E}_j, \boldsymbol{e}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_m)$一定构成右手性坐标系.这只要证明(2.4.1.14)式成立即可.首先,由(2.4.1.3)式的说明,知 $\boldsymbol{E}_j$ 必定也是归一化的单位向量. $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{E}_j, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ 向量组的正交性由上面的假设和伴随矩阵的性质即知.现作多重矢量积(并记 $\boldsymbol{E}_j$ 为 $\boldsymbol{e}_j$),记

$$\widetilde{\boldsymbol{e}}_k = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{e}_{k-1} \times \boldsymbol{e}_{k+1} \times \cdots \times \boldsymbol{e}_m$$

由定义 2.4.1.1 即知,$\widetilde{\boldsymbol{e}}_k$ 是以下矩阵

$$\widetilde{E} = [\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{k-1}, \boldsymbol{e}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{b}] \qquad (\boldsymbol{b}\text{ 是任取的向量})$$

的伴随矩阵的第 m 行向量的转置向量,记这一(转置)向量为 $\widetilde{\boldsymbol{E}}_m^*$.显然

$$\widetilde{\boldsymbol{e}}_k = \widetilde{\boldsymbol{E}}_m^*$$

但由伴随矩阵的定义即知,$\widetilde{\boldsymbol{E}}_m^*$ 就是以下矩阵

$$\approx{E} = [\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{k-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_m]$$

的伴随矩阵的第 k 行向量的转置向量再乘以$(-1)^{k+m}$.这是因为 $\boldsymbol{b}$ 向量从 $\widetilde{E}$ 矩阵的第 m 列通过 $m-k$ 次互换变成为 $\overset{\approx}{E}$ 矩阵的第 k 列向量.故记 $\overset{\approx}{E}$ 矩阵的伴随矩阵的第 k 行向量(转置)为 $\overset{\approx}{\boldsymbol{E}}_k^*$,则由定义 2.4.1.1,

$$(\overset{\approx}{E}_k^*)_i = (-1)^{k+i}\overset{\approx}{E}_{ik}$$

这里$(\overset{\approx}{E}_k^*)_i$ 是 $\overset{\approx}{\boldsymbol{E}}_k^*$ 的第 i 个分量,而 $\overset{\approx}{E}_{ik}$则是 $\overset{\approx}{E}$ 的第 i 行第 k 列元素的余子式.另又可有

$$(\widetilde{E}_m^*)_i = (-1)^{m+i}\widetilde{E}_{im}$$

但显然,余子式 $\widetilde{E}_{im} = \overset{\approx}{E}_{ik}$,故

$$(-1)^{k+m}(\overset{\approx}{E}_k^*)_i = (-1)^{m+2k+i}\overset{\approx}{E}_{ik} = (-1)^{m+i}\widetilde{E}_{im} = (\widetilde{E}_m^*)_i$$

所以

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_m^* = (-1)^{k+m}\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{E}}}_k^* \Rightarrow \widetilde{\boldsymbol{e}}_k = (-1)^{k+m}\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{E}}}_k^*$$

同时，再由逆矩阵与伴随矩阵的关系，和 $\boldsymbol{e}_i$ 的正交性，即知 $\widetilde{\widetilde{E}}_k^*$ 就是逆矩阵

$$[\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{k-1}, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_m]^{-1}$$

的第 k 行向量的转置，即就是 $\boldsymbol{e}_k$ 向量，所以 $\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{E}}}_k^* = \boldsymbol{e}_k$，故

$$\widetilde{\boldsymbol{e}}_k = (-1)^{k+m}\boldsymbol{e}_k$$

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 \times \cdots \boldsymbol{e}_{k-1} \times \boldsymbol{e}_{k+1} \times \cdots \boldsymbol{e}_m = (-1)^{k+m}\boldsymbol{e}_k \quad k = 1, 2, \cdots, m$$

即(2.4.1.14)式成立.

附带地，这也就证明了多重矢量积 $\boldsymbol{z}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_i = 1$，$\boldsymbol{z}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_j = 0 \quad i \neq j$，

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{z}_1 \times \boldsymbol{z}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{z}_{m-1} \qquad (\text{总有 } \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n} = 1)$$

并取$(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{m-1}, \boldsymbol{n})$为正交坐标系的基向量组，则这一坐标系总保证是右手性的. 这也是 R^3 空间上矢量积性质的推广.

以上的分析同时表明了在 R^m 维空间上任取 $m-1$ 个单位正交的向量(组) $\boldsymbol{z}_i$，都可由 $\boldsymbol{z}_i$ 的多重矢量积决定的 $\boldsymbol{n}$，构造$(\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_{m-1}, \boldsymbol{n})$这样的右手性的正交坐标系. 换而言之，这也就同时表明，在 R^m 空间上，对任意的 $m-1$ 个单位正交向量(组)$\boldsymbol{z}_i$，都是右手性的正交向量组.

这里的“右手性”的意思即指 $\boldsymbol{z}_i$ 可由多重矢量积得到 $\boldsymbol{n}$，并构造$(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{m-1}, \boldsymbol{n})$右手性的正交坐标系，从而标准坐标系$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m)$总能经过适当的旋转与$(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{m-1}, \boldsymbol{n})$重合[1]. 但这即表明，$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_{m-1})$总能经适当旋转与$(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{m-1})$重合，从而 R^m 空间上任取的 $m-1$ 个单位正交向量 $\boldsymbol{z}_i$ 都是右手性的.

这可以用 R^3 空间为例，给出一个直观的说明.

图 2.4.1.1 表示，取 $\boldsymbol{z}_1$、$\boldsymbol{z}_2$ 这样 2 个正交的单位向量，在 $\boldsymbol{z}_1$、$\boldsymbol{z}_2$ 张成的平面

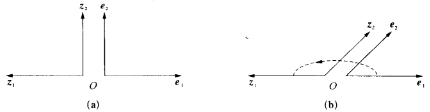


图 2.4.1.1

〔1〕“重合”的意思是指，将旋转后的标准坐标系仍记为$(\boldsymbol{e}_i)$ $1 \leqslant i \leqslant m$，则旋转后可使 $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{z}_i \quad i = 1, \cdots, m-1$；$\boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{n}$ 成立.

上，z_1、z_2 与平面上的标准坐标系 e_1、e_2 的关系呈上图(a)的性状. 显然，如果限制在这一平面上，则就可以说 z_1、z_2 构造的坐标系是左手性的. 因为在平面上 e_1、e_2 坐标系无论怎样旋转都不能与 z_1、z_2 在方向上一致.

但是，现在如果 z_1、z_2 和 e_1、e_2 都是 R^3 空间上的向量，那么，如图 2.4.1.1 的(b)，使 e_2 与 z_2 重合，同时使 e_1 以逆时针方向(顺时针方向也可)绕 e_2 旋转，便能使 e_1、e_2 在方向上与 z_1、z_2 一致. 所以，在 R^3 空间上，这样选取的 z_1、z_2 仍是右手性的.

既然对于 R^m 空间上的任取的 $m-1$ 个单位正交向量 z_i，都可以看成是右手性的，那么，这就可以说，在 R^m 空间上，对于取定的两组(不同的) $m-1$ 个单位正交向量(组)z_i 和 z_i' 不可能在手性上给予区分. 只能通过构造 z_i 和 z_i' 的多重矢量积 $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{n}'$，并比较 $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}'$ 的方向，才能判定 $z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}$ 与 $z_1', z_2', \cdots, z_{m-1}'$ 之间在各自的法方向上是否一致，比如仍可利用(2.4.1.10)式.

稍加思索，以上性质可以进一步加强：对于 R^m 空间上任意取定的 k 个单位正交向量(组)z_i，$k \leqslant m-1$，都可看成是右手性的. 换句话讲，对于 R^m 空间上任意取定的两组(不同的)k 个单位正交向量组 z_i 和 z_i'，不可能在手性上给予区分(若 $1 \leqslant k \leqslant m-1$).

这个性质的背后，还涉及到的是在多重矢量积算法中，

$$\boldsymbol{N} = z_1 \times z_2 \times \cdots \times z_k$$

的结果，在 $k < m-1$ 时，实则有无穷多个选择(见下文说明).

这里所分析的右手性问题与 R^m 空间的曲线上的 Frenet 标架有关.

3. 注意在定义 2.4.1.1 中，规定

$$\boldsymbol{N} = z_1 \times z_2 \times \cdots \times z_{m-1} = (N_1,\ N_2,\ \cdots,\ N_m)^{\mathrm{T}}$$

其中 N_i 是行列式

$$| z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_{m-1},\ \boldsymbol{b} | \qquad (\boldsymbol{b}\text{ 任取})$$

的第 m 列元素的代数余子式作为多重矢量积的算法. 这一规定与传统文献上 R^3 空间上的矢量叉积的算法规定有 2 个改动.

在 R^3 空间上，$z_1 = (z_{11},\ z_{21},\ z_{31})^{\mathrm{T}}\quad z_2 = (z_{12},\ z_{22},\ z_{32})^{\mathrm{T}}$ 是两个矢量，则

$$\boldsymbol{N} = z_1 \times z_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ z_{11} & z_{21} & z_{31} \\ z_{12} & z_{22} & z_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_{21} & z_{31} \\ z_{22} & z_{32} \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} z_{11} & z_{31} \\ z_{12} & z_{32} \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} z_{11} & z_{21} \\ z_{12} & z_{22} \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

其中 $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}) = (e_1,\ e_2,\ e_3) = I_3$，是传统的矢量叉积算法. 这一算法，从伴随矩阵的算法看，等价于说 $z_1 \times z_2$ 叉积决定的 $\boldsymbol{N}$ 向量，实质上是以下矩阵

$$A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{z}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{z}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ z_{11} & z_{21} & z_{31}\\ z_{12} & z_{22} & z_{32}\end{bmatrix}\qquad (b_1,\ b_2,\ b_3\ 任取)$$

的伴随矩阵 A^* 的第 1 列向量，也即是行列式

$$\begin{vmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ z_{11} & z_{21} & z_{31}\\ z_{12} & z_{22} & z_{32}\end{vmatrix}$$

的第 1 行元素的代数余子式作为分量的(列)向量.

所以，与之相比较，定义 2.4.1.1 作的第 1 个改动是表示方法上的，即可看成是取了一个"转置"表示. 即是说，先将叉积运算表成取以下行列式

$$\begin{vmatrix}b_1 & z_{11} & z_{12}\\ b_2 & z_{21} & z_{22}\\ b_3 & z_{31} & z_{32}\end{vmatrix}=|\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{z}_1,\ \boldsymbol{z}_2\ |\qquad \text{—(a)}$$

第 1 列元素的代数余子式作为 $\boldsymbol{N}$ 的分量. 这一改变显然仅仅是表示方法上的，仅仅是适应普通地用黑体字母表示的是列向量这一人为规定的书写简便性.

但第 2 项改动则是说 $\boldsymbol{z}_1\times\boldsymbol{z}_2$ 的叉积运算，应视为取以下行列式

$$\begin{vmatrix}z_{11} & z_{12} & b_1\\ z_{21} & z_{22} & b_2\\ z_{31} & z_{32} & b_3\end{vmatrix}=|\ \boldsymbol{z}_1,\ \boldsymbol{z}_2,\ \boldsymbol{b}\ |\qquad \text{—(b)}$$

的第 3 列元素的代数余子式作为 $\boldsymbol{N}$ 的分量. 这一项改动，比较(b)、(a)两式，即将 $\boldsymbol{b}$ 向量原先作为第 1 列向量的位置移到了第 3 列的位置上. 由于行列式两列元素交换位置将改变行列式的符号，所以，这一项改动，在 R^3 空间上因为相当于 $\boldsymbol{b}$ 向量先与 $\boldsymbol{z}_1$ 再与 $\boldsymbol{z}_2$ 交换位置，是不改变行列式符号的. 故这一改动对传统文献上基于 R^3 空间上的矢量叉积算法得到的全部结论没有影响. 但在 R^m 空间上，易理解取行列式

$$|\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{z}_1,\ \boldsymbol{z}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{z}_{m-1}\ |\qquad \text{—(c)}$$

的第 1 列元素的代数余子式作为多重矢量积的结果 $\boldsymbol{N}$ 向量的分量，与取行列式

$$|\ \boldsymbol{z}_1,\ \boldsymbol{z}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{z}_{m-1},\ \boldsymbol{b}\ |$$

的第 m 列元素的代数余子式(即定义 2.4.1.1)作为 $\boldsymbol{N}$ 向量的分量，在 m 为**偶数**时，所得结果刚好是方向相反的. 因为在 m 为偶数时，将(c)式的位于第 1 列位置的 $\boldsymbol{b}$ 向量逐次与 $\boldsymbol{z}_i\quad i=1,\cdots,m-1$ 向量交换位置而成为上式的第 m 列位置的向量，刚好交换了奇数次位置，从而行列式(及其按 $\boldsymbol{b}$ 的元素所取的代数余

子式)要改变符号.

因此,这第 2 项改动涉及到了偶数维 R^m 空间上 $m-1$ 个向量的矢量积给出的定向的改变.

之所以本书采用定义 2.4.1.1 的方式来规定多重矢量积(即作出以上所说的改动)是因为在曲线的 Frenet 标架以及曲面的 Gauss-Codazzi 方程组的形式中,都是按局部标架系的基向量组的排列以曲线的切向量$\nabla \boldsymbol{x}$ 开始或曲面切空间的极大线性无关向量组$(\dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_{m-1})$开始,而将法空间的基向量(组)列在切方向的基向量(组)的右边(后边). 如曲面上的局部标架系(在 Gauss-Codazzi 方程组中)是

$$(\dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_{m-1}, \boldsymbol{n})$$

所以,若规定(见下文)曲面法方向是

$$\boldsymbol{n} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}_1 \times \dot{\boldsymbol{r}}_2 \times \cdots \times \dot{\boldsymbol{r}}_{m-1}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|^{\frac{1}{2}}}$$

那么,在定义 2.4.1.1 的规定下,不论 m 是奇数、偶数,都有

$$|\dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_{m-1}, \boldsymbol{n}| > 0$$

即标架系$(\dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_{m-1}, \boldsymbol{n})$是右手性的.

反之,若是以前面的(c)式即 $\boldsymbol{b}$ 作为行列式第 1 列向量的元素的代数余子式给出多重矢量积 $\boldsymbol{N}$ 的分量,那么,标架系必须排列为

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_{m-1})$$

才能保证不论 m 是奇、偶数,该标架系均为右手性. 但这即涉及到改变许多标架方程的结构次序. 由此带来诸多不便.

这即是促使作出上述第 2 项改动的原因.

由上可见,多重矢量积是由 R^m 空间上的 $m-1$ 个 m 维向量 $\boldsymbol{z}_i$ 构造出来的. 多重矢量积的结果所得到的向量 $\boldsymbol{N}$,具有以下三个性质,其一是 $\boldsymbol{N}$ 与各个 $\boldsymbol{z}_i$ 均正交;其二 $\boldsymbol{N}$ 的分量 N_i 都用 $\boldsymbol{z}_i$ 组成的矩阵 Z_{m-1} 的子行列式(代数余子式)构造的;其三在 $\boldsymbol{z}_i$, $i=1, 2, \cdots, m-1$ 是线性无关向量组时,这样构造出来的 $\boldsymbol{N}$ 是唯一的.

若如果不考虑矢量积算法的唯一性,则多重矢量积算法也可以推广到 R^m 空间上的 $\boldsymbol{z}_i$, $i=1, 2, \cdots, n$, $1 \leqslant n \leqslant m-1$ 向量组上去. 下文会再行说明.

§2.4.2 正则参数曲面片决定的第一、第二基本形式

规定 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) \in S \subset R^m$, $\boldsymbol{u} \in D_u \subset R^{m-1}$ 表示 R^m 空间上一个正则参数曲面片. D_u 是连通开集,$\boldsymbol{r}(\cdot)$是 $D_u \to S$ 的(拓扑)同胚的映射. 因此,对于正则参数曲面

片，$\boldsymbol{r}$ 关于 $\boldsymbol{u}$ 的一阶偏导数

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \in R^{m\times(m-1)} \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = [\dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_{m-1}] \quad \dot{\boldsymbol{r}}_j = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j}$$

是 $m\times(m-1)$ 阶矩阵，是列满秩矩阵，且$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$的列向量组即为$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的切空间的一组基向量.

利用定义 2.4.1.1 给出的多重矢量积算法，可由此构造 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的法向量. 记

$$\boldsymbol{N}_r = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \times \cdots \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_{m-1}} \qquad \text{—(2.4.2.1)}$$

可知 $\boldsymbol{N}_r$ 的分量是矩阵$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$的 m 个 $(m-1)$ 阶(代数余)子行列式. 由(2.4.1.2)式，可得 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的单位法向量 $\boldsymbol{n}_r$

$$\boldsymbol{n}_r = \frac{\boldsymbol{N}_r}{\|\boldsymbol{N}_r\|} = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \times \cdots \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_{m-1}}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{—(2.4.2.2)}$$

当 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$关于 $\boldsymbol{u}$ 二阶以上可微时，$\boldsymbol{n}_r$ 的可微性条件应是

$$\|\boldsymbol{N}_r\| \neq 0$$

由以上的分析即知，此条件等价于 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的定义域 D_u 应由

$$(\pm)\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|^{\frac{1}{2}} > 0 \qquad \text{—(2.4.2.3)}$$

条件决定的 $\boldsymbol{u}$ 的最大连通开区域给出. 这里(±)是指可任取+号或者−号以保证(2.4.2.3)式成立为严格不等式. 通常(2.4.2.3)式前取为+号.

由 $\boldsymbol{N}_r$ 的构造，可知

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\right| = \|\boldsymbol{N}_r\|^2 = \sum_{\{i_1, i_2, \cdots, i_{m-1}\}} \left(\frac{\partial(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_{m-1}})}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})}\right)^2 \qquad \text{—(2.4.2.4)}$$

这里，X_i 是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) = (X_i(\boldsymbol{u}))$ 的分量函数，$\{i_1, i_2, \cdots, i_{m-1}\}$是指 1, 2, ⋯, m 中的任一个递增排序 ($i_{k+1} > i_k$) 的子列全体的集合. 故(2.4.2.4)式是指所有 Jacobi行列式

$$\frac{\partial(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_{m-1}})}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})}$$

的平方和的均方根(取符号后)恒为正数，即给出 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的定义域 D_u.

很显然地，要得到$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$列向量组的法向量，除了以上所指的多重矢量积方法，还可以利用逆矩阵方法，即直接解下列方程组的方法

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \boldsymbol{N}_r = \boldsymbol{0}$$

对此，以后还会有具体说明. 这里先只考虑多重矢量积方法.

用

$$L_r = \left\{ \boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-1} \quad \boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{0} \right\} \qquad —(2.4.2.5)$$

表示 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$参数曲面的切空间(超平面). 则 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的第一基本二次型可从 R^3 空间上的对应定义直接得到

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad —(1.2.21)$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \mathrm{d}\boldsymbol{u} \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{u} \in R^{m-1}$$

及

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \mathrm{d}\boldsymbol{u} \qquad —(1.2.21)$$

所以

$$\boldsymbol{I} = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = [\dot{\boldsymbol{r}}_i^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_j]_{(m-1)\times(m-1)} \qquad \dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} \qquad —(2.4.2.6)$$

(2.4.2.6)是(1.2.22)式的直接推广. $\boldsymbol{I}$ 是列满秩矩阵$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$构造的 Gram 矩阵，因此$\boldsymbol{I}$ 是对称正定矩阵.

再由(2.4.2.2)式，可以从第二基本形式的定义直接得到

$$\varphi_2 = -\mathrm{d}\boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad —(1.2.25)$$

由

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}_r = \frac{\partial \boldsymbol{n}_r}{\partial \boldsymbol{u}} \mathrm{d}\boldsymbol{u} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{n}_r}{\partial \boldsymbol{u}} = [\dot{\boldsymbol{n}}_r^1, \dot{\boldsymbol{n}}_r^2, \cdots, \dot{\boldsymbol{n}}_r^{m-1}] \quad \dot{\boldsymbol{n}}_r^j = \frac{\partial \boldsymbol{n}_r}{\partial u_j}$$

可得

$$\varphi_2 = -\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \mathrm{d}\boldsymbol{u} \qquad —(1.2.25)$$

以及

$$\mathbb{I} = -\frac{\partial \boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \quad —(1.2.27)$$

所以，从形式上讲，第一、二基本形式其实与 R^m 的维数无关. 以下分别记第一、二基本二次型矩阵的元素为I_{ij}、$\mathbb{I}_{ij}$.

由

$$\dot{\boldsymbol{r}}_j^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{n}_r = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u_i}(\dot{\boldsymbol{r}}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}_r) = 0$$

得

$$\frac{\partial\, \dot{\boldsymbol{r}}_j^{\mathrm{T}}}{\partial u_i}\boldsymbol{n}_r + \dot{\boldsymbol{r}}_j^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{n}_r}{\partial u_i} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_j}\frac{\partial \boldsymbol{n}_r}{\partial u_i} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_i \partial u_j}\boldsymbol{n}_r \quad —(2.4.2.7)$$

所以

$$\mathbb{I}_{ij} = -\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_j}\frac{\partial \boldsymbol{n}_r}{\partial u_i} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_i \partial u_j}\boldsymbol{n}_r = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 X_k}{\partial u_i \partial u_j} \cdot \frac{N_r^k}{\| \boldsymbol{N}_r \|} \quad —(2.4.2.8)$$

其中 N_r^k 是法向量 $\boldsymbol{N}_r$ 的第 k 个分量. 由多重矢量积的定义及(2.3.1.4)式，

$$N_r^k = (-1)^{k+m} \frac{\partial(X_1, \cdots, X_{k-1}, X_{k+1}, \cdots, X_m)}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})} \quad —(2.4.2.9)$$

由行列式展开规则便知

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 X_k}{\partial u_i \partial u_j} N_r^k = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_i \partial u_j}\boldsymbol{N}_r = | \dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_{m-1}, \ddot{\boldsymbol{r}}_{ij} | \quad —(2.4.2.10)$$

这里符号 $|\cdot|$ 是行列式. 其中

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{ij} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_i \partial u_j}$$

(2.4.2.10)式也就是混合积(2.4.1.11)式所给出的关系.

所以，第一、二基本二次型矩阵的元素(基本不变量)可简洁地表为[1]

$$\begin{cases} \mathrm{I}_{ij} = \dot{\boldsymbol{r}}_i^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_j = g_{ij} \\ \mathbb{I}_{ij} = \dfrac{| \dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_{m-1}, \ddot{\boldsymbol{r}}_{ij} |}{| \boldsymbol{I} |^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\left| \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}, \ddot{\boldsymbol{r}}_{ij} \right|}{| \boldsymbol{I} |^{\frac{1}{2}}} \end{cases} \quad —(2.4.2.11)$$

这里

[1] 在传统文献中第一基本不变量习惯用 g_{ij} 表示，本书也继续沿用此符号.

$$|\boldsymbol{I}| = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\right| = \|\boldsymbol{N}_r\|^2 \qquad —(2.4.2.12)$$

利用基本二次型矩阵，可推广 Weingarten 映射. 记 R^m 空间上正则参数曲面片 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的主法曲率是 κ_r^i，则 κ_r^i 应当是以下多项式的根

$$|\lambda \cdot \boldsymbol{I} - \boldsymbol{I\!I}| = 0 \qquad —(2.4.2.13)$$

由于 $\boldsymbol{I}$ 是正定矩阵，$\boldsymbol{I}$、$\boldsymbol{I\!I}$ 均是 $(m-1)\times(m-1)$ 阶方阵，上式又可表为

$$|\lambda \mathrm{I}_{m-1} - \mathbf{W}| = 0 \qquad —(2.4.2.14)$$

其中

$$\mathbf{W} = \boldsymbol{I\!I} \cdot \boldsymbol{I}^{-1} \qquad —(2.4.2.15)$$

W 矩阵就是 Weingarten 映射矩阵. 可以理解，当曲面定向改变时，$\boldsymbol{N}_r$ 将变成为 $-\boldsymbol{N}_r$，$\boldsymbol{I\!I}$ 将变成为 $-\boldsymbol{I\!I}$，主法曲率 κ_r^i 的符号因此改变，但 $|\kappa_r^i|$ 保持不变.

由此亦即知，R^m 空间上的 $m-1$ 维正则参数曲面片，应有 $m-1$ 个主法曲率 κ_r^i, $i=1, 2, \cdots, m-1$. 以及对应的 $m-1$ 个主法方向(记为 $\boldsymbol{u}_r^i$, $i=1, 2, \cdots, m-1$). 这里 κ_r^i、$\boldsymbol{u}_r^i$ 分别就是(2.4.2.13)式决定的 W 映射矩阵的特征值、特征向量. 注意，这里的主法方向向量 $\boldsymbol{u}_r^i$ 是指以下方程组的解，即设 λ_i 为(2.4.2.13)式的一个根，则

$$[\lambda_i \cdot \boldsymbol{I} - \boldsymbol{I\!I}]\boldsymbol{u}_r^i = \boldsymbol{0} \qquad —(2.4.2.16)$$

故若直接利用(2.4.2.14)式得到 W 矩阵的特征向量 $\hat{\boldsymbol{t}}_i$，

$$[\lambda \mathrm{I}_{m-1} - \mathbf{W}]\hat{\boldsymbol{t}}_i = \boldsymbol{0} \qquad —(2.4.2.17)$$

则应再通过变换得到 $\boldsymbol{u}_r^i$(见(1.2.32～33)式)，

$$\boldsymbol{u}_r^i = \boldsymbol{I}^{-1}\hat{\boldsymbol{t}}_i \qquad —(2.4.2.18)$$

最终得到 R^m 空间上曲面的主法方向向量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}_r^i}{((\boldsymbol{u}_r^i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{u}_r^i)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{I}^{-1}\hat{\boldsymbol{t}}_i}{(\hat{\boldsymbol{t}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}^{-1}\hat{\boldsymbol{t}}_i)^{\frac{1}{2}}} \qquad —(2.4.2.19)$$

对于正则参数曲面片 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$，若有可逆参数变换

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}) \qquad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in R^{m-1} \qquad —(2.4.2.20)$$

使

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})) \qquad —(2.4.2.21)$$

则应有

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{v}}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}} \qquad \text{—(2.4.2.22)}$$

可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}}=\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\right]^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{v}} \qquad \left(\text{且}\left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}}\right|\neq 0\right) \qquad \text{—(2.4.2.23)}$$

类似于(2.4.1.7～8)式，记 $\boldsymbol{n}_r$，$\boldsymbol{n}_y$(及 $\boldsymbol{N}_r$，$\boldsymbol{N}_y$)分别是 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$、$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{v}}$ 的列向量组由多重矢量积决定的单位法向量(及法向量)，则

$$\boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_y=\operatorname{sign}\left(\left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}}\right|\right) \qquad \text{—(2.4.2.24)}$$

$$\boldsymbol{N}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_y=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{v}}\right| \qquad \text{—(2.4.2.25)}$$

因此，若

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{v}}\right|>0 \Leftrightarrow \operatorname{sign}\left(\left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}}\right|\right)=1$$

则(2.4.2.20)式给出的参数变换是保持定向的，否则，是改变定向的.

由以上结果即可得正则参数曲面片上的 Gauss 总曲率(记为 κ)

$$\kappa=\kappa_r^1\cdot\kappa_r^2\cdot\cdots\cdot\kappa_r^{m-1}=|W|=\frac{|\mathrm{II}|}{|\mathrm{I}|}=\frac{|[\dot{\boldsymbol{r}}_1,\dot{\boldsymbol{r}}_2,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_{m-1},\ddot{\boldsymbol{r}}_{ij}]|}{\|\boldsymbol{N}_r\|^{m+1}} \qquad \text{—(2.4.2.26)}$$

平均曲率(记为 h)

$$h=\frac{\kappa_r^1+\kappa_r^2+\cdots+\kappa_r^{m-1}}{m-1}=\frac{trW}{m-1}=\frac{tr\,\mathrm{II}\cdot\mathrm{I}^{-1}}{m-1} \qquad \text{—(2.4.2.27)}$$

其中“tr”是取矩阵的迹.

由于正则参数曲面片的第一、第二基本形式在定义上不显含有 R^m 的 m 维数为参数，所以，许多 R^3 空间上的已有定理都可以顺利地沿用到 R^m 空间上去.以上关于法截曲率的 Meusnier 定理即为一例.虽然那里的分析在形式上并没有用到曲面基本形式，但后面会说明其实那里的分析方法与利用曲面基本形式的方法是等价的.以下，再推广 R^3 空间中关于曲面为球面的定理.

定理 2.4.2.1 R^m 空间中一正则曲面为球面的充要条件是在曲面任一点处，第二基本形式是第一基本形式的非零倍数. ■

证明: 设 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})\in R^m \quad \boldsymbol{u}\in D_u\subset R^{m-1}$ 是正则参数曲面片.若 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$为球面，则

应有

$$(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{r}_0)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{r}_0)=R^2 \qquad (R\neq 0)$$

其中 $\boldsymbol{r}_0$ 为常数(向量),R 为常数.则由

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{r}_0)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{r}_0)=\boldsymbol{0}$$

即知

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{r}_0)=\boldsymbol{0}$$

所以,法向量可取为

$$\boldsymbol{N}_r=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{r}_0$$

单位法向量可取为

$$\boldsymbol{n}_r=\frac{1}{R}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{r}_0)$$

得

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}_r}{\partial \boldsymbol{u}}=\frac{1}{R}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$$

便知

$$\boldsymbol{II}=-\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{n}_r}{\partial \boldsymbol{u}}=-\frac{1}{R}\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}=-\frac{1}{R}\boldsymbol{I}$$

必要性即证.

再设若 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的第一、二基本二次型矩阵之间存在关系

$$\boldsymbol{II}=\varphi(\boldsymbol{u})\boldsymbol{I} \qquad \boldsymbol{u}\in D_u \qquad \varphi(\boldsymbol{u})\neq 0$$

即

$$-\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{n}_r}{\partial \boldsymbol{u}}=\varphi\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$$

从而

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\\ \boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\left(\frac{\partial \boldsymbol{n}_r}{\partial \boldsymbol{u}}+\varphi\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)=\boldsymbol{0}$$

但由于 $\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\\ \boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$ 是满秩矩阵,故只能成立

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}_r}{\partial \boldsymbol{u}}+\varphi\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\frac{\partial \boldsymbol{n}_r}{\partial u_i}+\varphi\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}=0\quad i=1,2,\cdots,m-1$$

对以上右边的第 i 式求偏导数$\frac{\partial}{\partial u_j}$,有

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{n}_r}{\partial u_j\partial u_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}+\varphi\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_j\partial u_i}=\boldsymbol{0}$$

另再对第 j 式求偏导数 $\frac{\partial}{\partial u_i}$,有

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{n}_r}{\partial u_i\partial u_j}+\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j}+\varphi\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_i\partial u_j}=\boldsymbol{0}$$

这两式相比较知

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j}=\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}\qquad i,j=1,2,\cdots,m-1$$

故给定任一个 j 下标,有以下方程组成立

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_j}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_j}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\\ \qquad\vdots\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_{m-1}}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_j}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_{m-1}}\end{cases}\qquad j=1,2,\cdots,m-1$$

将此方程组两边求和,得

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j}=\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}$$

或表示为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_{j-1}}+\left(-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\right)\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j}+\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_{j+1}}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_{m-1}}=\boldsymbol{0}$$

同样,由于 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}\quad i=1,2,\cdots,m-1$ 是线性无关向量组,所以上式表示必只有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}=0\qquad j=1,2,\cdots,m-1$$

故知 $\varphi(\boldsymbol{u})=$ 常数.

设 $\varphi = R \neq 0$. 由以上的关系式

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}_r}{\partial \boldsymbol{u}} + R\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{n}_r + R \cdot \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$$

故有

$$\boldsymbol{n}_r + R \cdot \boldsymbol{r} = \text{常数(向量)}$$

不妨记为

$$\boldsymbol{n}_r + R \cdot \boldsymbol{r} = R \cdot \boldsymbol{r}_0 \quad (\boldsymbol{r}_0 \neq \boldsymbol{0})$$

即知

$$(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{r}_0)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{R^2}$$

所以 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$为球面. 充分性得证.

§2.4.3 R^m 空间上的 $m-1$ 维曲面的 Gauss - Codazzi 方程与 Gauss 曲率定理

虽然许多 R^3 空间上的定理都可以用到 R^m 空间上,但对于有些重要定理的推广,还是会出现一些新的情形. 这可以从 Gauss Egregium 定理的推广中看到. 为此,先给出 R^m 空间上 $m-1$ 维曲面的 **Gauss - Codazzi 方程**. 这组重要方程式在 R^m 空间上的形式如其在 R^3 空间上的形式. 但在本书中不使用 Einstein 和式约定下的简写形式,而仍使用向量-矩阵形式.

设 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$关于 $\boldsymbol{u}$ 三次可微. 由于$\dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_{m-1}$及 $\boldsymbol{n}_r$ 是R^m 空间上的极大线性无关向量组,故以此为基,可构造以下方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} = \dot{\boldsymbol{r}}_i & i = 1, 2, \cdots, m-1 & \text{—(2.4.3.1)} \\ \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_i \partial u_j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} \Gamma_{ij}^k \dot{\boldsymbol{r}}_k^{\mathrm{T}} + C_{ij}\boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}} & i, j = 1, 2, \cdots, m-1 & \text{—(2.4.3.2)} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}}}{\partial u_i} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} D_{ik}\dot{\boldsymbol{r}}_k^{\mathrm{T}} + D_i\boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}} & i = 1, 2, \cdots, m-1 & \text{—(2.4.3.3)} \end{cases}$$

由(2.4.3.2)式,可得

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_i \partial u_j}\boldsymbol{n}_r = C_{ij} \Rightarrow C_{ij} = I\!I_{ij} \qquad \text{—(2.4.3.4)}$$

即 C_{ij}就是第二基本不变量.

由

$$\boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r = 1 \Rightarrow \frac{\partial \boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}}}{\partial u_i}\boldsymbol{n}_r = 0$$

得(2.4.3.3)式

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}}}{\partial u_i}\boldsymbol{n}_r = D_i = 0$$

再由(2.4.3.3)式

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}}}{\partial u_i}\dot{\boldsymbol{r}}_j = \sum_{k=1}^{m-1} D_{ik}\,\dot{\boldsymbol{r}}_k^{\mathrm{T}}\,\dot{\boldsymbol{r}}_j \qquad i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$$

可将此式写成矩阵形式，

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}}}{\partial u_i}\dot{\boldsymbol{r}}_j\right] = \left[\sum_{k=1}^{m-1} D_{ik}\,\dot{\boldsymbol{r}}_k^{\mathrm{T}}\,\dot{\boldsymbol{r}}_j\right] \qquad i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$$

由$\boldsymbol{I}$、$\boldsymbol{II}$ 矩阵的定义

$$\boldsymbol{I} = [\dot{\boldsymbol{r}}_k^{\mathrm{T}}\,\dot{\boldsymbol{r}}_j] \qquad \boldsymbol{II} = \left[-\frac{\partial \boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}}}{\partial u_i}\dot{\boldsymbol{r}}_j\right] \qquad i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$$

并记(2.4.3.3)式中的系数项 D_{ik} 组成以下矩阵，

$$D = [D_{ik}] \qquad i,\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$$

即得

$$-\boldsymbol{II} = D\cdot\boldsymbol{I} \Rightarrow D = -\boldsymbol{II}\cdot\boldsymbol{I}^{-1} = -W \qquad \text{—(2.4.3.5)}$$

所以，(2.4.3.3)式中的$-D_{ik}$系数就是 Weingarten 映射矩阵 W 的对应下标元素(取负号)。

由(2.4.3.2)式，可作内积

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_i \partial u_j}\dot{\boldsymbol{r}}_s = \ddot{\boldsymbol{r}}_{ij}^{\mathrm{T}}\,\dot{\boldsymbol{r}}_s = \sum_{k=1}^{m-1}\Gamma_{ij}^k\dot{\boldsymbol{r}}_k^{\mathrm{T}}\,\dot{\boldsymbol{r}}_s \qquad s = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$$

或写成以下(转置)形式，

$$\sum_{k=1}^{m-1}\dot{\boldsymbol{r}}_s^{\mathrm{T}}\,\dot{\boldsymbol{r}}_k\cdot\Gamma_{ij}^k = \dot{\boldsymbol{r}}_s^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{r}}_{ij} \qquad s = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$$

规定使用以下向量符号

$$\boldsymbol{\Gamma}_{ij} = (\Gamma_{ij}^1,\ \Gamma_{ij}^2,\ \cdots,\ \Gamma_{ij}^{m-1})^{\mathrm{T}} \qquad \text{—(2.4.3.6)}$$

可将前一式写成以下矩阵形式

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\right]\cdot\boldsymbol{\Gamma}_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_{ij} \qquad i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1 \qquad \text{—(2.4.3.7)}$$

从而，有

$$\boldsymbol{\Gamma}_{ij}=\boldsymbol{I}^{-1}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{u}}\ddot{\boldsymbol{r}}_{ij}\qquad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1\qquad —(2.4.3.8)$$

然后，易知有以下关系，

$$\dot{\boldsymbol{r}}_s^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial u_i\partial u_j}=\dot{\boldsymbol{r}}_s^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{r}}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_s^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{r}}_j)}{\partial u_i}+\frac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_s^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{r}}_i)}{\partial u_j}-\frac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_i^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{r}}_j)}{\partial u_s}\right)$$

$$s=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1\qquad —(2.4.3.9)$$

并规定使用以下向量符号

$$\boldsymbol{\Gamma}^{ij}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_1^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{r}}_j)}{\partial u_i}+\dfrac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_1^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{r}}_i)}{\partial u_j}-\dfrac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_i^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{r}}_j)}{\partial u_1}\\ \dfrac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_2^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{r}}_j)}{\partial u_i}+\dfrac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_2^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{r}}_i)}{\partial u_j}-\dfrac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_i^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{r}}_j)}{\partial u_2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_{m-1}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{r}}_j)}{\partial u_i}+\dfrac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_{m-1}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{r}}_i)}{\partial u_j}-\dfrac{\partial(\dot{\boldsymbol{r}}_i^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{r}}_j)}{\partial u_{m-1}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Gamma_{ij1}\\ \Gamma_{ij2}\\ \vdots\\ \Gamma_{ij(m-1)}\end{bmatrix}\qquad —(2.4.3.10)$$

因 $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{u}}\ddot{\boldsymbol{r}}_{ij}=\boldsymbol{\Gamma}^{ij}$ 代入(2.4.3.8)式，得

$$\boldsymbol{\Gamma}_{ij}=\boldsymbol{I}^{-1}\cdot\boldsymbol{\Gamma}^{ij}\qquad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1\qquad —(2.4.3.11)$$

这里 $\boldsymbol{\Gamma}_{ij}$ 的分量 Γ_{ij}^k，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ 即为**联络系数(Christoffel 记号)**，并且，由(2.4.3.11)式，其等号右边完全是由第一基本二次型矩阵的元素(即第一基本不变量元素)及其偏导数经代数运算组合起来的项，故联络系数 Γ_{ij}^k 完全由第一基本不变量决定，并且 Γ_{ij}^k 关于下标 i，j 是对称的，即

$$\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k$$

至此，(2.4.3.2～3)式中的系数已都给出.

再对(2.4.3.2)式等号两边同时求 $\dfrac{\partial}{\partial u_t}$ 的偏导数，有

$$\frac{\partial}{\partial u_t}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_i\partial u_j}\right)=\frac{\partial}{\partial u_t}\left(\sum_{k=1}^{m-1}\Gamma_{ij}^k\dot{\boldsymbol{r}}_k^{\mathrm{T}}+C_{ij}\boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}}\right)$$

将上式右边各项求导，并将(2.4.3.2～3)式代入，经整理，便有

$$\frac{\partial^3\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_t\partial u_i\partial u_j}=\frac{\partial^2\dot{\boldsymbol{r}}_j^{\mathrm{T}}}{\partial u_t\partial u_i}$$

$$\frac{\partial^2 \dot{\boldsymbol{r}}_j^{\mathrm{T}}}{\partial u_t \partial u_i}=\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u_t}+\sum_{h=1}^{m-1}\Gamma_{ij}^h\Gamma_{th}^k+C_{ij}D_{tk}\right)\dot{\boldsymbol{r}}_k^{\mathrm{T}}+\left(\sum_{h=1}^{m-1}\Gamma_{ij}^h C_{th}+\frac{\partial C_{ij}}{\partial u_t}\right)\boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}}$$

—(2.4.3.12)

由可积性要求

$$\frac{\partial^2 \dot{\boldsymbol{r}}_j^{\mathrm{T}}}{\partial u_t \partial u_i}=\frac{\partial^2 \dot{\boldsymbol{r}}_j^{\mathrm{T}}}{\partial u_i \partial u_t}$$

以及由(2.4.3.12)式，将下标中的 t、i 位置互换，得

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_j^{\mathrm{T}}}{\partial u_i \partial u_t}=\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial \Gamma_{tj}^k}{\partial u_i}+\sum_{h=1}^{m-1}\Gamma_{tj}^h\Gamma_{ih}^k+C_{tj}D_{ik}\right)\dot{\boldsymbol{r}}_k^{\mathrm{T}}+\left(\sum_{h=1}^{m-1}\Gamma_{tj}^h C_{ih}+\frac{\partial C_{tj}}{\partial u_i}\right)\boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}}$$

—(2.4.3.13)

将(2.4.3.12)式减去(2.4.3.13)式，按可积条件应知结果为 0，由 $\dot{\boldsymbol{r}}_1$，$\dot{\boldsymbol{r}}_2$，…，$\dot{\boldsymbol{r}}_{m-1}$ 及 $\boldsymbol{n}_r$ 是线性无关向量组知，应有

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u_t}-\frac{\partial \Gamma_{tj}^k}{\partial u_i}+\sum_{h=1}^{m-1}(\Gamma_{ij}^h\Gamma_{th}^k-\Gamma_{tj}^h\Gamma_{ih}^k)+C_{ij}D_{tk}-C_{tj}D_{ik}=0$$

$$i,\ j,\ t,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$$

—(2.4.3.14)

$$\sum_{h=1}^{m-1}(\Gamma_{ij}^h C_{th}-\Gamma_{tj}^h C_{ih})+\frac{\partial C_{ij}}{\partial u_t}-\frac{\partial C_{tj}}{\partial u_i}=0\quad i,\ j,\ t=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$$

—(2.4.3.15)

(2.4.3.14～15)式方程组就是 Gauss-Codazzi 方程组(即可积性条件)的一个形式. 附带说明，$\frac{\partial \boldsymbol{n}_r}{\partial u_i}$ 函数的可积性条件仍就是(2.4.3.15)式(亦可见下节内容). 由于 $\boldsymbol{n}_r$ 是 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 向量组的多重矢量积的结果，故 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 的可积性已保证了 $\frac{\partial \boldsymbol{n}_r}{\partial u_i}$ 的可积性.

规定使用以下符号

$$R_{itj}^k=\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u_t}-\frac{\partial \Gamma_{tj}^k}{\partial u_i}+\sum_{h=1}^{m-1}(\Gamma_{ij}^h\Gamma_{th}^k-\Gamma_{tj}^h\Gamma_{ih}^k)\qquad —(2.4.3.16)$$

则(2.4.3.14～15)式可表示成

$$R_{itj}^k=-(C_{ij}D_{tk}-C_{tj}D_{ik})\qquad k,\ t,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$$

—(2.4.3.17)

$$\frac{\partial C_{tj}}{\partial u_i}-\frac{\partial C_{ij}}{\partial u_t}=\sum_{h=1}^{m-1}(\Gamma_{ij}^h C_{th}-\Gamma_{tj}^h C_{ih})\quad t,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$$

—(2.4.3.18)

对 $k=1, 2, \cdots, m-1$，将(2.4.3.17)式写成矩阵形式. 为此，记(2.4.3.2)式中的 C_{ij} 组成的矩阵为

$$C=[C_{ij}]=[\mathit{II}_{ij}]=\mathit{II}$$

并记 C 矩阵的行向量用 $\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}$ 表示. 同时，对(2.4.3.3)式中的 D_{ik} 系数，使用行向量符号

$$\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}=(D_{i1}, D_{i2}, \cdots, D_{i(m-1)})$$

即(2.4.3.5)式中的矩阵 D，可表示为(行向量形式)

$$D=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{d}_{m-1}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

类似地，对(2.4.3.16)式中的 R_{itj}^{k}，$k=1, 2, \cdots, m-1$，使用向量符号

$$\boldsymbol{R}_{itj}=(R_{itj}^{1}, R_{itj}^{2}, \cdots, R_{itj}^{m-1})^{\mathrm{T}}$$

由(2.4.3.5)式，得

$$-\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{I}^{-1} \qquad —(2.4.3.19)$$

所以，(2.4.3.17)式对 $k=1, 2, \cdots, m-1$ 个方程可记为

$$\boldsymbol{R}_{itj}^{\mathrm{T}}=-(C_{ij}\boldsymbol{d}_t^{\mathrm{T}}-C_{tj}\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}) \qquad —(2.4.3.20)$$

将(2.4.3.19)式代入(2.4.3.20)式，并用$\boldsymbol{I}$ 矩阵右乘等号两边，得

$$\boldsymbol{R}_{itj}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{I}=C_{ij}\boldsymbol{c}_t^{\mathrm{T}}-C_{tj}\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}} \qquad —(2.4.3.21)$$

现记

$$\boldsymbol{R}_{itj}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{I}=(R_{itj1}, R_{itj2}, \cdots, R_{itj(m-1)}) \qquad —(2.4.3.22)$$

由(2.4.3.21)式，得(并写成列向量形式)

$$\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{R}_{itj}=\begin{bmatrix}R_{itj1}\\ R_{itj2}\\ \vdots\\ R_{itj(m-1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{ij}C_{t1}-C_{tj}C_{i1}\\ C_{ij}C_{t2}-C_{tj}C_{i2}\\ \vdots\\ C_{ij}C_{t(m-1)}-C_{tj}C_{i(m-1)}\end{bmatrix} \qquad —(2.4.3.23)$$

或者将(2.4.3.23)式中的单个方程写成为

$$R_{itjk}=C_{ij}C_{tk}-C_{ik}C_{tj} \quad i, j, t, k=1, 2, \cdots, m-1 \qquad —(2.4.3.24)$$

R_{itj}^{k}、R_{itjk}就是 **Riemann** 符号. R_{itjk}也完全由第一基本不变量及其偏导数决定.

注意到(2.4.3.4)式,可将(2.4.3.24)式写成以下形式,

$$R_{itjk}=\left|I\!I\begin{Bmatrix}i,t\\j,k\end{Bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}C_{ij}&C_{ik}\\C_{tj}&C_{tk}\end{vmatrix}\qquad i,j,t,k=1,2,\cdots,m-1$$

—(2.4.3.25)

其中 $\left|I\!I\begin{Bmatrix}\mathrm{i},\mathrm{t}\\\mathrm{j},\mathrm{k}\end{Bmatrix}\right|$ 表示的是$I\!I$ 矩阵的第 i, t 行、第 j, k 列元素组成的 2 阶子矩阵的行列式. 故 R_{itjk} 等价于第二基本二次型矩阵的对应下标元素组成的 2 阶子行列式. 而由(2.4.3.17)式,也可以将 R^k_{itj} 符号表示成

$$R^k_{itj}=-\begin{vmatrix}C_{ij}&D_{ik}\\C_{tj}&D_{tk}\end{vmatrix}\qquad i,j,t,k=1,2,\cdots,m-1\quad —(2.4.3.26)$$

所以,R^k_{itj} 也等价于一个 2 阶行列式. 这一行列式的第一列元素是第二基本二次型矩阵的元素 C_{ij}、C_{tj},而第二列元素则是$-W$ 映射矩阵的元素 D_{ik}、D_{tk}.

这里应当说明的是,(2.4.3.25～26)式所表述的意思是 R^k_{itj}、R_{itjk} 符号的等价意义,而不是表示构造性的定义. 而(2.4.3.16)、(2.4.3.22)式才是构造性的. 反过来说,(2.4.3.16、22)式又仅仅是构造性的,而只有(2.4.3.25～26)式才是赋于意义的. 内蕴几何分析方法的基础条件就是(2.4.3.25～26)式的存在性.

这里涉及到的问题容易引起混淆,应着重再予说明. Riemann 符号 R_{itjk}、R^k_{itj} 共涉及到(2.4.3.16)式、(2.4.3.25～26)式和(2.4.3.23)式. (2.4.3.23)式是表示 R_{itjk} 符号可由矩阵$\boldsymbol{I}$ 及符号 R^k_{itj} 构造出来. 因此,可以说 R_{itjk}、R^k_{itj} 符号都是由(2.4.3.16)式决定的关系被构造出来的. 但是,(2.4.3.16)式**仅仅是**一个构造的公式并没有包含 R_{itjk}、R^k_{itj} 符号任何意义上的信息. 单纯凭借(2.4.3.16)式(及(2.4.3.23)式),所构造出来的这两个符号就是没有意义的. 因此,要使 R_{itjk}、R^k_{itj} 符号具有意义,必须依赖(2.4.3.25～26)式的成立. 所以,就可以将(2.4.3.25～26)式当作 R_{itjk}、R^k_{itj} 的定义(意义上的)公式. 这即说明,在使用内蕴几何的分析方法,利用 R_{itjk}、R^k_{itj} 符号的运算去构造关于曲面的曲率的各种量值时,前提条件必须是(2.4.3.16)式、(2.4.3.25～26)式和(2.4.3.23)式这几个关系均是成立的.

因为这几个关系式均来自于(2.4.3.14～15)式所给出的这一形式的 Gauss-Codazzi 方程组. 所以,只要 Gauss-Codazzi 方程组成立**并且**具(2.4.3.14～15)式给出的形式,那么,以上所指的诸关系式就一定成立. 从而,利用 R_{itjk}、R^k_{itj} 符号对曲率作各种内蕴几何分析就是可行的.

但是,(2.4.3.14～15)式所给出的这一形式的 Gauss-Codazzi 方程组,完全依赖于曲面的维数是 $m-1$ 这一条件. 由下一节的分析将说明,当曲面的维数是 n,且 $n<m-1$, Gauss-Codazzi 方程组在形式上就不同于(2.4.3.14～15)式给

出的形式. 这是因为,在 n 维曲面 ($n<m-1$) 上,曲面将具有无数个法方向而不只有唯一一个(定向的)法方向. 由此导致(2.4.3.14～15)式形式上的改变,将使(2.4.3.25～26)式的形式发生改变,即(2.4.3.25～26)式在 n 维曲面 ($n<m-1$) 上将不再具有这种形式. 这个情形就决定了利用内蕴几何分析方法去解决 R^m 空间上的 n 维曲面的曲率问题将面临的限制性条件. 具体的分析可见下一节内容.

由行列式的性质,Ⅱ 矩阵的对称性质,以及(2.4.3.25～26)两式,马上可知几个关系式.

对于 R_{itjk} 符号有

$$\begin{cases} R_{itjk}=R_{tikj}=R_{jkit}=R_{kjti}=-R_{itkj}=-R_{tijk}=-R_{jkti}=-R_{kjit} \\ R_{itjk}=R_{tikj}=-R_{itkj}=-R_{tijk} \quad \text{当 } i=j \text{ and } t=k \text{ 时} \end{cases} \tag{2.4.3.27}$$

$$R_{itjk}=R_{ikjt}=R_{jkit} \quad \text{当 } i=j \text{ 时} \tag{2.4.3.28}$$

$$R_{itjk}=0 \quad \text{当 } i=t \text{ or } j=k \text{ 时} \tag{2.4.3.29}$$

$$\begin{cases} R_{itjk}+R_{tjik}+R_{jitk}=0 \\ R_{itjk}+R_{tkji}+R_{kijt}=0 \\ R_{itjk}+R_{jtki}+R_{ktij}=0 \\ R_{itjk}+R_{ijkt}+R_{iktj}=0 \end{cases} \tag{2.4.3.30}$$

对于 R^k_{itj} 符号亦有

$$\begin{cases} R^k_{itj}=-R^k_{tij} \\ R^k_{iij}=0 \\ R^k_{itj}+R^k_{tji}+R^k_{jit}=0 \end{cases} \tag{2.4.3.31}$$

以上

(2.4.3.2)式是 Gauss 公式

(2.4.3.3)式是 Weingartan 公式(省去 $D_i\boldsymbol{n}_r^{\mathrm{T}}$ 项)

(2.4.3.24)式是 Gauss 方程

(2.4.3.18)式是 Codazzi 方程

(2.4.3.30)式是 Bianchi(第一)恒等式. 它表示 R_{itjk} 的 4 个下标中,固定其中的一个(用黑体写出),其余 3 个下标次序轮换的和为 0[1].

但 Bianchi 恒等式在 R_{itjk} 符号的 4 个下标不是互不相同时,就不是一个独立的关系式(已包含在(2.4.3.27)式之中). 仅当 R_{itjk} 的 4 个下标为互不相同(这又

---

〔1〕 参见《张量算法》,吕盘明,中国科技大学出版社,2004 年第 123～124 页.

隐含曲面所在的空间 R^m 的维数 $m \geqslant 5$) 时，Bianchi 恒等式方成为一个独立的关系式.

(2.4.3.31)式的第 3 式则是 Ricci 恒等式[1].

注意(2.4.3.27～31)式给出的关系式(特别是(2.4.3.27)式)与传统文献上的表述是有差别的. 可以预先指出，利用(2.4.3.27～30)式便可准确地确定 R_{itjk} 全部分量中非 0 独立分量的个数(见下文所述)[2].

利用以上成果，即可推出 R^m 空间上的 Gauss 曲率定理. 为此，先说明以下引理.

引理 2.4.3.1 R^m 空间上的正则参数曲面片，由

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) \in S \subset R^m \qquad \boldsymbol{u} \in D_u \subset R^{m-1}$$

表示. 则 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的第二基本不变量 II_{ij} 不为 0 的充要条件，是 $\ddot{\boldsymbol{r}}_{ij}$ 与 $\dot{\boldsymbol{r}}_1$, $\dot{\boldsymbol{r}}_2$, …, $\dot{\boldsymbol{r}}_{m-1}$ 向量组线性无关. ■

由(2.4.2.11)式即知此引理成立. 此引理表明不为 0 的第二基本不变量是不能由 $\dot{\boldsymbol{r}}_1$, $\dot{\boldsymbol{r}}_2$, …, $\dot{\boldsymbol{r}}_{m-1}$ 向量组的线性组合表出的. 但是，另一方面(2.4.3.25)式表明，第二基本二次型矩阵的任一个 2 阶子行列式，都可由第一基本不变量及其偏导数的代数运算组合(即 R_{itjk} 符号)表出. 利用这个性质，可以得到第二基本二次型矩阵 II 的行列式(或行列式绝对值)，也可以由第一基本不变量及其偏导数通过代数运算组合表出. 为此，先说明一般情况下的 $n \times n$ 阶矩阵 A 的 k 阶伴随矩阵 A_k 与 A 的相互关系.

一般地，设 $A \in R^{n \times n}$ 是任一方阵，$n > 1$. k 是数 1, 2, …, n 中的任一个. 并记

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

用 s_1, s_2, …, $s_{\binom{n}{k}}$ 表示从 n 个数 1, 2, …, n 中取 k 个数的一切可能的组合. s

---

[1] 参见《张量算法》，吕盘明编著，第 123～124 页.

[2] 文献上关于 R_{itj}^k、R_{itjk} 这一类符号的构造形式并无统一的规定. 因此须注意不同文献上类似符号间的对应方式. 试举下例. 在《微分几何初步》陈维桓编著，第 138 页中，有以下关系式(利用 Einstein 和式约定)

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta}}{\partial u^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}\Gamma_{\eta\gamma}^{\delta} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta}\Gamma_{\eta\beta}^{\delta} = b_{\alpha\beta}b_{\gamma}^{\delta} - b_{\alpha\gamma}b_{\beta}^{\delta}$$

其中 $b_{\alpha\beta}$ 是第二基本不变量，故对应于本书的符号是 $C_{\alpha\beta}$，而 $b_{\gamma}^{\delta} = b_{\gamma\xi}g^{\xi\delta}$，其中 $g^{\xi\delta}$ 是第一基本二次型矩阵的逆矩阵元素，故 b_{γ}^{δ} 对应于本书的符号是 $-D_{\gamma\delta}$. 故上式若用本书符号规则对应地予以表示，应是由

$$b_{\alpha\beta}b_{\gamma}^{\delta} - b_{\alpha\gamma}b_{\beta}^{\delta} \Leftrightarrow -C_{\alpha\beta}D_{\gamma\delta} + C_{\alpha\gamma}D_{\beta\delta} = \begin{vmatrix} C_{\gamma\alpha} & D_{\gamma\delta} \\ C_{\beta\alpha} & D_{\beta\delta} \end{vmatrix} = -R_{\gamma\beta\alpha}^{\delta}$$

故知下标对应关系 $\gamma \Leftrightarrow i \quad \beta \Leftrightarrow t \quad \alpha \Leftrightarrow j \quad \delta \Leftrightarrow k$ 并有对应关系 $R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} \Leftrightarrow -R_{itj}^{k}$. 余类推.

的编号任意,但在以下顺序不变.设有

$$s_t = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \quad s_p = \{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$$

s_t, s_p 均是 1, 2, …, n 的 k 个数的子列. 记 $A\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{Bmatrix}$ 是 A 矩阵的第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行与第 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 列元素组成的子矩阵,并记

$$\mu_{tp} = \left| A\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{Bmatrix} \right| \qquad t, p = 1, 2, \cdots, \binom{n}{k}$$

即 μ_{tp} 是矩阵 A 的 k 阶子矩阵的行列式.则,

$$A_k = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1\binom{n}{k}} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2\binom{n}{k}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{\binom{n}{k}1} & \mu_{\binom{n}{k}2} & \cdots & \mu_{\binom{n}{k}\binom{n}{k}} \end{bmatrix}$$

称为 A 的 k 阶伴随矩阵. A_k 矩阵具有以下性质,

(i) 对任一 $s_t = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 中的 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 子列重新排列, A_k 的行列式 $|A_k|$ 的值不变.

(ii) $|A_k| = |A|^{C_{n-1}^{k-1}}$

(iii) 记 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值(可有重根存在),则 A_k 矩阵的特征值是 $\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdot\cdots\cdot\lambda_{i_k}$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n)$,即矩阵 A 的特征值中取 k 个的所有可能的乘积.

k 阶伴随矩阵还有其他一些性质,在此不再详述[1].

利用以上 k 阶伴随矩阵行列式与原矩阵行列式的关系这一性质(ii),用 Riemann 符号 R_{itjk},即可构造出第二基本二次型矩阵 $\mathbb{I}$ 的 2 阶伴随矩阵. 如以上作法,设 $\mathbb{I}$ 是 $(m-1)\times(m-1)$ 阶矩阵,且 $m \geqslant 3$, 记

$$s_p = \{i_1, i_2\},\ p = 1, 2, \cdots, \binom{m-1}{2} = \frac{(m-2)(m-1)}{2}$$

i_1, i_2 是 1, 2, …, $m-1$ 中的任意 2 个数字, s_p 的下标顺序任意选定. 则对于 R_{itjk} 因子(设 $i \neq t$, $j \neq k$), 按

$$\{i, t\} = s_p \qquad \{j, k\} = s_z$$

可取得下标 p、z 并记

---

〔1〕 k 阶伴随矩阵的性质及描述,引自《线性代数习题集》, И. В. 普罗斯库烈柯夫,周晓钟译,人民教育出版社,1981 年,第 551 题、第 969 题、第 1145 题及说明,并且,那里已附有具体的证明提示.

$$R_{itjk} = \mu_{pz}$$

不妨取 $i<t$, $j<k$, $i, j=1, \cdots, m-2$; $t, k=2, \cdots, m-1$. 则有$\mathbb{I}$的 2 阶伴随矩阵$\mathbb{I}_2$

$$\mathbb{I}_2 = [\mu_{pz}] \qquad p, z = 1, 2, \cdots, \binom{m-1}{2} \qquad —(2.4.3.32)$$

$\mathbb{I}_2$是 $\binom{m-1}{2} \times \binom{m-1}{2}$ 阶矩阵. 且由以上性质(ii),得

$$|\mathbb{I}_2| = |\mathbb{I}|^{m-2}$$

这里

$$m-2 = C_{(m-1)-1}^{k-1} = \frac{(m-2)!}{(k-1)!(m-k-1)!} \qquad (\text{令 } k=2)$$

所以,可以得到

$$|\mathbb{I}_2|^{\frac{1}{m-2}} = \begin{cases} |\mathbb{I}| & \text{当 } m \text{ 是奇数} \\ |(|\mathbb{I}|)| & \text{当 } m \text{ 是偶数} \end{cases} \qquad —(2.4.3.33)$$

(2.4.3.33)式的意思是说,当只用第一基本不变量及其偏导数的代数运算组合时,则在奇数维的 R^m 空间上,可以得到第二基本二次型矩阵$\mathbb{I}$的行列式值,但在偶数维的 R^m 空间上,则只能得到$\mathbb{I}$矩阵行列式的绝对值. 这即是表示,在偶数维的 R^m 空间上,只凭第一基本不变量及其偏导数的代数运算组合,就不能判断出$\mathbb{I}$矩阵行列式的符号.

再由(2.4.2.26)式,得 Gauss 曲率 κ 可表示成

$$\begin{cases} \kappa = \dfrac{|\mathbb{I}_2|^{\frac{1}{m-2}}}{|I|} & \text{当 } m \text{ 是奇数} \\ |\kappa| = \dfrac{|\mathbb{I}_2|^{\frac{1}{m-2}}}{|I|} & \text{当 } m \text{ 是偶数} \end{cases} \qquad —(2.4.3.34)$$

当 $m=3$, m 是奇数,Gauss 曲率就可以用第一基本不变量及其偏导数的代数运算组合表出,且此时显然就有

$$|\mathbb{I}_2| = \mu_{11} = R_{1212} = |\mathbb{I}| \qquad (s_1 = \{1, 2\})$$

$$\kappa = \frac{R_{1212}}{(\dot{\boldsymbol{r}}_1^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_1)\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}_2^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_2) - (\dot{\boldsymbol{r}}_1^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_2)(\dot{\boldsymbol{r}}_2^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_1)} \qquad —(2.4.3.35)$$

可以对(2.4.3.34)式给予进一步的说明,以看到奇(偶)维的 R^m 空间存在的几何性质上的差异. 注意由 W 映射及主法曲率 κ_r^i 的定义,在 R^m 空间上的曲面上,有 $m-1$ 个主法曲率 κ_r^i,且 Gauss 曲率 κ 是 $m-1$ 个主法曲率 κ_r^i 的乘积. 所

以,κ 的符号由取负值的 κ_i^i 的个数是奇数或偶数(0 归于偶数)来决定. 并且,当曲面定向反向时,主法曲率 κ_i^i 的符号要改变. 于是可知

当 m 为奇数,则 $m-1$ 为偶数. 若 Gauss 曲率 $\kappa<0 \Rightarrow |\mathit{II}|<0$, 则必有 m_1 个主法曲率 $\kappa_i^i<0$, 且 m_1 定为奇数. 且还必有 m_2 个主法曲率 $\kappa_i^i>0$, 故 $m_2=(m-1)-m_1$ 也必为奇数. 现在,改变曲面的定向(使定向反向),则原先取负值的 m_1 个主法曲率 κ_i^i 将取正值(绝对值不变),原先取正值的 m_2 个主法曲率 κ_i^i 将取负值(绝对值不变),但因为 m_1、m_2 均为奇数,故在奇数维 R^m 空间上,在曲面定向改变时,Gauss 曲率 κ 的代数值(符号、绝对值)保持不变.

但当 m 为偶数,则 $m-1$ 为奇数. 若曲面的 $m-1$ 个主法曲率 κ_i^i 中含有 m_1 个负数值,且含有 m_2 个正数值,即 Gauss 曲率 $\kappa\neq 0$, 且设 $m_1>0$. 则 m_1、m_2 中只能是一个为奇数另一个为偶数. 那么,当曲面改变定向时,若 m_1 是奇数,则原先应有 $\kappa<0$, 而改变定向后便有 $\kappa>0$; 若 m_1 是偶数,则原先应有 $\kappa>0$, 而改变定向后便有 $\kappa<0$. 所以,在偶数维的 R^m 空间上,曲面定向的改变使 Gauss 曲率 κ 的符号发生改变. 或者说,在偶数维的 R^m 空间上,当曲面的定向反向时,只有 Gauss 曲率 κ 的绝对值保持不变. 故在偶数维 R^m 空间上,Gauss 曲率 κ 只是定向改变时的半不变量.

定义 2.4.3.1 记 κ^0 是 R^m 空间 $(m\geqslant 3)$ 上正则参数曲面片的 Gauss 曲率 κ 在曲面定向改变时的不变量. 则 R^m 是奇数维空间时, $\kappa^0=\kappa$; 在 R^m 是偶数维空间时, $\kappa^0=|\kappa|$. ■

简称 κ^0 为 Gauss 曲率不变量.

定理 2.4.3.2 (广义的 Gauss 曲率定理) R^m 空间上 $m-1$ 维正则参数曲面片的 Gauss 曲率不变量 κ^0 完全由曲面的第一基本形式决定. ■

由 κ^0 的定义,当 $m=3$, 定理 2.4.3.2 就是 Gauss Egregium 定理. 注意,定理中的"$m-1$ 维曲面"这一条件是不能省略的.

从(2.4.3.34)式可以清楚地看到,当且仅当(2.4.3.25~26)式是存在的,才能够去用 R_{itjk} 符号构造出 II 矩阵的 2 阶伴随矩阵,并由此得到(2.4.3.34)式. 倘若(2.4.3.25~26)式不存在(或其形式变化了),而单纯凭借(2.4.3.16)式给出的 R_{itjk} 符号的构造性算法,就不能够导出(2.4.3.34)式这一结果. 从而也就没办法断言 R_{itjk} 符号可以通过一些运算去构造出 Gauss 曲率.

附注 1: R_{itjk}、R_{itj}^k 符号的变换关系

已知在 R^m 空间上的正则参数曲面片 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ $\boldsymbol{u}\in D_u\subset R^{m-1}$ 的第一、二基本不变量矩阵 $\boldsymbol{I}$、II 在一个可行参数变换 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})$ 作用下,新的第一、二基本不变量矩阵 $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{v})$、$\mathit{II}(\boldsymbol{v})$ 与 $\boldsymbol{I}$、II 矩阵之间成立合同变换关系

$$Q=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}}=\left[\frac{\partial u_i}{\partial v_j}\right]\quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$$

$$\mathrm{I}(\boldsymbol{v})=Q^{\mathrm{T}}\,\mathrm{I}\,Q \qquad \mathrm{II}(\boldsymbol{v})=Q^{\mathrm{T}}\,\mathrm{II}\,Q$$

记

$$\mathrm{I}=[g_{ij}] \qquad \mathrm{I}^{-1}=[g^{ij}]$$

$$\mathrm{II}=[C_{ij}] \qquad Q=[q_{ij}] \qquad Q^{-1}=[q^{ij}]$$

$$\mathrm{I}(\boldsymbol{v})=[\tilde{g}_{ij}] \qquad \mathrm{II}(\boldsymbol{v})=[\tilde{C}_{ij}] \qquad \mathrm{I}^{-1}(\boldsymbol{v})=[\tilde{g}^{ij}]$$

并规定

$$\tilde{R}_{itjk}=\begin{vmatrix}\tilde{C}_{ij} & \tilde{C}_{ik}\\ \tilde{C}_{tj} & \tilde{C}_{tk}\end{vmatrix}$$

显然

$$\tilde{C}_{ij}=(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}})_i\,\mathrm{II}\,\boldsymbol{q}_j$$

其中$(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}})_i$是$Q^{\mathrm{T}}$矩阵的第$i$行向量即$Q$矩阵的第$i$列向量，$\boldsymbol{q}_j$则是$Q$矩阵的第$j$列向量. 所以，可以有

$$\tilde{C}_{ij}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{m-1}C_{\alpha\beta}q_{\alpha i}q_{\beta j}$$

$$\tilde{C}_{ik}=\sum_{\alpha,\gamma=1}^{m-1}C_{\alpha\gamma}q_{\alpha i}q_{\gamma k}$$

$$\tilde{C}_{tj}=\sum_{\zeta,\beta=1}^{m-1}C_{\zeta\beta}q_{\zeta t}q_{\beta j}$$

$$\tilde{C}_{tk}=\sum_{\zeta,\gamma=1}^{m-1}C_{\zeta\gamma}q_{\zeta t}q_{\gamma k}$$

这里(及以下)引用缩写符号

$$\sum_{a,b,\cdots,=1}^{n}\Leftrightarrow\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n}\cdots$$

于是可得到

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{itjk}&=\tilde{C}_{ij}\tilde{C}_{tk}-\tilde{C}_{ik}\tilde{C}_{tj}\\&=\sum_{\alpha,\zeta,\beta,\gamma=1}^{m-1}C_{\alpha\beta}C_{\zeta\gamma}q_{\alpha i}q_{\beta j}q_{\zeta t}q_{\gamma k}-\sum_{\alpha,\zeta,\beta,\gamma=1}^{m-1}C_{\alpha\gamma}C_{\zeta\beta}q_{\alpha i}q_{\gamma k}q_{\zeta t}q_{\beta j}\\&=\sum_{\alpha,\zeta,\beta,\gamma=1}^{m-1}(C_{\alpha\beta}C_{\zeta\gamma}-C_{\alpha\gamma}C_{\zeta\beta})q_{\alpha i}q_{\beta j}q_{\zeta t}q_{\gamma k}\end{aligned}$$

所以，

$$\widetilde{R}_{it jk} = \sum_{\alpha,\zeta,\beta,\gamma=1}^{m-1} R_{\alpha\zeta\beta\gamma} q_{\alpha i} q_{\beta j} q_{\zeta t} q_{\gamma k} \qquad \text{—(2.4.3.36)}$$

(2.4.3.36)式即是 R_{itjk} 的变换公式.

其次,由于

$$I^{-1}(v) = Q^{-1} I^{-1} (Q^{\mathrm{T}})^{-1}$$

有

$$\widetilde{g}^{ij} = (\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}})^i I^{-1} (\boldsymbol{q}^j)^{\mathrm{T}}$$

其中 $(\boldsymbol{q}^j)^{\mathrm{T}}$ 是 $(Q^{\mathrm{T}})^{-1}$ 矩阵的第 j 列向量,即 Q^{-1} 矩阵的第 j 行向量,$(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}})^i$ 是 Q^{-1} 矩阵的第 i 行向量.所以

$$\widetilde{g}^{ij} = \sum_{\tau,\sigma=1}^{m-1} g^{\tau\sigma} q^{i\tau} q^{j\sigma} \qquad \text{—(2.4.3.38)}$$

且由于(2.4.3.23)式,可知

$$\widetilde{R}^k_{itj} = \sum_{h=1}^{m-1} \widetilde{g}^{kh} \widetilde{R}_{itjh}$$

所以

$$\begin{aligned}\widetilde{R}^k_{itj} &= \sum_{h=1}^{m-1} \Big(\sum_{\tau,\sigma=1}^{m-1} g^{\tau\sigma} q^{k\tau} q^{h\sigma} \cdot \sum_{\alpha,\zeta,\beta,\gamma=1}^{m-1} R_{\alpha\zeta\beta\gamma} q_{\alpha i} q_{\beta j} q_{\zeta t} q_{\gamma h} \Big) \\ &= \sum_{\alpha,\zeta,\beta,\gamma,\tau,\sigma=1}^{m-1} R_{\alpha\zeta\beta\gamma} q_{\alpha i} q_{\beta j} q_{\zeta t} \cdot g^{\tau\sigma} q^{k\tau} \cdot \sum_{h=1}^{m-1} q_{\gamma h} q^{h\sigma}\end{aligned}$$

因

$$\sum_{h=1}^{m-1} q_{\gamma h} q^{h\sigma} = \begin{cases} 1 & \sigma = \gamma \\ 0 & \sigma \neq \gamma \end{cases}$$

故

$$\widetilde{R}^k_{itj} = \sum_{\alpha,\zeta,\beta,\tau=1}^{m-1} \Big(\sum_{\gamma=1}^{m-1} g^{\tau\gamma} R_{\alpha\zeta\beta\gamma} \Big) \cdot q_{\alpha i} q_{\beta j} q_{\zeta t} q^{k\tau}$$

因为

$$\sum_{\gamma=1}^{m-1} g^{\tau\gamma} R_{\alpha\zeta\beta\gamma} = R^{\tau}_{\alpha\zeta\beta}$$

最终得到 R^k_{itj} 的变换公式

$$\widetilde{R}^k_{itj} = \sum_{\alpha,\zeta,\beta,\tau=1}^{m-1} R^{\tau}_{\alpha\zeta\beta} q_{\alpha i} q_{\beta i} q_{\zeta t} q^{k\tau} \qquad \text{—(2.4.3.39)}$$

附带易知$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{v})$矩阵元素 $\tilde{g}_{ij}$ 有以下变换关系

$$\tilde{g}_{ij} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m-1} g_{\alpha\beta} q_{\alpha i} q_{\beta j} \qquad \text{—(2.4.3.40)}$$

附注 2：Gauss 曲率绝对值的几何意义

设 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) \in R^m \quad \boldsymbol{u} \in D_u \subset R^{m-1}$ 是正则参数曲面片. κ 是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面的 Gauss 曲率. 由 Weingarten 映射

$$-\frac{\partial \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} = W \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \qquad W = \boldsymbol{II}\,\boldsymbol{I}^{-1}$$

故

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} = W \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} W^{\mathrm{T}} \qquad \text{—(3.3.2.53)}$$

所以，两边取行列式，有

$$\left| \frac{\partial \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} \right| = |W|^2 \, |\boldsymbol{I}|$$

或写成

$$\left| \frac{\partial \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} \right|^{\frac{1}{2}} = |\kappa| \cdot |\boldsymbol{I}|^{\frac{1}{2}} \qquad \left(|\kappa| = \sqrt{|W|^2} = \sqrt{\kappa^2}\right)$$

而由 Gauss 映射的几何意义，是将曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 对应到单位超球面（记作 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u})$）. 则在单位超球面上，有法向量

$$\boldsymbol{n}_R = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u})$$

故在 $\boldsymbol{u}$ 决定的曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 上的一点和其 Gauss 映射的像（单位超球面）上的对应点处，取微元超立方体积，并由(3.2.6.7)式给出的关系，得

$$\mathrm{d}V_r = |\boldsymbol{I}|^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_{m-1}$$

$$\mathrm{d}V_R = \left| \frac{\partial \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{u}} \right|^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_{m-1} = \left| \frac{\partial \boldsymbol{n}_R^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{n}_R}{\partial \boldsymbol{u}} \right|^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_{m-1}$$

但显然又成立

$$\boldsymbol{n}_R = \boldsymbol{n}$$

故

$$\mathrm{d}V_R = \left| \frac{\partial \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} \right|^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_{m-1} \qquad \text{—(2.4.3.41)}$$

其中 dV_r、dV_R 分别是曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 和单位超球面 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u})$ 上对应点处的微元体积. 于是

$$|\kappa| = \frac{dV_R}{dV_r} = \frac{\left|\frac{\partial \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|^{\frac{1}{2}}}{|\boldsymbol{I}|^{\frac{1}{2}}} \quad —(2.4.3.42)$$

上式即给出了 Gauss 曲率绝对值 $|\kappa|$ 的几何意义.

因为第三基本二次型矩阵就是

$$\boldsymbol{I\!I\!I} = \frac{\partial \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}}$$

所以,上式又可表成

$$|\kappa| = (|\boldsymbol{I\!I\!I}| / |\boldsymbol{I}|)^{\frac{1}{2}} = \frac{dV_R}{dV_r} \quad —(2.4.3.43)$$

由定理 2.4.3.2 的推导即知,对于 $|\kappa|$ 这一量值,该定理也是适用的.

§2.4.4 多重矢量积(续)及 R^m 空间上 n 维曲面的 Gauss - Codazzi 方程

考虑一般的 R^m 空间上的 n 维曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) \in S \subset R^m$, $\boldsymbol{u} \in D_u \subset R^n$ 且 $1 \leqslant n \leqslant m-1$, D_u 是单连通开集. 设 $\boldsymbol{r}$ 是 $D_u \to S$ 上的(拓扑)同胚映射,则 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 是 R^m 空间上的一个 n 维正则参数曲面片. 当 $n=1$, $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 即为 R^m 空间上的曲线,当 $n=m-1$, 则 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 即为上一节分析过的 $m-1$ 维正则参数曲面片[1]. 以下考虑 $1 \leqslant n \leqslant m-2$ 的情形.

继续推广 R^m 空间上的多重矢量积算法. 一般地,设

$$\boldsymbol{z}_i \in R^m \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad 1 \leqslant n \leqslant m-2$$

由以上关于多重矢量积的定义,可以推广至这里的情形:

定义 2.4.4.1 设 $\boldsymbol{z}_i \in R^m$, $i=1, \cdots, n$, $1 \leqslant n \leqslant m-2$ 是 n 个 m 维向量, $\boldsymbol{z}_i$ 向量组的秩是 k, 规定 $\boldsymbol{z}_i$ 向量组的多重矢量积是

$$\boldsymbol{N}^j = \boldsymbol{z}_1 \times \boldsymbol{z}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{z}_n = \begin{bmatrix} N_1^j \\ N_2^j \\ \vdots \\ N_m^j \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \cdots, m-k$$

且

[1] 一般 R^m 空间上的 n 维曲面 $(1<n<m)$ 的严格定义,参见《微分几何》,孟道骥、梁科,科学出版社,2000 年,第 226 页,定义 6.1.1.

$$N_i^j = Z_{im}^{(n)} \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

其中 $Z_{im}^{(n)}$ 是矩阵

$$Z_j^{(n)} = [\boldsymbol{z}_{i_1}, \boldsymbol{z}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{z}_{i_k}, \boldsymbol{c}_1^j, \boldsymbol{c}_2^j, \cdots, \boldsymbol{c}_{(m-1-k)}^j, \boldsymbol{b}]$$

的第 i 行第 m 列元素的代数余子式(行列式).

这里 $\boldsymbol{b}$ 是任意的 m 维向量,$\boldsymbol{z}_{i_1}, \boldsymbol{z}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{z}_{i_k}$ 是 $\boldsymbol{z}_i$ 向量组中的任一个极大线性无关向量组,$\boldsymbol{c}_1^j, \boldsymbol{c}_2^j, \cdots, \boldsymbol{c}_{(m-1-k)}^j$ 是与 $\boldsymbol{z}_{i_t}$ $\quad t = 1, 2, \cdots, k$ 向量组线性无关的任意的向量组,即 $Z_j^{(n)}$ 矩阵的前 $m-1$ 列向量组线性无关. ■

任取 $j = 1, 2, \cdots, m-k$ 组满足以上定义条件的 $\boldsymbol{c}_1^j, \boldsymbol{c}_2^j, \cdots, \boldsymbol{c}_{(m-1-k)}^j$ 向量组,便可得到 $\boldsymbol{N}^1, \boldsymbol{N}^2, \cdots, \boldsymbol{N}^{m-k}$ 向量组. $\boldsymbol{N}^j$ 向量组就是 $\boldsymbol{z}_i$ 向量组正交补空间的一组基向量组. 这里,所取的 $\boldsymbol{c}_1^j, \boldsymbol{c}_2^j, \cdots, \boldsymbol{c}_{(m-1-k)}^j$ 向量组是线性无关的,且可以是任意的,故不妨就可以取为单位矩阵 I_m 的 m 个列向量中的任意的 $(m-k-1)$ 个. 对于不同的 j,这样取得的 $\boldsymbol{c}_1^j, \boldsymbol{c}_2^j, \cdots, \boldsymbol{c}_{(m-1-k)}^j$ 向量组之间可以存在若干相同的向量,但这样的 2 个 $\boldsymbol{c}_i^j$ 向量组应不全相同. 具体可由以下举例说明.

例 2.4.4.1 设 $m = 4, n = 1$.

$$\boldsymbol{z}_1 = (1, -1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$$

作 $\boldsymbol{z}_1$ 的多重矢量积.

取 $\boldsymbol{c}_1^1 = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{c}_2^1 = \boldsymbol{e}_2$,有

$$Z_1^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ -1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 0 & 0 & b_3 \\ 1 & 0 & 0 & b_4 \end{bmatrix}$$

对 $Z_1^{(n)}$ 取 b_i 元素的代数余子式,得

$$\boldsymbol{N}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

取 $\boldsymbol{c}_1^2 = \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{c}_2^2 = \boldsymbol{e}_4$,可得

$$\boldsymbol{N}^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

取 $\boldsymbol{c}_1^3 = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{c}_2^3 = \boldsymbol{e}_4$,可得

$$N^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

现在，c_1^3、c_2^3 向量与 $c_1^{1,2}$、$c_2^{1,2}$ 向量之间都有其中一向量是相同的，且都不是全部相同的. 这样构造出来的 N^1, N^2, $N^3 \perp z_1$，且 $N^{1,2,3}$ 向量组是线性无关的，故 $N^{1,2,3}$ 就是 z_1 向量张成的线性子空间的正交补空间的一组基向量组.

当然，也需要对以上规定的多重矢量积给予手性的规定. 称行列式

$$|\, z_{i_1},\ z_{i_2},\ \cdots,\ z_{i_k};\ N^1,\ N^2,\ \cdots,\ N^{m-k}\,| > 0$$

时，z_{i_j}、N^h，$j = 1, \cdots, k$；$h = 1, \cdots, m-k$ 向量组为右手性的(其中 z_{i_j}、N^h 向量组为正交向量组). 要确定右手性的 N^h 法向量组，只要取 $\pm N^{m-k}$ 中的一个使以上不等式成立即可.

取定 c_h^1，$h = 1, 2, \cdots, m-1-k$，并得到多重矢量积 N^1，再用 N^1 取代 c_1^1，并记 $c_1^2 = N^1$，$c_h^2 = c_h^1 \quad h = 2, \cdots, m-1-k$，得到 N^2，…，并记

$$\begin{cases} c_h^{p+1} = N^h,\ h = 1, 2, \cdots, p \qquad p = 1, 2, \cdots, m-1-k \\ c_h^{p+1} = c_h^1 \quad h = p+1, \cdots, m-1-k \end{cases} \qquad \text{—(2.4.4.1)}$$

这样得到的 N^h，$h = 1, 2, \cdots, m-k$，由多重矢量积算法，一定是**正交的**向量组. 并且(若 z_i 向量组本身也是正交的)z_1, z_2, $\cdots$, z_k, N^1, N^2, $\cdots$, N^{m-k} 向量组也一定是 R^m 空间上的一个右手性的标架系[1].

由定义 2.4.4.1 以及上例可见，因为 c_i^j 向量组可以是任取的，所以，在 $1 \leqslant n \leqslant m-2$ 的情形，$z_i \quad i = 1, 2, \cdots, n$ 向量组的多重矢量积在结果上不是唯一的. 这是与 $n = m-1$ 时情形不同的. 但在将这样的多重矢量积方法应用于 R^m 空间上的 n 维曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) \quad \boldsymbol{u} \in D_u \subset R^n$，$\boldsymbol{r} \in R^m$ 时，将 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 理解为 n 维曲线，类似于 §2.3.2 节关于 R^m 空间上 1 维曲线的 Frenet 标架的极值意义的分析，可以利用极值方法，在多重矢量积给出的 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的法空间的一组基向量组 N^h，$h = 1, \cdots, m-k$ 的基础上，得到 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的法空间上唯一的一个极值基向量正交标架向量组. 如何建立这样的正交标架向量组，就是本节要讨论的主要内容.

设 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) \in R^m$，$\boldsymbol{u} \in D_u \subset R^n$

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) = (X_i(\boldsymbol{u})) \quad X_i = X_i(u_1, \cdots, u_n) \quad 1 < n < m-1$$

给出了 R^m 空间上的一个 n 维正则曲面片.

$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \in R^{m\times n}$ 是 $m \times n$ 阶 Jacobi 矩阵. 它的列向量组是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 切空间的一组基向

[1] 如果 z_i 向量组不是正交的，则可称这样的(z_i, N^h)为**拟右手性**的标架系.

量组.

$$I = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \in R^{n\times n}$$

是正定的 $n\times n$ 阶矩阵，仍具有第一基本二次型矩阵的意义.

设经由$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$的列向量组的多重矢量积，已得到了一组 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的法空间的基向量 $\boldsymbol{N}^1,\ \boldsymbol{N}^2,\ \cdots,\ \boldsymbol{N}^{m-n}$. 这里的各个 $\boldsymbol{N}^h$ 具有随意性. $\boldsymbol{N}^h$ 向量组不一定是正交的，$\boldsymbol{N}^h$ 向量也不一定是归一的.

记

$$\Pi = [\boldsymbol{N}^1,\ \boldsymbol{N}^2,\ \cdots,\ \boldsymbol{N}^{m-n}] \qquad —(2.4.4.2)$$

$\Pi \in R^{m\times(m-n)}$. 则 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$法空间的任一单位向量 $\boldsymbol{n}$，都可以表成

$$\boldsymbol{n} = \frac{\Pi\, \boldsymbol{t}}{(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\,\boldsymbol{t})^{\frac{1}{2}}} \qquad \boldsymbol{t}\in R^{m-n} \quad \boldsymbol{t}\neq \boldsymbol{0} \qquad —(2.4.4.3)$$

显然地各个 $\boldsymbol{N}^h$ 都应被看成是参向量$\boldsymbol{u}$ 的函数，将 $\boldsymbol{t}$ 也看成是$\boldsymbol{u}$ 的函数$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u})$. $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u})$将在以下给出的极值规划中决定.

由

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} = \left(\sum_{h=1}^{m-n} \frac{\partial \boldsymbol{N}^h}{\partial \boldsymbol{u}} t_h + \Pi\, \frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial \boldsymbol{u}} - \frac{\boldsymbol{n}}{2}\, \frac{\partial(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\,\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\,\boldsymbol{t})}{\partial \boldsymbol{u}}\, \frac{1}{(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t})^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{1}{(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t})^{\frac{1}{2}}}$$

得到在 $\boldsymbol{t}$ 向量决定的法方向 $\boldsymbol{n}$ 下的 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面的第二基本二次型矩阵

$$\mathit{II} = -\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} = -\frac{\sum\limits_{h=1}^{m-n} \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{N}^h}{\partial \boldsymbol{u}} t_h}{(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t})^{\frac{1}{2}}} \qquad —(2.4.4.4)$$

II 矩阵现不仅与 $\boldsymbol{u}$ 参量有关，而且也与 $\boldsymbol{t}$ 向量有关. 记

$$\widetilde{\mathit{II}}^{\,h} = -\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{N}^h}{\partial \boldsymbol{u}} \qquad \mathit{II}^{\,h} = -\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{n}_h}{\partial \boldsymbol{u}} \qquad \boldsymbol{n}_h = \boldsymbol{N}^h/(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t})^{1/2}$$

$$—(2.4.4.5)$$

可将(2.4.4.4)式表成

$$\mathit{II}(\boldsymbol{t}) = \mathit{II} = \sum_{h=1}^{m-n} \widetilde{\mathit{II}}^{\,h} t_h / \| \Pi\boldsymbol{t} \| \qquad —(2.4.4.6)$$

则 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面在 $\boldsymbol{n}$ 法方向下的 Gauss 曲率就是

$$\kappa = \frac{|\mathit{II}|}{|I|} = \frac{\left|\sum\limits_{h=1}^{m-n} \widetilde{\mathit{II}}^{\,h} t_h\right|}{\| \Pi\boldsymbol{t}\|^{n} \cdot |I|} \qquad —(2.4.4.7)$$

(2.4.4.7)式给出的 Gauss 曲率 κ 与 $\boldsymbol{t}$ 有关. 类似对于 R^m 空间中的 1 维曲线 $\boldsymbol{x}(s)$，现在可对(2.4.4.7)式给出的 Gauss 曲率 κ 求其关于 $\boldsymbol{t}$ 的极大值. 注意到 $\boldsymbol{I}$ 矩阵与 $\boldsymbol{t}$ 的选取是无关的，故这一极值也可表成以下形式的绝对值极值规划.

$$\begin{cases} \text{极值：} \left| \sum_{h=1}^{m-n} \widetilde{\boldsymbol{II}}^h t_h \right|^2 \\ \text{s.t.} \quad \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{t} = 1 \end{cases} \qquad \text{—(2.4.4.8)}$$

这里 $|\cdot|$ 是行列式运算符号. 构造 Lagrange 函数

$$L = \left| \sum_{h=1}^{m-n} \widetilde{\boldsymbol{II}}^h t_h \right|^2 + \zeta(1 - \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{t})$$

便得到极值条件

$$\left| \sum_{h=1}^{m-n} \widetilde{\boldsymbol{II}}^h t_h \right| \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{t}} \left(\left| \sum_{h=1}^{m-n} \widetilde{\boldsymbol{II}}^h t_h \right| \right) = \zeta \boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{t} \qquad \text{—(2.4.4.9)}$$

考虑(2.4.4.9)式成立的条件.

(A) 若有 $\boldsymbol{t} \in R^{m-n}$ 的一个取法，使

$$\left| \sum_{h=1}^{m-n} \widetilde{\boldsymbol{II}}^h t_h \right| = 0$$

则就可以同时取 Lagrange 乘子 $\zeta = 0$，(2.4.4.9)式就得以成立. 所以，记对于 $\boldsymbol{t}_0^i \in R^{m-n}$ 使

$$|\boldsymbol{II}(\boldsymbol{t}_0^i)| = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, n_0 \qquad \text{—(2.4.4.10)}$$

这里的 n_0 是指使(2.4.4.10)式成立的 $\boldsymbol{t}_0^i$ 向量的个数.

若对于任取的 $\boldsymbol{t} \in R^{m-n}$ $\quad \boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{0}$，均有

$$|\boldsymbol{II}| \equiv 0$$

那么，只能是 $\dfrac{\partial \boldsymbol{N}^h}{\partial \boldsymbol{u}} \equiv 0 \quad h = 1, 2, \cdots, m-n$. 这显然表示 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$是 R^m 中的 n 维平面. 这时就可以任取 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的法空间中的一组单位正交基向量组(均为常向量)作为法空间的标架系.

除此之外，就只能是

$$0 \leqslant n_0 < +\infty$$

换句话说，在 R^{m-n}中必可存在 $\boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{t}_0^i \quad i = 1, \cdots, n_0$ 的向量，且有

$$|\boldsymbol{II}(\boldsymbol{t})| \neq 0 \quad or \quad |\boldsymbol{II}(\boldsymbol{t})|^2 > 0 \qquad \text{—(2.4.4.11)}$$

成立.

以下总假设(2.4.4.11)式成立，即 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$是非平面的情形. 并只在 $|\boldsymbol{II}(\boldsymbol{t})| \neq 0$ 的场合考虑(2.4.4.9)式成立的条件. 所以有

(B) 设 $|\mathbb{I}(t)| \neq 0$. 由(2.4.4.9)式，令

$$\lambda = \zeta \cdot |\mathbb{I}(t)|^{-1}$$

便知应要求成立

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\sum_{h=1}^{m-n}\widetilde{\mathbb{I}}^{h} t_{h}\right|\right) = \lambda \Pi^{T} \Pi t \qquad —(2.4.4.12)$$

易知(2.4.4.12)式给出的极值条件，刚好就是以下极值规划的充要条件

$$\begin{cases} \text{极值}: |\mathbb{I}(t)| \\ \text{s.t.} \quad t^{T}\Pi^{T}\Pi t = 1 \end{cases} \qquad —(2.4.4.13)$$

继而考虑(2.4.4.12)式给出的极值解t_j^*.

(B.1) $n = 2$ 的情形. 易于理解，由行列式展开规则即知，记

$$|\mathbb{I}(t)| = \left|\sum_{h=1}^{m-n}\widetilde{\mathbb{I}}^{h} t_{h}\right| = F(t_1, t_2, \cdots, t_{m-n}) \qquad —(2.4.4.14)$$

则 $F(t)$一定是 $t_1, t_2, \cdots, t_{m-n}$的$n$ 次齐次 $m-n$ 元多项式. 所以，当 $n=2$ 时，(2.4.4.12)式等号的左边总可表成

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(|\mathbb{I}(t)|) = \nabla_t^2 F \cdot t \qquad \nabla_t^2 F = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial t_i \partial t_j}\right]_{(m-n)\times(m-n)} \qquad —(2.4.4.15)$$

且$\nabla_t^2 F$ 是与t 无关的矩阵.

故(2.4.4.12)式可表成

$$[\nabla_t^2 F - \lambda \Pi^{T}\Pi] t = \mathbf{0} \qquad —(2.4.4.16)$$

由于 $\Pi^{T}\Pi$ 是正定矩阵，$\nabla_t^2 F$ 是对称矩阵，故特征多项式

$$|\nabla_t^2 F - \lambda \Pi^{T}\Pi| = 0 \qquad —(2.4.4.17)$$

总有 $m-n$ 个实数根 λ_j(重根计重数)，每个 λ_j 又可按(2.4.4.16)式决定对应的特征向量 $\hat{t}_j$，且 $\hat{t}_j$ 决定的单位法向量

$$\hat{n}_j = \Pi \hat{t}_j \qquad j = 1, 2, \cdots, m-n \qquad —(2.4.4.18)$$

一定又是相互正交的.

由此，就可以得到 $r(u)$法空间的 $\hat{n}_j$, $j = 1, 2, \cdots, m-n$ 这样一组单位正交基向量组. $\hat{n}_j$ 向量组经符号选择和下标重排便可得到所需的法空间标架系(见下文).

(2.4.4.16)式在形式上类似于在 $m-1$ 维曲面的切空间中所构造的 Weingarten 映射的关系式. 并且，在(2.4.4.13)式极值规划的形式下，以上决定的 $\hat{t}_j$ 也已将前述的 t_0^i 包含在内.

这样所得到的 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 法空间的单位正交基向量组 $\boldsymbol{n}_j$ 显然具有唯一性. 并且,由于特征向量 $\boldsymbol{t}_j^*$ 连续地依赖于矩阵元素的性质及可微性[1],即知,

$$\boldsymbol{t}_j^* = \boldsymbol{t}_j(\boldsymbol{u})$$

可微函数是存在的.

(B.2) 设 $n \geqslant 3$. 在这一情形下,由于一般地不能成立

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{t}} = \nabla_t^2 F \cdot \boldsymbol{t}$$

关系,所以,不能得到(2.4.4.16～17)式的条件. 也就是说,对于 $n \geqslant 3$ 的情形,不再能直接利用矩阵特征值方法去求得 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 法空间的一组单位正交基向量组.

类似 § 2.3.2 节关于 R^m 空间上的 1 维曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 的主法方向 $\nabla^2 \boldsymbol{x}$ 的极值意义是 $\boldsymbol{x}(s)$ 的法方向 $\boldsymbol{n}$ 中,使曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 在 $(\nabla \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{n})$ 张成的 2 维平面上的投影曲线的(相对)曲率取极大值的那个法方向,现在,对于 $n \geqslant 3$ 时,R^m 空间中的 n 维曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$,可求得 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的法空间中使 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的 Gauss 曲率取极大值的最大值的法方向作为 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的主法方向 $\boldsymbol{n}_1$.

也就是说 $\boldsymbol{n}_1$ 由以下条件极值规划给出

$$N_1: \begin{cases} \text{极大值:} \ |\, \mathit{I\!I}(\boldsymbol{t})\, | \\ \text{s. t.} \quad \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t} = 1 \end{cases} \qquad \text{—(2.4.4.19)}$$

构造 L—函数如以下形式,

$$L = |\, \mathit{I\!I}(\boldsymbol{t})\, | + \frac{\lambda}{2}(1 - \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t}) \qquad \text{—(2.4.4.19a)}$$

(2.4.4.19)式规划中的目标函数 $|\, \mathit{I\!I}(\boldsymbol{t})\, | = F(\boldsymbol{t})$ 是 $\boldsymbol{t}$ 的连续可微函数,且约束条件

$$\boldsymbol{t} \in D_t = \{\boldsymbol{t} \mid \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t} = 1 \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-n}\} \qquad \text{—(2.4.4.21)}$$

决定的 D_t 是 R^{m-n} 上的一个闭紧集(椭球面). 由连续函数的性质即知,(2.4.4.19)式规划的极大值解一定可在 $\boldsymbol{t} \in D_t$ 上取到(见下文分析).

先设(2.4.4.19)式规划的极大值解 $\boldsymbol{t}_1^* \in \operatorname{int} D_t$. $\operatorname{int} D_t$ 表示 D_t 的内点集合.

$$\operatorname{int} D_t = \{\boldsymbol{t} \mid \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t} = 1 \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-n} \quad t_i \neq 0 \quad \forall_i\} \qquad \text{—(2.4.4.22)}$$

由(2.4.4.19)式规划解的一阶必要条件即(2.4.4.12)式,将其重新写出,并表成以下形式

---

[1] 参见《特殊矩阵》,陈景良、陈向晖. 见前注. § 3.13 及 § 9.5.

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{t}} - \lambda \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t} = \mathbf{0} \qquad \text{—(2.4.4.23)}$$

由(2.4.4.23)式给出的 $m-n$ 个方程式，再加上约束条件，即构成以下的 $m-n+1$ 个方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{t}} - \lambda \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t} = \mathbf{0} \\ 1 - \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t} = 0 \end{cases} \qquad \text{—(2.4.4.24)}$$

就刚好给出待定向量($m-n$ 维)$\boldsymbol{t}$ 和乘子 λ 的值.

由隐函数定理，在

$$\left| \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{t}} \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{t}} - \lambda \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t} \right) \right| = | \nabla_t^2 F(\boldsymbol{t}) - \lambda \Pi^{\mathrm{T}} \Pi | \neq 0 \qquad \text{—(2.4.4.25)}$$

时，(2.4.4.23)式方程组可以决定函数 $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}, \lambda)$，并由

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}, \lambda) \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}, \lambda) = 1 \qquad \text{—(2.4.4.26)}$$

的条件，应可解出(注意 $\Pi = \Pi(\boldsymbol{u})$ 的事实并见以下的分析)，

$$\lambda = \lambda(\boldsymbol{u})$$

从而存在

$$\hat{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}, \lambda(\boldsymbol{u})) = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}) \qquad \text{—(2.4.4.27)}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{t}}$ 是使(2.4.4.24)式成立的向量.

如果(2.4.4.25)式不能成立，先假设对 $k = 1, 2, \cdots, m-n$ 的某一个 k 有

$$\left| \frac{\partial \left(\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{t}} - \lambda \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t} \right)}{\partial (t_1, \cdots, t_{k-1}, t_{k+1}, \cdots, t_{m-n}, \lambda)} \right| \neq 0 \qquad \text{—(2.4.4.28)}$$

设 $k = j$ 时使(2.4.4.28)式成立. 仍由隐函数定理，便可解出

$$\begin{cases} \tilde{t}_i = t_i(t_j) \quad i = 1, 2, \cdots, m-n \quad i \neq j \\ \tilde{t}_j = t_j \\ \lambda = \lambda(t_j) \end{cases} \qquad \text{—(2.4.4.29)}$$

再由

$$\tilde{\boldsymbol{t}} \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \tilde{\boldsymbol{t}} = 1 \qquad \text{—(2.4.4.30)}$$

得到

$$\tilde{t}_j = t_j(\boldsymbol{u})$$

函数，从而总有

$$\hat{t} = \tilde{t}(t_j(\boldsymbol{u})) = \tilde{t}(\boldsymbol{u}) = t(\boldsymbol{u}) \qquad —(2.4.4.31)$$

形式的函数存在.

在以上的论述中,$\lambda(\boldsymbol{u})$、$t_j(\boldsymbol{u})$函数的存在还可以给予一个说明. 以(2.4.4.26)式决定的 $\lambda(\boldsymbol{u})$函数为例,其实,这只要(2.4.4.26)式有解 $\lambda(\boldsymbol{u})$即存在.

现在,由前面的假设,$F(t)$极大值时的 $t_1^* \in \text{int } D_t$,故(2.4.4.24)式给出的方程组必有解. 即是说(2.4.4.26)式给出的解 $\lambda(\boldsymbol{u})$一定存在. $t_j(\boldsymbol{u})$函数的存在也类似.

所以,由(2.4.4.27)式或(2.4.4.31)式给出的 $\hat{t} = t(\boldsymbol{u})$ 函数也一定存在.

当这样所给出的 $\hat{t}$ 是唯一的,那么 $t_1^* = \hat{t} = t(\boldsymbol{u})$. 当这样给出的 $\hat{t}$ 有 p 个,就取

$$t_1^* = \hat{t}_1 \quad \text{当} \mid (\mid \boldsymbol{I\!I}(t_1) \mid) \mid = \max_{\forall \hat{t}} \mid (\mid \boldsymbol{I\!I}(\hat{t}) \mid) \mid$$

所以,总有 $t_1^* = t_1(\boldsymbol{u})$ 形式的函数存在. 这里$|(|\cdot|)|$表示行列式绝对值. 这即相当于取极大值中的最大值(仍简称为极大值).

并且,这样给出的 $t(\boldsymbol{u})$函数在一定条件下必是关于 $\boldsymbol{u}$ 的连续可微函数(见下文分析). 这可由 $F(t)$的构造及矩阵 $\Pi^{\mathrm{T}}\Pi$ 的构造均只为 $\boldsymbol{u}$ 的可微函数的四则运算构造出来的函数(系数、元素)所组成即知.

由这样给出的 t_1^* 便可决定 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的 Gauss 曲率取极大值的单位法方向 $\boldsymbol{n}_1$.

$$\boldsymbol{n}_1 = \Pi t_1^* \qquad —(2.4.4.32)$$

继设(2.4.4.19)式规划的极大值解 $t_1^* \in \partial D_t$. ∂D_t 是 D_t 的边界点集合

$$\partial D_t = \left\{\begin{matrix} t \mid t^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi t = 1 \quad t \in R^{m-n} \quad t_i \neq 0 \quad t_j = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m-n-k \\ i \neq j \quad j = j_1, \cdots, j_k, \ k \geqslant 1 \end{matrix}\right\} \qquad —(2.4.4.33)$$

只需考虑(2.4.4.33)式中 $t_j = 0$ 的总数 $k = 1$ 的情形,$k > 1$ 时情形完全类似. 不妨设 $t_{m-n} = 0$. 显然,(2.4.4.19)式规划现可表示为

$$\begin{cases} \max: \left| \sum\limits_{h=1}^{m-n-1} \boldsymbol{I\!I}^h t_h \right| \\ \text{s. t.} \quad \tilde{t}^{\mathrm{T}} (\Pi^{\mathrm{T}}\Pi)_1 \tilde{t} = 1 \end{cases} \quad \tilde{t} = (t_1, \cdots, t_{m-n-1}) \qquad —(2.4.4.34)$$

而$(\Pi^{\mathrm{T}}\Pi)_1$ 则是 $\Pi^{\mathrm{T}}\Pi$ 矩阵的前 $(m-n-1) \times (m-n-1)$ 阶顺序主子矩阵. 对(2.4.4.34)式规划重复以上的分析,且由于

$$\begin{cases} \tilde{t}_1^* = (t_{11}^*, \cdots, t_{1(m-n-1)}^*) \in \text{int } D_t^1 \\ D_t^1 = \{\tilde{t} \mid \tilde{t}(\Pi^{\mathrm{T}}\Pi)_1 \tilde{t} = 1 \quad \tilde{t} \in R^{m-n-1} \quad \tilde{t}_i \neq 0\} \end{cases} \qquad —(2.4.4.35)$$

故可知有 $\tilde{t}_1^* = \tilde{t}_1(u)$ 函数存在. 这样,令

$$t_1^* = \begin{bmatrix} \tilde{t}_1^* \\ 0 \end{bmatrix} = t_1(u) = \begin{bmatrix} \tilde{t}_1(u) \\ 0 \end{bmatrix}$$

即可构造出 $t_1^* = t_1(u)$ 函数. 显然,在 $t_1^* \in \partial D_t$ 的情形下,极端的情况就是(2.4.4.33)式中的 $k = m - n - 1$,从而 t_1^* 的分量中除一个 $t_i \neq 0$ 外,其余的均为 0. 这时,易知只能有

$$t_i = \pm \| N^i \|^{-1} \qquad —(2.4.4.36)$$

上式等号右边的符号的选择见下文说明. 这种情况下,就直接规定

$$t_1^* = t_1(u) = (0, \cdots, 0, \pm \| N^i \|^{-1}, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}} \qquad —(2.4.4.37)$$

综合以上的分析,就可以说,利用 N_1 规划(即(2.4.4.19)式),在 $n \geqslant 3$ 的场合,总可以确定出 $t_1^* = t_1(u)$ 函数,并且,在 t_1^* 按(2.4.4.32)式给出的单位法方向 n_1 下,$r(u)$曲面的 Gauss 曲率绝对值取为最大值.

在已确定 n_1 时,继续构造以下规划,

$$N_2: \begin{cases} 极大值: |\mathrm{I\!I}(t)| = F(t) \\ \text{s. t.} \begin{cases} t^{\mathrm{T}} \Pi^{\mathrm{T}} \Pi t = 1 \\ n_1^{\mathrm{T}} \Pi t = 0 \end{cases} \end{cases} \qquad —(2.4.4.38)$$

构造 L—函数

$$L = |\mathrm{I\!I}(t)| + \frac{\lambda}{2}(1 - t^T \Pi^{\mathrm{T}} \Pi t) - \zeta n_1^{\mathrm{T}} \Pi t \qquad —(2.4.4.39)$$

得到其一阶必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \lambda \Pi^{\mathrm{T}} \Pi t = \zeta \Pi^{\mathrm{T}} n_1 \qquad —(2.4.4.40)$$

与关于(2.4.4.19)式规划的分析相类似,可以推知存在函数

$$\begin{cases} t_2^* = t_2(u) \\ n_2 = \Pi t_2^* \end{cases} \qquad —(2.4.4.41)$$

并且 $|(|\mathrm{I\!I}(t_2^*)|)| = \max|(|\mathrm{I\!I}(t)|)|$ 及 $t_2^* \Pi^{\mathrm{T}} \Pi t_2^* = 1$.

这里仅以 $t_2^* \in \operatorname{int} D_t$ 的情形为例,并因此有

$$|\nabla_t^2 F - \lambda \Pi^{\mathrm{T}} \Pi| \neq 0 \qquad —(2.4.4.25)$$

从而,在(2.4.4.40)式中,可解出

$$t = t(\lambda, \zeta) \qquad —(2.4.4.42)$$

并且

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial \lambda}=[\nabla_t^2 F-\lambda \Pi^{\mathrm{T}} \Pi]^{-1} \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial \zeta}=[\nabla_t^2 F-\lambda \Pi^{\mathrm{T}} \Pi]^{-1} \Pi^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}_1\end{cases} \qquad —(2.4.4.43)$$

存在.

再由约束条件

$$\boldsymbol{n}_1^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t}(\lambda,\ \zeta)=f(\lambda,\ \zeta)=0 \qquad —(2.4.4.44)$$

便决定了 λ, ζ 之间的隐函数关系. 并且,

$$\frac{\partial f(\lambda,\ \zeta)}{\partial \zeta}=\boldsymbol{n}_1^{\mathrm{T}} \Pi \frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial \zeta}=\boldsymbol{n}_1^{\mathrm{T}} \Pi[\nabla_t^2 F-\lambda \Pi^{\mathrm{T}} \Pi]^{-1} \Pi^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}_1 \qquad —(2.4.4.45)$$

由于 $\boldsymbol{t}$、λ、ζ 均在(2.4.4.38)式的极值处取值,故若(2.4.4.38)式不为 0,如 N_2 规划有极大值解,那么,在极大值解处矩阵 $[\nabla^2 F-\lambda \Pi^{\mathrm{T}} \Pi]^{-1}$ 必应是约束负定的(可见 § 6 章内容)

这时总有

$$\frac{\partial f(\lambda,\ \zeta)}{\partial \zeta} \neq 0$$

从而在(2.4.4.44)式中可解出函数 $\zeta=\zeta(\lambda)$ (详见以下分析). 再利用

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\lambda,\ \zeta(\lambda)) \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t}(\lambda,\ \zeta(\lambda))=1$$

的条件即可决定 $\lambda=\lambda(\boldsymbol{u})$ 及 $\boldsymbol{t}_2^*=\boldsymbol{t}_2(\boldsymbol{u})$ 函数.

如果(2.4.4.45)式为 0,那么,取

$$\frac{\partial f(\lambda,\ \zeta)}{\partial \lambda}=\boldsymbol{n}_1^{\mathrm{T}} \Pi \frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial \lambda}=\boldsymbol{n}_1^{\mathrm{T}} \Pi[\nabla_t^2 F-\lambda \Pi^{\mathrm{T}} \Pi]^{-1} \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t} \qquad —(2.4.4.46)$$

应有

$$\frac{\partial f(\lambda,\ \zeta)}{\partial \lambda} \neq 0$$

否则即是说 $\boldsymbol{t}$ 与 λ, ζ 无关,但这显然是不可能的. 所以,此时可从(2.4.4.44)式中得到 $\lambda=\lambda(\zeta)$ 函数,并进而再得到

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\lambda(\zeta),\ \zeta) \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t}(\lambda(\zeta),\ \zeta)=1$$

及 $\zeta=\zeta(\boldsymbol{u})$ 和 $\boldsymbol{t}_2^*=\boldsymbol{t}_2(\boldsymbol{u})$ 函数.

总之,从 N_2 规划中,总可以确定(2.4.4.41)式是存在的.

如此,继而可递推构造 N_k 规划,

$$N_k:\begin{cases}\max:\ |\boldsymbol{I\!I}(\boldsymbol{t})|=F(\boldsymbol{t}) \\ \text{s. t.}\ \begin{cases}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t}=1 \\ \boldsymbol{n}_i^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t}=0 \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1\end{cases}\end{cases} \qquad —(2.4.4.47)$$

并由 $k=1, 2, \cdots, m-n-1$ 的 N_k 规划，便可得到

$$\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \cdots, \boldsymbol{n}_{m-n-1}$$

单位正交向量组.

利用这样得到的法向量组，与 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}=[\dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_n]$ 的列向量组，作多重矢量积便可得

$$\boldsymbol{n}_{m-n}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}_1\times\dot{\boldsymbol{r}}_2\times\cdots\times\dot{\boldsymbol{r}}_n\times\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2\times\cdots\times\boldsymbol{n}_{m-n-1}}{|\boldsymbol{I}|^{\frac{1}{2}}} \quad —(2.4.4.48)$$

现在，这样得到的 m 个向量，其中 $\dot{\boldsymbol{r}}_1, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_n$ 是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的切空间的极大线性无关向量组，$\boldsymbol{n}_1, \cdots, \boldsymbol{n}_{m-n}$ 是法空间的极大线性无关且正交的单位向量组，它们就是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面上的一个(拟)右手性的局部标架系.

在这个局部标架系上，$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面在 $\boldsymbol{n}_1, \cdots, \boldsymbol{n}_{m-n-1}$ 法方向上，递减地取到 Gauss 曲率绝对值的第 1 极大值、第 2 极大值….

这个情形类似于 R^m 空间上的 1 维曲线在 Frenet 标架上取到的绝对曲率、1 阶、2 阶… $m-3$ 阶挠率(绝对值)和 $m-2$ 阶挠率代数值. 并且，由多重矢量积算法，这样构造出的标架系一定是右手性的(如果 $\boldsymbol{r}_i$ 是正交向量组).

这里附带可以说明，在以上给出的(2.4.4.47)式的 N_k 规划中，如构造 Lagrange 函数

$$L^k(\boldsymbol{t}, \lambda)=F(\boldsymbol{t})+\lambda^0(1-\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{t})-\sum_{i=1}^{k-1}\lambda^i\boldsymbol{n}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{t} \quad (\boldsymbol{n}_i\text{ 已知})$$

则一阶条件

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{t}}=\lambda^0\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{t}+\sum_{i=1}^{k-1}\lambda^i\boldsymbol{n}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}$$

中的乘子(函数)λ^0、λ^i 一定是存在的. 这可由等式约束的极值规划的以下定理得到[1].

定理 2.4.4.1 设 F、g_i $i=1, \cdots, n$ 是 $D\subset R^m$ 上的实值函数，且在一邻域 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0)\subset D$ 上，连续可微，则在以下极值规划中

$$\begin{cases}\text{极值: } F(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad g_i(\boldsymbol{x})=0 \quad i=1, \cdots, n\end{cases}$$

设 $\boldsymbol{x}^0$ 是 $\boldsymbol{x}\in N_\delta(\boldsymbol{x}^0)$ 的局部极小(大)值点，当 $g_i(\boldsymbol{x})$ 的 Jacobi 矩阵在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的秩为 n(即行满秩)，则存在实数 λ_i，成立

[1] 《非线性规划》上册，M. Avrial，上海科技出版社，1979 年，第 15 页，定理 2.6，更详细的说明可见本书 §6 章内容.

$$\nabla F(\boldsymbol{x}^0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)$$

■

现在 N_k 规划中，$F(\boldsymbol{t})$和约束条件函数关于 $\boldsymbol{t}$ 的连续性显然. 且约束条件函数组的 Jacobi 矩阵一定是行满秩的. 这可以将 Π 矩阵取为列正交矩阵即知. 由多重矢量积算法，将 Π 矩阵取为列正交矩阵一定可以作到.

现在将极大值规划重新写成以下形式

$$\begin{cases} \max: F(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}) \\ \text{s.t.} \quad f(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, a) = 0 \end{cases} \quad —(2.4.4.49)$$

$$f(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, a) = a - \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t} \quad a > 0$$

将(2.4.4.49)式中的 $\boldsymbol{u}$、a 看成是参数(向量). 以上规划仍在于求解满足约束条件的变量 $\boldsymbol{t}$. 则由以上分析，极值规划的解函数 $\boldsymbol{t}^*$ 存在，则 $\boldsymbol{t}^*$ 必可表成 $\boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{u}, a)$.

记

$$F(\boldsymbol{u}, a) = F(\boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{u}, a), a)$$

并称 $F(\boldsymbol{u}, a)$是**极大值函数**. 同时注意，记

$$S(\boldsymbol{u}, a) = \{\boldsymbol{t} \mid f(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, a) = 0, \boldsymbol{t} \in R^{m-n}\}$$

则 $S(\boldsymbol{u}, a)$是一项约束集合.

显然，$F(\boldsymbol{u}, a)$极大值函数也可看成是以下规划的解

$$\begin{cases} F(\boldsymbol{u}, a) = \max: F(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, a) \\ \text{s.t.} \quad \boldsymbol{t} \in S(\boldsymbol{u}, a) \end{cases} \quad —(2.4.4.50)$$

这只要取 $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{u}, a)$ 的形式就可即知这一点.

定理 2.4.4.2 (最优值的存在性)如果约束集 S 是非空且紧的，函数 F 关于 $\boldsymbol{t}$ 是连续的，那么(2.4.4.50)式的极大值规划存在解 $\boldsymbol{t}^*$.

■

定理 2.4.4.3 (最优值解的唯一性)如果 F 是关于 $\boldsymbol{t}$ 严格凹的，且约束集合 S 则是凸的，则最大值解 $\boldsymbol{t}^*$ 是唯一的.

■

令 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}, a)$是(2.4.4.50)式规划的一个解. 当参数 a(或 u_i)变动时，$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}$、$a)$就在($\boldsymbol{u}$、$a$)与 R^{m-n}空间上实现了一个映射.

定理 2.4.4.4 (极大值定理)若 $F(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u})$为有一紧值域的函数，假设约束集合 S 是($\boldsymbol{u}$, a)的一个非空、紧且连续的对应，那么，(1) 极大值函数 $F(\boldsymbol{u}, a)$是一个连续函数，(2) $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}, a)$是一个上半连续的映射.

■

这几个定理均可应用于 N_k 规划. 关于 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}, a)$函数的可微性质，以下还有进一步的说明.

定理 2.4.4.5 （包络定理）[1]设极大值函数 $F(\boldsymbol{u}, a)$连续可微，则

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{u}, a)}{\partial u_i}=\frac{\partial L(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, a, \lambda)}{\partial u_i} \qquad \frac{\partial F(\boldsymbol{u}, a)}{\partial a}=\frac{\partial L(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, a, \lambda)}{\partial a}$$

其中 $L(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, a, \lambda)=F(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u})+\lambda f(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, a)$ ■

由 F、f 的构造，即知，

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{u}, a)}{\partial a}=\lambda$$

故 λ 函数的连续可微性质由极大值函数 $F(\boldsymbol{u}, a)$的连续可微性质决定. 当 $F(\boldsymbol{u}, a)$是三阶可微时，λ 必定就可以是二阶可微的.

由(2.4.4.24)式，可以理解，以上给出的 $\hat{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{u})$向量，具有相反的 2 个方向的选择即 $\hat{\boldsymbol{t}}$、$-\hat{\boldsymbol{t}}$ 方向的选择. 这是因为在(2.4.4.24)式中的第 1 组方程组中，$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{t}}$ 是 $n-1$ 次齐次多项式，当 $n-1$ 是奇数，

$$\frac{\partial F(-\hat{\boldsymbol{t}})}{\partial \boldsymbol{t}}=-\frac{\partial F(\hat{\boldsymbol{t}})}{\partial \boldsymbol{t}}$$

当 $n-1$ 是偶数，则

$$\frac{\partial F(-\hat{\boldsymbol{t}})}{\partial \boldsymbol{t}}=\frac{\partial F(\hat{\boldsymbol{t}})}{\partial \boldsymbol{t}}$$

如果 $\hat{\boldsymbol{t}}$、λ 是满足(2.4.4.24)式的一组解. 在 $n-1$ 是奇数时，选取 λ 符号不变，则 $-\hat{\boldsymbol{t}}$ 向量和 λ 是满足(2.4.4.24)式的解. 当 $n-1$ 是偶数，则选取 λ 为 $-\lambda$，则 $-\hat{\boldsymbol{t}}$ 向量与 $-\lambda$ 是满足(2.4.4.24)式的解.

这即是说，$\hat{\boldsymbol{t}}$、$-\hat{\boldsymbol{t}}$ 是(2.4.4.24)式的一对共轭解. 故 $\hat{\boldsymbol{t}}$ 存在符号选择. 这实际是说 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面的法方向 $\boldsymbol{n}_i=\Pi\hat{\boldsymbol{t}}_i$ 存在定向选择问题.

可以这样予以选择 $\boldsymbol{n}_i$ 或 $-\boldsymbol{n}_i$ 为主法方向，即当 n 为偶数时，任意选择 $\boldsymbol{n}_i$ $i=1, 2, \cdots, m-n-1$ 的方向，当 n 为奇数时，则选择 $\boldsymbol{n}_i$ 或 $-\boldsymbol{n}_i$ 中的一个，且使 $|\mathrm{II}^i|$在 $\boldsymbol{n}_i$ 或 $-\boldsymbol{n}_i$ 方向下为非负的. 在 $\boldsymbol{n}_i$ 中的前 $m-n-1$ 个方向按上法选定，则 $\boldsymbol{n}_{m-n}$ 的方向总可由(2.4.4.48)式直接确定.

---

[1] 定理 2.4.4.2～定理 2.4.4.5 引自《微观经济学》，Hel R. Varian，周洪等译，经济科学出版社，1997年，第 540～541 页及 537 页 §27.7 极大值的存在与连续性只是将原书定理中的单参数 a 拓展为$(\boldsymbol{u}, a)$参数向量，且符号有所不同.

由标架系确定的统一性，对前述的 $n=2$ 时直接利用矩阵的特征值方法得到的 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 法空间的单位正交基向量组 $\hat{\boldsymbol{n}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{n}}_{m-n}$ 的下标排序给予上述方式的重排.

记 $\hat{\boldsymbol{n}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{n}}_{m-n}$ 是 $n=2$ 时由(2.4.4.17～18)式决定的单位正交法向量组. 令

$$\boldsymbol{n}_1 = (\pm)\hat{\boldsymbol{n}}_k$$

其中"(±)"是指对于 $\hat{\boldsymbol{n}}_k$ 的方向上任意的选择，且

$$\left|\left(\left|-\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial((\pm)\hat{\boldsymbol{n}}_k)}{\partial \boldsymbol{u}}\right|\right)\right| = \max_{i=1,\cdots,m-n}\left|\left(\left|-\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial((\pm)\hat{\boldsymbol{n}}_i)}{\partial \boldsymbol{u}}\right|\right)\right|$$

递推地选择，令

$$\boldsymbol{n}_2 = (\pm)\hat{\boldsymbol{n}}_h$$

且 $(\pm)\hat{\boldsymbol{n}}_h$ 使下式成立，

$$\left|\left(\left|-\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial((\pm)\hat{\boldsymbol{n}}_h)}{\partial \boldsymbol{u}}\right|\right)\right| = \max_{i=1,\cdots,m-n \quad i\neq k}\left|\left(\left|-\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial((\pm)\hat{\boldsymbol{n}}_i)}{\partial \boldsymbol{u}}\right|\right)\right|$$

等等，直到选定 $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \cdots, \boldsymbol{n}_{m-n-1}$. 然后，由(拟)右手性要求，以

$$|\dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_n, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \cdots, \boldsymbol{n}_{m-n-1}, (\pm)\hat{\boldsymbol{n}}_p| > 0$$

条件确定

$$\boldsymbol{n}_{m-n} = \pm\hat{\boldsymbol{n}}_p$$

其中 p 下标是 $1, 2, \cdots, m-n$ 中划去以上各步选择中已确定的 $k, h, \cdots$ 等 $m-n-1$ 个标后所余下的那个下标，而"(±)"表示使以上行列式为正数的一个选择.

在这样的重排下，$n=2$ 与 $n>2$ 的情形在 $\boldsymbol{n}_i$ 法方向给出 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面的 Gauss 曲率(绝对值)极值意义上就完全一致起来.

附带指出，在以上关于极值规划 N_k 的求解中得到的 L—乘子(在 $n=2$ 时即为(2.4.4.17)式给出的特征值)与 $\mathbb{I}$ 矩阵行列式的关系. 由(2.4.4.23)式(或(2.4.4.40)式)以及 $F(\boldsymbol{t})$ 作为 t_i 的 n 次齐次多元多项式的性质，有

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{t}} = nF(\boldsymbol{t}) = n|\mathbb{I}(\boldsymbol{t})| \qquad \text{—(2.4.4.51)}$$

所以，

$$\lambda = n|\mathbb{I}(\hat{\boldsymbol{t}})| \qquad \text{—(2.4.4.52)}$$

当然，如果(2.4.4.19a)式((2.4.4.39)式类似)的 L—函数取成

$$L = |\boldsymbol{II}(\boldsymbol{t})| + \lambda(1 - \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t})$$

的形式，那么，(2.4.4.52)式就是

$$2\lambda = n\,|\boldsymbol{II}(\hat{\boldsymbol{t}})| \qquad \text{—(2.4.4.53)}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{t}}$ 是使 N_k 规划取极值的向量 $\boldsymbol{t}$.[1]

所以，在 $\boldsymbol{n}_1, \cdots, \boldsymbol{n}_{m-n}$ 是以上极值规划中得到的单位正交法向量组时，在 $\boldsymbol{n}_1, \cdots, \boldsymbol{n}_{m-n-1}$ 法方向下 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面的 Gauss 曲率绝对值 κ_i 可由

$$\kappa_i = \frac{\lambda_i^*}{n}\,|\boldsymbol{I}|^{-1} \quad i = 1, \cdots, m-n-1 \qquad \text{—(2.4.4.54)}$$

或

$$\kappa_i = \frac{2\lambda_i^*}{n}\,|\boldsymbol{I}|^{-1} \quad i = 1, \cdots, m-n-1 \qquad \text{—(2.4.4.55)}$$

其中 λ_i^* 是使 $\boldsymbol{t}_i^*$ 成为 N_i 规划的极大值解的乘子.

类似推论 2.3.1.1，对于 R^m 空间上的 n 维曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 有以下推论.

推论 2.4.4.6 设 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) \in R^m \quad \boldsymbol{u} \in D_u \subset R^n$ 是 R^m 空间上的 n 维正则参数曲面片(函数). $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \cdots, \boldsymbol{n}_{m-n}$ 是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 法空间的极值正交单位法向量组. 如果对于 $h \geqslant 1$ 的某个下标，有

$$\left| -\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{n}_h}{\partial \boldsymbol{u}} \right| = 0$$

则

$$\left| -\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{n}_{h+j}}{\partial \boldsymbol{u}} \right| = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, m-n-h$$

■

记

$$T_k(\boldsymbol{t}) = \{\boldsymbol{t} \mid \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t} = 1,\ \boldsymbol{n}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t} = 0,\ i = 1, 2, \cdots, k-1\}$$

是 N_k 规划约束条件决定的 $\boldsymbol{t}$ 变量的集合. 则由 $T_{k+1}(\boldsymbol{t}) \subset T_k(\boldsymbol{t})$ 即可推知这一推论成立.

从以上关于 n 维曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的法空间上的极值意义下 $\boldsymbol{n}_i$ 单位正交基向量组的构造方法可见，为不致于引起用语混淆，应将这样得到的法方向 $\boldsymbol{n}_i$ 称为(第 i) **主法方向**. 所以，应将 $n = m-1$ 时由 Weingarten 映射特征多项式决定的切空间

---

[1] (2.4.4.52～53)式在 $|\boldsymbol{II}(\boldsymbol{t})|$ 为只与 $\boldsymbol{u}$ 参量有关而与 $\boldsymbol{t}$ 无关时，就不再有意义.

上取极值 Gauss 曲率的那些切方向——传统上称其为主法方向的方向——现改称为**主切方向** [1].

在 $n = m-1$ 时，$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$只有唯一的法方向(由多重矢量积给出)，故这一法方向自然就是主法方向. 在 $n < m-1$ 时，对 $n=1$ 决定的 1 维曲线 $\boldsymbol{x}(s)$，主法方向由 Frenet 标架系决定的方向给出，而切方向只有唯一的一个$\nabla \boldsymbol{x}$. $\nabla \boldsymbol{x}$ 自然就是主切方向. 在 $1 < n < m-1$ 时，主法方向由以上的 N_k 极值规划给出，主法方向 $\boldsymbol{n}_1, \cdots, \boldsymbol{n}_{m-n}$确定后，在 $\boldsymbol{n}_i$ 主法方向下的对应的主切方向可用 Weingraten 映射特征值方法决定. 对此下文还有具体说明. 以下先给予上文的极值规划方法作出几个示例，以便于理解.

例 2.4.4.2 设 R^4 空间上有以下正则 2 维曲面片

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}):\begin{cases} x_1 = x_1(u_1, u_2) \\ x_2 = au_1 + bu_2 \\ x_3 = u_1 \\ x_4 = u_2 \end{cases} \qquad a、b\text{—const}$$

以下求出 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的主法方向 $\boldsymbol{n}_1、\boldsymbol{n}_2$.

由

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ a & b \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1+a^2+\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}\right)^2 & ab+\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ ab+\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & 1+b^2+\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2}\right)^2 \end{bmatrix}$$

选取 $\boldsymbol{c}_1^1 = \boldsymbol{e}_1$，由

$$\boldsymbol{N}^1 = \dot{\boldsymbol{r}}_1 \times \dot{\boldsymbol{r}}_2 \times \boldsymbol{e}_1 \Rightarrow \boldsymbol{N}^1 = (0, 1, -a, -b)^{\mathrm{T}}$$

再由 $\boldsymbol{c}_1^2 = \boldsymbol{e}_2$

$$\boldsymbol{N}^2 = \dot{\boldsymbol{r}}_1 \times \dot{\boldsymbol{r}}_2 \times \boldsymbol{e}_2 \Rightarrow \boldsymbol{N}^2 = \left(-1, 0, \frac{\partial x_1}{\partial u_1}, \frac{\partial x_2}{\partial u_2}\right)^{\mathrm{T}}$$

这里不取

$$\boldsymbol{N}^2 = \dot{\boldsymbol{r}}_1 \times \dot{\boldsymbol{r}}_2 \times \boldsymbol{N}^1$$

的方式，是为了简化 $\boldsymbol{N}^2$ 的形式以方便下面的推导.

记$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$法空间的单位法向量是 $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4)^{\mathrm{T}}$

[1] 这一改称仅局限于本节内容.

$$\boldsymbol{n}=\frac{\mathbf{N}^1 t_1+\mathbf{N}^2 t_2}{(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t})^{\frac{1}{2}}} \qquad \Pi=[\mathbf{N}^1,\ \mathbf{N}^2]$$

因为 $\mathbf{N}^1$ 是常数向量，$\dfrac{\partial \mathbf{N}^1}{\partial \boldsymbol{u}}=0$. 故由(2.4.4.6)式

$$\widetilde{\mathrm{II}}^2(\boldsymbol{t})=-\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \mathbf{N}^2}{\partial \boldsymbol{u}}$$

由

$$\frac{\partial \mathbf{N}^2}{\partial \boldsymbol{u}}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ & \nabla^2 x_1\end{bmatrix} \qquad \nabla^2 x_1=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial u_1^2} & \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial u_1\partial u_2}\\ \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial u_1\partial u_2} & \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial u_2^2}\end{bmatrix}$$

所以，在 $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t}=1$ 条件下，直接取，

$$\mathrm{II}(\boldsymbol{t})=\mathrm{II}^2(\boldsymbol{t})=-t_2\nabla^2 x_1$$

于是

$$|\mathrm{II}(\boldsymbol{t})|=t_2^2\,|\nabla^2 x_1|=F(\boldsymbol{t})$$

由极值规划

$$\begin{cases}\text{极值：} t_2^2\,|\nabla^2 x_1|\\ \text{s.t.}\quad \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t}=1\end{cases}$$

由于现 $n=2$

$$F(\boldsymbol{t})=t_2^2\,|\nabla^2 x_1|$$

由(2.4.4.17)式

$$\nabla_t^2 F=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\,|\nabla^2 x_1|\end{bmatrix}$$

$$\Pi^{\mathrm{T}}\Pi=\begin{bmatrix}1+a^2+b^2 & -\left(a\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}+b\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2}\right)\\ -\left(a\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}+b\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2}\right) & 1+\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2}\right)^2\end{bmatrix}$$

$$|\Pi^{\mathrm{T}}\Pi|=1+a^2+b^2+\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_2}\right)^2+\left(b\frac{\partial x_1}{\partial u_1}-a\frac{\partial x_1}{\partial u_2}\right)^2>0$$

以及

$$|\nabla_t^2 F-\lambda\Pi^{\mathrm{T}}\Pi|=0$$

直接计算即得特征多项式

$$(2(1+a^2+b^2)\,|\,\nabla^2 x_1\,| - |\,\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\,|\cdot\lambda)\lambda = 0$$

所以有 2 个特征值

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = \frac{2(1+a^2+b^2)\,|\,\nabla^2 x_1\,|}{|\,\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\,|}$$

由

$$\begin{cases}[\nabla_i^2 F - \lambda \Pi^{\mathrm{T}}\Pi]\boldsymbol{t} = 0 \\ \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t} = 1\end{cases} \qquad \text{—(2.4.4.16)}$$

决定 $\lambda_{1,2}$ 对应的特征向量 $\hat{\boldsymbol{t}}_{1,2}$.

对于 $\lambda_1 = 0$,有

$$\hat{\boldsymbol{t}}_1 = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\ 0\right)^{\mathrm{T}}$$

由 $\hat{\boldsymbol{t}}_1$ 决定法方向

$$\hat{\boldsymbol{n}}_1 = \Pi\hat{\boldsymbol{t}}_1 = \pm\frac{\boldsymbol{N}^1}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \qquad \text{—(a)}$$

类似地,由 λ_2 可决定 $\hat{\boldsymbol{t}}_2$. 从(2.4.4.16)式可得

$$\hat{\boldsymbol{t}}_2 = \begin{bmatrix} a\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} + b\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ 1+a^2+b^2 \end{bmatrix} t$$

t 是待定参数. 从约束条件可得

$$\hat{\boldsymbol{t}}_2^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\hat{\boldsymbol{t}}_2 = (1+a^2+b^2)\cdot|\,\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\,|\,t^2 = 1$$

故

$$t = \pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}\cdot|\,\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\,|^{\frac{1}{2}}}$$

由此最终可得

$$\hat{\boldsymbol{t}}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}\cdot|\,\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\,|^{\frac{1}{2}}}\begin{bmatrix} a\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} + b\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ 1+a^2+b^2 \end{bmatrix}$$

以及

$$\hat{\boldsymbol{n}}_2 = \Pi \hat{\boldsymbol{t}}_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2} \cdot |\Pi^{\mathrm{T}}\Pi|^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} -(1+a^2+b^2) \\ a\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} + b\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ (1+b^2)\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} - ab\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ -ab\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} + (1+a^2)\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} \end{bmatrix} \quad \text{—(b)}$$

易证 $\hat{\boldsymbol{n}}_1 \perp \hat{\boldsymbol{n}}_2$.

由

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_1 \partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial u_1^2} & \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial u_1 \partial u_2} \\ & 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_2 \partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial u_2 \partial u_1} & \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial u_2^2} \\ & 0 \end{bmatrix}$$

及

$$\mathbb{I}^i = \left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_1 \partial \boldsymbol{u}} \boldsymbol{n}_i ,\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_2 \partial \boldsymbol{u}} \boldsymbol{n}_i \right]$$

的关系，直接可验证

$$\mathbb{I}^1 = [0] \qquad \mathbb{I}^2 = \mp \frac{\sqrt{1+a^2+b^2}}{|\Pi^{\mathrm{T}}\Pi|^{\frac{1}{2}}} \nabla^2 x_1$$

由此可验证(2.4.4.52)式的关系. 如与 λ_2 比较，因 $m=4$，$n=2$，即有

$$\lambda_2 = 2 \cdot |\mathbb{I}^2|$$

现设 $|\nabla^2 x_1| \neq 0$，则按以上关于主法方向的规定，可取 $\boldsymbol{n}_1$ 主法方向为 $\hat{\boldsymbol{n}}_2$(符号任取，如取(b)式中等号右边取为+号)，则由于

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & -(1+a^2+b^2) & 0 \\ a & b & a\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} + b\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & 1 \\ 1 & 0 & (1+b^2)\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} - ab\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & -a \\ 0 & 1 & -ab\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} + (1+a^2)\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & -b \end{vmatrix} < 0$$

故应取

$$\boldsymbol{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}\ |\ \Pi^{\mathrm{T}}\Pi\ |^{\frac{1}{2}}}\begin{bmatrix} -(1+a^2+b^2) \\ a\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}+b\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ (1+b^2)\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}-ab\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ -ab\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}+(1+a^2)\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

这样，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$、$\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 即为 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面上的局部标架系. 本例中的 2 维曲面在 $\boldsymbol{n}_1$ 法方向下是有非零 Gauss 曲率的曲面，而在 $\boldsymbol{n}_2$ 法方向下则相当于是一个 2 维平面.

例 2.4.4.3 R^5 空间上的 2 维曲面

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}):\begin{cases} x_1 = \cos u \\ x_2 = \sin u \\ x_3 = \cos v \\ x_4 = \sin v \\ x_5 = u^2 - v^2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{u} = (u,\ v)^{\mathrm{T}}$$

则

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & -\sin v \\ 0 & \cos v \\ 2u & -2v \end{bmatrix}$$

由正则参数曲面片的要求，可将 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的定义域取为

$$0 < u,\ v < 2\pi$$

利用多重矢量积，取 $\boldsymbol{c}_1^1 = \boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{c}_2^1 = \boldsymbol{e}_2$；$\boldsymbol{c}_1^2 = \boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{c}_2^2 = \boldsymbol{e}_4$，可得

$$\boldsymbol{N}^1 = \dot{\boldsymbol{r}}_1 \times \dot{\boldsymbol{r}}_2 \times \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = (0,\ 0,\ 2u\cos v,\ 2u\sin v,\ 0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{N}^2 = \dot{\boldsymbol{r}}_1 \times \dot{\boldsymbol{r}}_2 \times \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_4 = (2v\cos u,\ 2v\sin u,\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$$

在以上规定的定义域上，u，$v > 0$，故可将 $\boldsymbol{N}^1$、$\boldsymbol{N}^2$ 先行归一化，以简化以下的推导. 归一化后，仍用 $\boldsymbol{N}^1$，$\boldsymbol{N}^2$ 表示.

$$\boldsymbol{N}^1 = (0,\ 0,\ \cos v,\ \sin v,\ 0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{N}^2 = (\cos u,\ \sin u,\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$$

利用 $\boldsymbol{N}^1$，$\boldsymbol{N}^2$，再作多重矢量积

$$\boldsymbol{N}^3 = \dot{\boldsymbol{r}}_1 \times \dot{\boldsymbol{r}}_2 \times \boldsymbol{N}^1 \times \boldsymbol{N}^2 = (2u\sin u,\ -2u\cos u,\ -2v\sin v,\ 2v\cos v,\ 1)^{\mathrm{T}}$$

作

$$\Pi = [\boldsymbol{N}^1,\ \boldsymbol{N}^2,\ \boldsymbol{N}^3]$$

$$\Pi^{\mathrm{T}}\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+4(u^2+v^2) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{N} = \Pi\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} t_2\cos u + t_3 \cdot 2u\sin u \\ t_2\sin u - t_3 \cdot 2u\cos u \\ t_1\cos v - t_3 \cdot 2v\sin v \\ t_1\sin v + t_3 \cdot 2v\cos v \\ t^3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{t} = (t_1,\ t_2,\ t_3)^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{N}$ 是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 法空间中的任一向量.

在约束条件

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t} = t_1^2 + t_2^2 + (1+4(u^2+v^2))t_3^2 = 1$$

成立时，直接将 $\boldsymbol{N}$ 看成为归一的单位法向量，由

$$\mathrm{I\!I}(\boldsymbol{t}) = -\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial \boldsymbol{u}} = -\begin{bmatrix} t_2 - 2t_3 & 0 \\ 0 & t_1 + 2t_3 \end{bmatrix}$$

故极值规划是

$$\begin{cases} \text{极值：} t_1t_2 + 2t_2t_3 - 2t_1t_3 - 4t_3^2 = F(\boldsymbol{t}) \\ \text{s. t.} \quad t_1^2 + t_2^2 + (1+4(u^2+v^2))t_3^2 = 1 \end{cases}$$

由极值条件

$$|\nabla_t^2 F - \lambda\Pi^{\mathrm{T}}\Pi| = \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -8 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+4(u^2+v^2) \end{bmatrix} \right| = 0$$

可得以下特征多项式.

$$\lambda((1+4(u^2+v^2))\lambda^2 + 8\lambda - (8+(1+4(u^2+v^2)))) = 0$$

它的 3 个特征根是

$$\lambda_1 = -(1+8a) \qquad a = (1+4(u^2+v^2))^{-1}$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\lambda_3 = 0$$

由此得到满足 $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{t} = 1$ 条件的对应的特征向量是

$$\hat{\boldsymbol{t}}_1 = \pm \frac{1}{b}\begin{bmatrix} 4(1+a) \\ -4(1+a) \\ (1+8a)^2 - 1 \end{bmatrix} \qquad b = (32(1+4a)^2 + a^{-1}((1+8a)^2 - 1)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\hat{\boldsymbol{t}}_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{\boldsymbol{t}}_3 = \pm \left(\frac{1+8a}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由这些特征向量即可决定 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$法空间的单位正交标架系. 对于本例,可选择主法方向是 $\hat{\boldsymbol{t}}_1$、$\hat{\boldsymbol{t}}_2$ 等号右边取"+"号,并令 $\boldsymbol{n}_{1,2} = \boldsymbol{\Pi}\hat{\boldsymbol{t}}_{1,2}$. 然后,由 $\dot{\boldsymbol{r}}_1$, $\dot{\boldsymbol{r}}_2$, $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\pm\boldsymbol{n}_3$ 的(拟)右手性决定 $\hat{\boldsymbol{t}}_3$ 的符号,即可取到 $\boldsymbol{n}_3 = \boldsymbol{\Pi}\hat{\boldsymbol{t}}_3$.

例 2.4.4.4 R^6 空间上的 3 维正则参数曲面片

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) = (\cos u,\ \sin u,\ \cos v,\ \sin v,\ u^2 + v^2 + z^2,\ z)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{u} = (u,\ v,\ z)^{\mathrm{T}}$$

本例不能使用矩阵特征值方法去决定 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$法空间的极值标架系. 由

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} -\sin u & 0 & 0 \\ \cos u & 0 & 0 \\ 0 & -\sin v & 0 \\ 0 & \cos v & 0 \\ 2u & 2v & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

易由多重矢量积得

$$\boldsymbol{\Pi} = [\boldsymbol{N}^1,\ \boldsymbol{N}^2,\ \boldsymbol{N}^3] = \begin{bmatrix} 0 & \cos u & 2u\sin u \\ 0 & \sin u & -2u\cos u \\ \cos v & 0 & 2v\sin v \\ \sin v & 0 & -2v\cos v \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2z \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 4(u^2 + v^2 + z^2) \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$法空间的单位向量 $\boldsymbol{n}$ 可表成

$$\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix} t_2\cos u+t_3\cdot 2u\sin u \\ t_2\sin u-t_3\cdot 2u\cos u \\ t_1\cos v+t_3\cdot 2v\sin v \\ t_1\sin v-t_3\cdot 2v\cos v \\ t_3 \\ -t_3\cdot 2z \end{bmatrix}=\Pi t$$

并有

$$\mathit{II}(t)=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}}=-\begin{bmatrix} t_2-2t_3 & 0 & 0 \\ 0 & t_1-2t_3 & 0 \\ 0 & 0 & -2t_3 \end{bmatrix}$$

$$|\mathit{II}(t)|=-(4t_1t_3^2+4t_2t_3^2-2t_1t_2t_3-8t_3^3)$$

故可将极值规划表成以下形式

$$N_1:\begin{cases} 极值:4t_1t_3^2+4t_2t_3^2-2t_1t_2t_3-8t_3^3 \\ \text{s. t.}\quad t_1^2+t_2^2+(1+4(u^2+v^2+z^2))t_3^2=1 \end{cases}$$

作 L—函数

$$L=4t_1t_3^2+4t_2t_3^2-2t_1t_2t_3-8t_3^3+\zeta(1-t_1^2-t_2^2-(1+4(u^2+v^2+z^2))t_3^2)$$

以下以 $u^2+v^2+z^2=\frac{1}{4}$ 为例给出一个示例.

极值条件是

$$\begin{cases} 2t_3^2-t_2t_3-t_1\zeta=0 & (1) \\ 2t_3^2-t_1t_3-t_2\zeta=0 & (2) \\ 4t_1t_3+4t_2t_3-t_1t_2-12t_3^2-2t_3\zeta=0 & (3) \\ 1-t_1^2-t_2^2-2t_3^2=0 & (4) \end{cases}$$

(A) $\zeta=0$. 由(1)～(4)式得到

$$\begin{cases} t_3(2t_3-t_2)=0 \\ t_3(2t_3-t_1)=0 \\ 4t_3(t_1+t_2-3t_3)-t_1t_2=0 \\ 1-t_1^2-t_2^2-2t_3^2=0 \end{cases}$$

故取 $t_3=0$，$t_1t_2=0$ 即可得极值解

$$t_1=\pm 1\quad t_2=0,\ t_3=0,\ \zeta=0 \quad (\text{A. }1)$$

$$t_1=0,\ t_2=\pm 1\quad t_3=0,\ \zeta=0 \quad (\text{A. }2)$$

(B) $\zeta \neq 0$. 由以上(1)、(2)式相减并化简可得

$$(t_1 - t_2)(t_3 - \zeta) = 0$$

故(B.1)：$t_1 = t_2$. 则由(1)～(4)式可得以下极值条件

$$\begin{cases} 2t_3^2 - t_1 t_3 - t_1 \zeta = 0 & (5) \\ 8t_1 t_3 - t_1^2 - 12t_3^2 - 2t_3 \zeta = 0 & (6) \\ 1 - 2t_1^2 - 2t_3^2 = 0 & (7) \end{cases}$$

可见 $t_1 \neq 0$，否则(5)式要导出 $t_3 = 0$ 的情形从而与(7)式矛盾. 故从(5)式得

$$\zeta = \frac{2t_3^2 - t_1 t_3}{t_1} \tag{8}$$

代入(6)式，可得以下条件

$$\begin{cases} t_1^3 - 8t_1^2 t_3 + 10t_1 t_3^2 + 4t_3^3 = 0 & (9) \\ 2t_1^2 + 2t_3^2 = 1 & (7) \end{cases}$$

再从(7)式中得到

$$t_3^2 = \frac{1 - 2t_1^2}{2}$$

$$t_3 = \pm \left(\frac{1 - 2t_1^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} < t_1 < \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{10}$$

将这两个关系代回到(9)式，并经整理、简化，得

$$225t_1^6 - 210t_1^4 + 53t_1^2 - 2 = 0 \tag{11}$$

作替换 $t_1^2 = x$，(11)式可写成为

$$225x^3 - 210x^2 + 53x - 2 = 0 \tag{12}$$

(12)式是可得到准确解的形式. 它的 3 个根是

$$x_1 = \frac{2}{5}, \ x_2 = \frac{4 + \sqrt{11}}{15} \qquad x_3 = \frac{4 - \sqrt{11}}{15}$$

从而(11)式中的 t_1 有以下 6 个解，

$$t_1 = \pm\sqrt{\frac{2}{5}} \qquad t_1 = \pm \left(\frac{4 + \sqrt{11}}{15} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad t_1 = \pm \left(\frac{4 - \sqrt{11}}{15} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

由(13)式、(10)式给出的极值规划的可能解，按"±"符号的选择性搭配，现在共有 12 组解. 这 12 组解当中包含有在导出(11)式的方程形式的改变而引入的冗根. 因为现在是要找到极值规划中的目标函数极大值的最大的解，所以，可在这些(12

组)解中比较 ζ 乘子的绝对值(因有(2.4.4.52)式)来确定. 由此得到以下解

$$\left.\begin{aligned} &t_1 = t_2 = \left(\frac{4-\sqrt{11}}{15}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad t_3 = -\left(\frac{7+2\sqrt{11}}{30}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\zeta = \frac{7+2\sqrt{11}+(6+\sqrt{11})^{1/2}/\sqrt{2}}{\sqrt{15}\cdot(4-\sqrt{11})^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} \tag{B.1.1}$$

给出的 ζ 乘子为最大值.

(B.2): $t_3 = \zeta$. 由(3)式得

$$4(t_1+t_2)\zeta - t_1 t_2 = 14\zeta^2 \tag{14}$$

由(1)(或(2))式得

$$2\zeta^2 = \zeta(t_1+t_2) \tag{15}$$

将(15)式代入(14)式,得

$$t_1 t_2 = -6\zeta^2 \tag{16}$$

可得(因为 $\zeta \neq 0 \Rightarrow t_1、t_2 \neq 0$)

$$t_2 = -\frac{6\zeta^2}{t_1} \tag{17}$$

将此结果代回到(15)式,可得

$$t_1^2 - 2\zeta t_1 - 6\zeta^2 = 0$$

由此可得解

$$\begin{cases} t_1 = (1\pm\sqrt{7})\zeta \\ t_2 = (1\mp\sqrt{7})\zeta \\ t_3 = \zeta \\ \zeta = \pm\dfrac{1}{3\sqrt{2}} \end{cases} \tag{B.2.1}$$

现在再在(A.1)、(A.2)、(B.1.1)、(B.2.1)给出的解中选取 ζ 的绝对值最大的解,即为(B.1.1)给出的解. 所以,以

$$\boldsymbol{t}_1^* = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{4-\sqrt{11}}{15}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\dfrac{4-\sqrt{11}}{15}\right)^{\frac{1}{2}} \\ -\left(\dfrac{7+2\sqrt{11}}{30}\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{t}_1^*$$

作为$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的主法方向(由于极值目标函数实取为$-|\boldsymbol{I\!I}(\boldsymbol{t})|$,故实际可取$-\boldsymbol{t}_1^*$,即$-\boldsymbol{n}_1$为主法方向,见下文).

其次,求取$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的次主法方向.记

$$a=\left(\frac{4-\sqrt{11}}{15}\right)^{\frac{1}{2}}\qquad b=\left(\frac{7+2\sqrt{11}}{30}\right)^{\frac{1}{2}}$$

构造以下极值规划

$$N_2:\begin{cases}\text{极值}:4t_1t_3^2+4t_2t_3^2-2t_1t_2t_3-8t_3^3\\ s.\,t.\ \begin{cases}t_1^2+t_2^2+2t_3^2=1\\ \boldsymbol{n}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{t}=0\end{cases}\end{cases}$$

将约束条件表成

$$\boldsymbol{n}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{t}=0\Leftrightarrow(\boldsymbol{t}_1^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{t}=0$$

即

$$at_1+at_2-2bt_3=0$$

构造L—函数

$$L=4t_1t_3^2+4t_2t_3^2-2t_1t_2t_3-8t_3^3+\zeta_1(1-t_1^2-t_2^2-2t_3^2)+\zeta_2(at_1+at_2-2bt_3)$$

得到极值条件

$$\begin{cases}4t_3^2-2t_2t_3-2t_1\zeta_1+a\zeta_2=0 & (1)\\ 4t_3^2-2t_1t_3-2t_2\zeta_1+a\zeta_2=0 & (2)\\ 4t_1t_3+4t_2t_3-t_1t_2-12t_3^2-2t_3\zeta_1-b\zeta_2=0 & (3)\\ t_1^2+t_2^2+2t_3^2=1 & (4)\\ at_1+at_2-2bt_3=0 & (5)\end{cases}$$

仍由(1)、(2)式相减可得条件

$$(t_1-t_2)(t_3-\zeta_1)=0$$

由前面的分析已知,在有$\zeta_1\neq0$的解时,可以不用去考虑$\zeta_1=0$的解.故可先求解$\zeta_1\neq0$时的解.

(C) $t_3=\zeta_1$.从以上(1)~(3)中可得

$$\begin{cases}4\zeta_1^2-2t_1\zeta_1-2t_2\zeta_1+a\zeta_2=0 & (6)\\ 4t_1\zeta_1+4t_2\zeta_1-t_1t_2-14\zeta_1^2-b\zeta_2=0 & (7)\end{cases}$$

由(6)、(7)式又可得

$$\begin{cases}(t_1+t_2)\zeta_1 = 2\zeta_1^2+\frac{a}{2}\zeta_2 & (8)\\ t_1t_2 = (2a-b)\zeta_2-6\zeta_1^2 & (9)\end{cases}$$

(8)、(9)式本身有解 $\zeta_1=\zeta_2=0$,

$$\begin{cases}t_1=\pm 1,\ t_2=0,\ t_3=0\\ t_1=0,\ t_2=\pm 1,\ t_3=0\end{cases}$$

但这 2 组解不满足约束条件 $at_1+at_2=2bt_3$. 故略去.

取 $t_1\neq 0$, 从(9)式中得到

$$t_2=\frac{(2a-b)\zeta_2-6\zeta_1^2}{t_1} \tag{10}$$

将(10)代入(8), 整理简化可得(并取 $\zeta_1\neq 0$),

$$t_1=\frac{1}{2}\left[2\zeta_1+\frac{a}{2}\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1}\right)\pm\left(\left(2\zeta_1+\frac{a}{2}\frac{\zeta_2}{\zeta_1}\right)^2-4((2a-b)\zeta_2-6\zeta_1^2)\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad —(11)$$

由(5)式

$$a(t_1+t_2)=2b\zeta_1 \tag{12}$$

由(11)、(10)、(5)式可得

$$\zeta_2=\frac{4}{a}\left(\frac{a}{b}-1\right)\zeta_1^2 \tag{13}$$

$$\frac{\zeta_2}{\zeta_1}=\frac{4}{a}\left(\frac{a}{b}-1\right)\zeta_1$$

将以上结果代回到(11)式, 经整理, 并利用(10)式, 便可得到极值解,

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \left(\frac{b}{a}\pm\left(\frac{b^2}{a^2}+16\right)^{\frac{1}{2}}\right)\zeta_1\\ t_2 &= \left(\frac{b}{a}\mp\left(\frac{b^2}{a^2}+16\right)^{\frac{1}{2}}\right)\zeta_1\\ t_3 &= \zeta_1\\ \zeta_2 &= \frac{4}{a}\left(\frac{b}{a}-1\right)\zeta_1^2\\ \zeta_1 &= \pm\frac{1}{\left(4\frac{b^2}{a^2}+34\right)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}\right\} \tag{C.1}$$

(D) $t_1=t_2$. (1)～(5)式现可表示为

$$\begin{cases} 4t_3^2 - 2t_1t_3 - 2t_1\zeta_1 + a\zeta_2 = 0 & (14) \\ 8t_1t_3 - t_1^2 - 12t_3^2 - 2t_3\zeta_1 - b\zeta_2 = 0 & (15) \\ 2t_1^2 + 2t_3^2 = 1 & (16) \\ at_1 - bt_3 = 0 & (17) \end{cases}$$

由(17)式得

$$t_3 = \frac{a}{b}t_1 \tag{18}$$

代入(16)式，得

$$t_1 = t_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad t_3 = \pm \frac{\frac{a}{b}}{\sqrt{2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{19}$$

将(19)式再代回到(14)、(15)式可解出 ζ_1、ζ_2.

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \frac{b}{2(a^2+b^2)} \begin{bmatrix} -b & -a \\ 2\frac{a}{b}t_1 & -2t_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\frac{a}{b}\left(1-2\frac{a}{b}\right) \\ 1-4\frac{a}{b}\left(2-3\frac{a}{b}\right) \end{bmatrix} t_1 \tag{D.1}$$

比较(C.1)及(D.1)给出的 ζ_1 乘子的绝对值，可知次主法方向应取(C.1)给出的解.

(C.1)给出的极值解由符号的选择搭配共有 4 组解. 其中实际是 2 对共轭解. 取 $\zeta_1 > 0$，则(C.1)给出的极值解是

$$\begin{cases} \zeta_1 = \dfrac{1}{\left(4\frac{b^2}{a^2}+34\right)^{\frac{1}{2}}} \\ t_1 = -\left(\left(\frac{b^2}{a^2}+16\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{a}\right)\zeta_1 \\ t_2 = \left(\left(\frac{b^2}{a^2}+16\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{a}\right)\zeta_1 \\ t_3 = \zeta_1 \end{cases}$$

记

$$c_1 = -\left(\left(\frac{b^2}{a^2}+16\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{a}\right) \qquad c_2 = \left(\left(\frac{b^2}{a^2}+16\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{a}\right) \qquad \zeta = \zeta_1$$

则决定主法方向的 t_1^*、t_2^* 可表成

$$t_1^* = \begin{bmatrix} a \\ a \\ -b \end{bmatrix} \qquad t_2^* = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{bmatrix}\zeta$$

它们之间有关系

$$a(c_1 + c_2) = 2b \qquad 2(a^2 + b^2) = 1 \qquad c_1^2 + c_2^2 + 2 = \zeta^{-2}$$

由此得(注意 $|\mathit{II}(t)|) = -(\cdot)$，故取以上给出的 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 的反方向)，

$$\boldsymbol{n}_1 = -\begin{bmatrix} a\cos u - 2bu\sin u \\ a\sin u + 2bu\cos u \\ a\cos v - 2bv\sin v \\ a\sin v + 2bv\cos v \\ -b \\ 2bz \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{n}_2 = -\begin{bmatrix} c_2\cos u + 2u\sin u \\ c_2\sin u - 2u\cos u \\ c_1\cos v + 2v\sin v \\ c_1\sin v - 2v\cos v \\ 1 \\ -2z \end{bmatrix}\cdot\zeta$$

易验证 $\boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2$.

再由

$$\boldsymbol{n}_3 = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}_1 \times \dot{\boldsymbol{r}}_2 \times \dot{\boldsymbol{r}}_3 \times \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{I}|^{\frac{1}{2}}}$$

便可得到在 $u^2 + v^2 + z^2 = \dfrac{1}{4}$ 条件下的 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面法空间上的极值曲率意义上的单位法方向正交标架系.

由以上示例可见，在一般的 R^m 空间上的 n 维曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 上要确定出法空间的极值正交标架系，当 n 稍大一些或 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的函数形式稍复杂一些，要得到解析式所表示的主法方向 $\boldsymbol{n}_i$，一般是不可能的，只能利用数值方法予以研究.

在例 2.4.4.4 中，求解各极值规划时，都是将 $\boldsymbol{t}$ 变量当作 ζ 乘子的函数(或当作 t_1 变量的函数)解出来的. 此即表明前面假设的(2.4.4.25)式(或假设的(2.4.4.28)式)是成立的. 在其他情形下，当然可能存在这样的假设不能成立的情形. 对此还要给予说明.

仍以(2.4.4.19)式极值规划为例. 在极值条件(2.4.4.24)式中，记

$$\nabla_t L(\boldsymbol{t}, \lambda) = \frac{\partial L(\boldsymbol{t}, \lambda)}{\partial \boldsymbol{t}} = \frac{\partial F(\boldsymbol{t})}{\partial \boldsymbol{t}} - \lambda \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t} = 0 \qquad \text{—(2.4.4.56)}$$

$$\nabla_t^2 L(\boldsymbol{t}, \lambda) = \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{t}, \lambda)}{\partial \boldsymbol{t}^2} = \nabla_t^2 F(\boldsymbol{t}) - \lambda \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \qquad \text{—(2.4.4.57)}$$

现在，当(2.4.4.25)式不成立，即有 $\hat{\boldsymbol{t}}$，$\hat{\lambda}$，使

$$\nabla_t L(\hat{\boldsymbol{t}}, \hat{\lambda}) = \boldsymbol{0}$$

且

$$|\nabla_t^2 L(\hat{t}, \hat{\lambda})| = 0$$

那么,对于 $\hat{t}$ 的邻域 $N_\delta(\hat{t})$,对足够小的正数 δ,以及满足

$$t \in N_\delta(\hat{t}) \cap D_t$$

条件的 t 中,必定还有 $\tilde{t}$,使

$$\nabla_t L(\tilde{t}, \hat{\lambda}) = \mathbf{0}$$

成立.

换句话说,这时,作为 $F(t)$ 函数的一个极值 $\hat{t}$,就可能只是一个弱的极值点,而不能是一个严格的极值点. $F(t)$ 函数在 $\hat{t}$ 的邻域不能是严格凸(或凹)的. 本书 § 6 章已说明了 Largrange 函数

$$L(t, \lambda) = F(t) + \frac{\lambda}{2}(1 - t^{\mathrm{T}} \Pi^{\mathrm{T}} \Pi t)$$

是 Monge 形式的函数

$$z = F(t)$$

在 $t \in D_t$ 限制下,在 $Z_\alpha = \forall (t, z)$ 空间上的投影函数在极值点处的 0 阶、一阶和二阶等价的函数. 当 $F(t)$ 函数在 $t = \hat{t}$ 极值点处不是严格凸(或凹)的函数, $L(t, \lambda)$ 的二阶等价性,便要有

$$|\nabla_t^2 L(\hat{t}, \hat{\lambda})| = 0$$

成立. 也就是说,存在 D_t 的一个子集 $D' \subseteq D_t$,使 $F(t)$ 在 $t \in D'$ 时是常数,从而, $F(t)$ 在 R_t 上的投影曲面将包含有平面部分,所以 $\nabla_t^2 L$ 的行列式将为 0 [1].

这一点,也可由(2.4.4.52~53)式予以说明. 如果在 $t = \hat{t}$ 的极值点邻域,若对于 $t_1 \neq t_2$, t_1、$t_2 \in N_\delta(\hat{t})$ 都有

$$F(t_1) \neq F(t_2)$$

那么,由于 $\hat{t}$ 是 $F(t)$ 的极值,故 $\hat{t}$ 只能是所有 $t \in N_\delta(\hat{t})$ 中的局部严格极小值(或极大值)点. 从而 $F(t)$ 在 $\hat{t}$ 的邻域内只能是严格凸(或凹)的. 由二阶等价性

---

[1] $|\nabla_t^2 L| = 0$ 时,也可能一阶条件决定的 $\hat{t}$ 是 $F(t)$ 函数的拐(鞍)点. 但在 $F(t)$ 的约束极大值存在时,这种情形就可以不用考虑.

$$|\nabla_t^2 L(\hat{t}, \hat{\lambda})| \neq 0 \qquad —(2.4.4.25)$$

一定成立. 由此即知,由(2.4.4.52～53)式,(2.4.4.25)式不成立的充要条件就是在 D_t 的一个子集 D' 上,乘子 λ 为常数.

先设有 $D' \subseteq D_t$, $t \in D'$, 有不为 0 的常数 λ 乘子,使

$$\nabla_t L(\boldsymbol{t}, \lambda) \equiv \boldsymbol{0}$$

并且,出于这里分析的目的,同时设 $F(\boldsymbol{t})$ $\boldsymbol{t} \in D'$ 时的取值是极大值($\boldsymbol{t} \in D_t$ 意义上的极大值).

由于在 $\boldsymbol{t} \in D'$ 上 λ 是常数,故不用再考虑如何解出 λ. 因此,设

$$\text{rank } \nabla_t^2 L(\boldsymbol{t}, \lambda) = k \qquad 1 \leqslant k < m - n \qquad —(2.4.4.58)$$

不妨设$\nabla_t^2 L(\boldsymbol{t}, \lambda)$的前 $k \times k$ 阶顺序主子矩阵满秩. 则由隐函数定理,在(2.4.4.56)式中可得到

$$\boldsymbol{t}(t_{k+1}, \cdots, t_{m-n}) = \begin{cases} t_1 = t_1(t_{k+1}, \cdots, t_{m-n}) \\ \vdots \\ t_k = t_k(t_{k+1}, \cdots, t_{m-n}) \\ t_{k+j} = t_{k+j} \quad j = 1, 2, \cdots, m-n-k \end{cases} \qquad —(2.4.4.59)$$

将(2.4.4.59)式代入约束条件,便得

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(t_{k+1}, \cdots, t_{m-n})\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{t}(t_{k+1}, \cdots, t_{m-n}) = 1 \qquad —(2.4.4.60)$$

显然,(2.4.4.60)式就给出了上文所说的 D_t 的子集 D'的构造.

考虑以下集合

$$D_n = \{\boldsymbol{n} \mid \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \in D'\} \qquad —(2.4.4.61)$$

即 D_n 是由 $\boldsymbol{t} \in D'$ 决定的 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面的子法空间单位法向量全体的集合.

令

$$\cos\angle(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2) = \boldsymbol{n}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_2 \qquad \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \in D_n \qquad —(2.4.4.62)$$

现在,当

$$\min_{\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \in D_n} \cos\angle(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2) < 0$$

那么,就可以在 D_n 中取到$\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \in D_n$ 且$\boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2$ 作为 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面的(2 个)主法方向. 否则,若

$$\min_{\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \in D_n} \cos\angle(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2) \geqslant 0$$

那么,就只能任取 $\boldsymbol{n}_1 \in D_n$ 作为 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面的(1 个)主法方向.

设 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2 \in D_n$，$\boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2$，则可以继续寻找 D_n 中的向量 $\boldsymbol{n}_3$，

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}_3 = 0 \\ \boldsymbol{n}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}_3 = 0 \\ \boldsymbol{n}_3 \in D_n \end{cases}$$

这样的 $\boldsymbol{n}_3$ 可能存在，也可能不存在. 如此等等，可以在 D_n 中确定出一组单位正交的子标架系.

以上的方法从代数上讲，不妨设 $m-n-k=2$ 为例，是要去解出(2.4.4.59～60)式决定的以下方程的根，

$$\begin{cases} \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(x_1, x_2)\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi t}(y_1, y_2) = 0 \\ \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(x_1, x_2)\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi t}(x_1, x_2) = 1 \\ \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(y_1, y_2)\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi t}(y_1, y_2) = 1 \end{cases}$$

如果有 x_1，x_2；y_1，y_2 使以上方程组成立，就找到了

$$\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{\Pi t}(x_1, x_2)$$

$$\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{\Pi t}(y_1, y_2)$$

作为 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的 2 个主法方向.

很显然，在 $m-n-k=2$ 时，最多可以成立以下方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(x_1, x_2)\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi t}(y_1, y_2) = 0 \\ \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(x_1, x_2)\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi t}(z_1, z_2) = 0 \\ \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(y_1, y_2)\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi t}(z_1, z_2) = 0 \\ \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(x_1, x_2)\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi t}(x_1, x_2) = 1 \\ \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(y_1, y_2)\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi t}(y_1, y_2) = 1 \\ \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(z_1, z_2)\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi t}(z_1, z_2) = 1 \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{\Pi t}(x_1, x_2) \\ \boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{\Pi t}(y_1, y_2) \\ \boldsymbol{n}_3 = \boldsymbol{\Pi t}(z_1, z_2) \end{cases}$$

是 D_n 子法空间的一个极大线性无关正交单位向量组. 以上分析可以推广到其他场合.

由以上的分析可见，这里的情形实际上类似于在常数的实对称矩阵特征值与特征向量分析中 A、$B \in R^{n\times n}$，B 是正定矩阵，$A^{\mathrm{T}} = A$，

$$| A - \lambda B | = 0$$

所遇到的 λ 特征值为多重特征根，因此，需要在 λ 保持不变时，去求得对应的多个特征向量的情形. 只不过现在面临的是非线性的变数矩阵的情形，具有更为复杂的特点. 在不给出 $F(t)$ 的形式、和 Π 矩阵的构造，以及不转换成数值分析，一般无法判断 D_n 子法空间的结构更无法找寻 D_n 的正交基向量组. 但反过来说，$F(t)$ 函数的形式及 Π 矩阵的构造一旦确定，利用数值分析的方法，要找到 D_n 子法空间的一组正交基向量组就不会有什么困难(**续见 §6.6 节附录三**).

再假设有 $D' \subseteq D_t$，$t \in D'$ 有 $\lambda \equiv 0$，使

$$\nabla_t L(\boldsymbol{t},\ 0) \equiv \boldsymbol{0}$$

的情形. 显然，若 $F(\boldsymbol{t}) \equiv 0 \quad \boldsymbol{t} \in D'$ 自然是造成以上情形的一个原因. 这时，$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面在 $\boldsymbol{t} \in D'$ 法方向下是平面. 这种情形很容易处理. 只需得到这一平面的法空间的任一组单位正交基向量组便得到了所需的子标架系.

除此而外，更有意义是以下情形，即 $F(\boldsymbol{t}) = c(\boldsymbol{u})$，$c$ 是非 0 的只与 $\boldsymbol{u}$ 有关的函数. 这时也就有极值条件，

$$\nabla_t L(\boldsymbol{t},\ \lambda) = [0] - \lambda \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t} = \boldsymbol{0} \Rightarrow |\ \nabla_t^2 L(\boldsymbol{t},\ \lambda)\ | \equiv 0 \quad (\lambda = 0)$$

其一阶条件只在 $\lambda = 0$ 时恒成立. 但在这种场合，(2.4.4.52～53)式不再有意义. 具有这种性质的 n 维曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 具有一种**法向迷向**的几何性质. 相比较，可以称球面是具有**切向迷向**几何性质的曲面. 具有法向迷向性质的 n 维曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$，$1 \leqslant n < m-1$，更具有曲线的属性. 具有法向迷向性质的 n 维曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 上，从任一法方向看，它具有相同的 Gauss 总曲率. 最简单的法向迷向曲面(线)的模型即是 n 维平面.

法向迷向曲面与 C^{m+1} 复 Euclid 空间上由解析函数 $w = f(\boldsymbol{z})\ \boldsymbol{z} \in C^m$ 给出的复曲面，以及真空 Einstein 方程的几何解曲面有密切的关系. 对此可见 §4 章. 本章节稍后将先给出一个简单的法向迷向曲面的示例. 对于法向迷向的曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$，也可任选一组正交单位法向量作为基法向量组.

总结以上的分析，对于 R^m 空间上的 n 维曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$，总可以由极值方法去确定 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 法空间上的一组单位正交的可微法向量 $\boldsymbol{n}_i$，$i = 1,\ \cdots,\ m-n$. 当 $|\ \mathit{II}(\boldsymbol{t})\ |$ 可在 $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t} = 1$ 约束下得到的 $m-n$ 个极值规划 N_k 的(绝对值)极值都是局部严格极大值时，这样得到的 $\boldsymbol{n}_i$ 法向量组就是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面的唯一的法空间标架系，否则，则不具有唯一性.

以上在确定 $\boldsymbol{n}_i$ 主法方向时的 N_k 极值规划中，要求的是求解极大值规划. 这一规定等同于曲线上的 Frenet 标架的极值意义(也是极大值规划). 若要将以上的 N_k 规划全部改成极小值规划(或极小极大值规划等)也是可以的. 这不影响到诸结论. 但在取 N_k 极值规划为极大值规划的，可以有推论 2.4.4.6 这一结论.

以下再转向讨论 R^m 空间上的 n 维曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 上的法截曲线问题. 法截曲线

直接关系到法曲率概念进而关系到 Gauss 曲率概念的导出. 所以,在以上的讨论中,实际已涉及到 n 维曲面上的法截曲线如何确定的问题下面对此给予具体分析,并说明(2.4.4.5)式给出的 $\widetilde{\mathbb{I}}^h$ 矩阵的意义[1].

为说明在 R^m 空间上的 n 维曲面 f 的任一点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的法截曲线的概念,将 R^m 空间上的 n 维曲面 f,看成是 R^m 空间上的 $m-n$ 个 $m-1$ 维曲面 f_i 的交曲面. 即将 f 用以下方程组表出

$$f: \begin{cases} f_1(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \vdots \\ f_{m-n}(\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m \qquad —(2.4.4.63)$$

这里各个 $f_i(\boldsymbol{x})$ 都是 R^m 空间上正则的 $m-1$ 维曲面. 由隐函数定理,(2.4.4.63)式的方程组的 Jacobi 矩阵

$$G = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] \quad i = 1, \cdots, m-n;\ j = 1, \cdots, m$$

的秩对任一 $\boldsymbol{x} \in D$ 均应为 $m-n$.

考虑在 $\boldsymbol{x}^0 \in D$ 的邻域 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0)$ 内,对 $\boldsymbol{x} \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0)$ 的点作局部坐标系的变换,即令 $\boldsymbol{u}$、t 为参变量,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + Q \cdot \begin{bmatrix} t \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u} \in R^{m-n} \quad t \in R \qquad —(2.4.4.64)$$

这里 $Q \in R^{m\times(m-n+1)}$ 是一个列满秩的变换矩阵. 取 $\|\boldsymbol{u}\|$、$|t|$ 的值足够小,即知总可以使(2.4.4.64)式决定的 $\boldsymbol{x} \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0)$.

所以,以下方程组

$$f_i\left(\boldsymbol{x}^0 + Q \cdot \begin{bmatrix} t \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix}\right) = 0 \quad i = 1, \cdots, m-n \qquad —(2.4.4.65)$$

有解.

将(2.4.4.65)式看成是变量 $\boldsymbol{u}$、t 的隐函数方程组,则这一方程组的 Jacobi 矩阵

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}, t)}{\partial(\boldsymbol{u}, t)} = G \cdot Q \qquad \boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_{m-n})^{\mathrm{T}} \qquad —(2.4.4.66)$$

由乘积矩阵的秩的公式[2],应有

---

〔1〕 当 t 向量的取值满足约束条件 $t^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi t = 1$ 时,$\widetilde{\mathbb{I}}^h$ 可简记为 $\mathbb{I}^h$.

〔2〕 见本书的(5.5.2.1)式及其注.

$$\text{rank}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},\ t)}{\partial(\boldsymbol{u},\ t)}\right) = \text{rank}(GQ) = \text{rank}(Q) - \dim(R(Q) \cap N(G)) \qquad \text{—(2.4.4.67)}$$

这里 $R(Q)$、$N(G)$分别为 Q 的列空间和 G 的零度空间. 现在要是

$$\text{rank}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},\ t)}{\partial(\boldsymbol{u},\ t)}\right) = m - n \qquad \text{—(2.4.4.68)}$$

就可以从(2.4.4.65)式中,适当构造 Q 矩阵(见下文),就可以解得

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t)$$

将此结果代回到(2.4.4.64)式,就可以得到在 $\boldsymbol{x}^0$ 的邻域内,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + Q\begin{bmatrix} t \\ \boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}(t) \qquad \text{—(2.4.4.69)}$$

从而得到 n 维曲面 f 上的一条单参数 t 决定的曲线(1 维曲线)$\boldsymbol{x}(t)$.

因为 $\text{rank}(Q) = m - n + 1$, 所以,要在(2.4.4.64)式决定的变换下,得到 n 维曲面 f 上的单参数曲线 $\boldsymbol{x}(t)$,其充要条件是

$$\dim(R(Q) \cap N(G)) = 1$$

即 Q 的列空间与 G 的零度空间的交空间的维数为 1. 由于

$$G = \begin{bmatrix} \nabla f_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \nabla f_{m-n}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} \qquad \boldsymbol{f} = (f_1,\ \cdots,\ f_{m-n})^{\mathrm{T}}$$

且∇f_i 是 $f_i(\boldsymbol{x})$的梯度向量,即 $f_i(\boldsymbol{x}) = 0$ 决定的一个 $m-1$ 维曲面法向量,所以 G 的零度空间 $N(G)$就是 n 维曲面 f 的切空间. 这个切空间,由

$$G\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{\alpha} \in R^m$$

的解向量组成.

由此即知,按以下方式来构造变换矩阵 Q,

$$Q = [\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{n}_{m-n}] = [\boldsymbol{a},\ \Pi] \quad \Pi = [\boldsymbol{n}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{n}_{m-n}] \qquad \text{—(2.4.4.70)}$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 是 n 维曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切超平面上从 $\boldsymbol{x}^0$ 点出发的任一个向量,而 $\boldsymbol{n}_i$ 则是 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的法空间的一组基向量. 则 $\text{rank}Q = m - n + 1$, 且显然地有

$$\dim(R(Q) \cap N(G)) = \dim(\boldsymbol{a}t,\ t \in R) = 1 \qquad \text{—(2.4.4.71)}$$

成立. 并且,以(2.4.4.70)式给出的 Q 矩阵,对(2.4.4.65)式求导,

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},\ t)}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \Pi$$

很显然，$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{u},\ t)}{\partial \boldsymbol{u}}\right) = m - n$. 所以，这样构造的(2.4.4.65)式方程组中可解得 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t)$ 函数.

在(2.4.4.64)式至上式的推导过程中，如果设 $n \geqslant 2$，$m > n$，则将(2.4.4.64)式至(2.4.4.70)式中的 $m-n$ 全部替换成 k，$1 \leqslant k \leqslant m-n$，并规定

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = \Lambda t \quad t \in R^k \quad t \neq 0 \quad \Lambda \in R^{m\times(m-n)} \\ G\Lambda = 0 \quad (G \text{ 在 } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 \text{ 处取值}) \end{cases}$$

则(2.4.4.71)式的结果恒成立. 这时，将 Q 分解成

$$Q = [\boldsymbol{a},\ \Pi_k] \quad \Pi_k = [\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{n}_k] \qquad —(2.4.4.72)$$

则

$$GQ = G\boldsymbol{a} + G\Pi_k = G\Pi_k \qquad (\because\ G\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{0})$$

考虑在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处，

$$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},\ t)}{\partial \boldsymbol{u}}\right) = \mathrm{rank}[G\Pi_k]$$

因为 G、Π_k 都是 $N(G)$的正交补空间中的线性无关向量组，故

$$R(\Pi_k) \cap N(G) = \varnothing$$

所以，在(2.4.4.69)式给出的 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u},\ t) \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap D$ 邻域，能够成立以下条件，

$$\mathrm{rank}[G\Pi_k] = k \Rightarrow \mathrm{rank}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},\ t)}{\partial(\boldsymbol{u},\ t)}\right) = \mathrm{rank}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},\ t)}{\partial \boldsymbol{u}}\right) = k \qquad —(2.4.4.73)$$

从而在方程组(2.4.4.65)式中，便能解出 $\boldsymbol{u}(t)$，即可能在(2.4.4.64)式的变换下得到一条 n 维曲面 f 上过 $\boldsymbol{x}^0$ 点的单参数曲线 $\boldsymbol{x}(t)$[1].

在以上规定的(2.4.4.65)式变换下，这一组方程式形式上就如同§2.2.2节的(2.2.2.19)式给出的曲线方程组. 利用那里的分析，可以得到$\nabla\boldsymbol{x}(t)$、$\nabla^2\boldsymbol{x}(t)$的表达式.

将 k 维法截超平面上的法截曲线 $\boldsymbol{x}(t)$表成以下形式

---

[1] 但在 $k < m-n$ 时，对某些切方向 $\boldsymbol{a}$ 和法方向 $\boldsymbol{n}_i \boldsymbol{x}(t)$曲线可能只是 f 上的 1 个点即 $\boldsymbol{x}^0$ 点. 参见以下示例.

$$\begin{cases} x = x^0 + at + \Pi_k u \quad \dfrac{\partial f^{\mathrm{T}}(x^0)}{\partial x} a = 0 \quad u \in R^k \quad t \in R \quad a^{\mathrm{T}} a = 1 \\ f(x^0 + at + \Pi_k u) = 0 \end{cases}$$

—(2.4.4.74)

从(2.4.4.74)式的第 2 组函数式，可得 $u = u(t)$ 函数并要求 $u(0) = 0$，使 $x(0) = x^0$. 由此，对(2.4.4.74)式的第 1 组方程式求关于 t 的 1、2 阶导数

$$\begin{cases} \nabla x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a + \Pi_k \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\ \nabla^2 x = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \Pi_k \dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} \end{cases} \qquad \text{—(2.4.4.75)}$$

从(2.4.4.74)式的第 2 组函数式中求关于 t 的 1、2 阶导数

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Pi_k \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f(x)}{\partial x} a = 0 \qquad \text{—(2.4.4.76)}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} \Pi_k^{\mathrm{T}} \nabla^2 f_1(x) \Pi_k \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}u^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} \Pi_k^{\mathrm{T}} \nabla^2 f_{m-n}(x) \Pi_k \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^{\mathrm{T}} \nabla^2 f_1(x) \Pi_k \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ a^{\mathrm{T}} \nabla^2 f_{m-n}(x) \Pi_k \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Pi_k \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} \Pi_k^{\mathrm{T}} \nabla^2 f_1(x) a \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}u^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} \Pi_k^{\mathrm{T}} \nabla^2 f_{m-n}(x) a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^{\mathrm{T}} \nabla^2 f_1(x) a \\ \vdots \\ a^{\mathrm{T}} \nabla^2 f_{m-n}(x) a \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{—(2.4.4.77)}$$

由于矩阵

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x = x^0} = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x}$$

是曲面 f 在 x^0 点处的法空间的一组基. 且若对于 $x \in N_\delta(x^0) \cap D$，可成立，

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Pi_k \right) = \operatorname{rank}\left(\frac{\partial f(u, t)}{\partial u} \right) = \operatorname{rank}\left(\frac{\partial f(u, t)}{\partial (u, t)} \right) = k$$

乘积矩阵

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} \Pi_k \in R^{(m-n) \times k}$$

中就有 $k \times k$ 阶可逆子矩阵，记其为

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)}{\partial \boldsymbol{x}}\Pi_k\right]_{k\times k}$$

从(2.4.4.76)式中可得在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 处

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = -\left[\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)}{\partial \boldsymbol{x}}\Pi_k\right]_{k\times k}^{-1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{a}$$

且因为

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{0}$$

故知

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0} = \boldsymbol{0}$$

因要求有 $t = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{x}(t)$曲线过 $\boldsymbol{x}^0$ 点，故上式可表示为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\substack{t=0\\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}}} = \boldsymbol{0} \qquad \text{—(2.4.4.78)}$$

因此，从(2.4.4.77)式中即得在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 点处

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t^2} = -\left[\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)}{\partial \boldsymbol{x}}\Pi_k\right]_{k\times k}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2 f_1(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{a} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2 f_{m-n}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{a} \end{bmatrix} \qquad \text{—(2.4.4.79)}$$

由此即得在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 点处(由(2.4.4.75)式得)

$$\begin{cases} \nabla\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \qquad \nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{x} = 1 \\ \nabla^2\boldsymbol{x} = -\Pi_k\left[\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)}{\partial \boldsymbol{x}}\Pi_k\right]_{k\times k}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2 f_1(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{a} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2 f_{m-n}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{a} \end{bmatrix} \end{cases} \qquad \text{—(2.4.4.80)}$$

由(2.4.4.80)式，即知，在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 处，总有

$$\nabla\boldsymbol{x} \perp \nabla^2\boldsymbol{x}$$

故该法截曲线 $\boldsymbol{x}(t)$在 $t = 0$ 处的绝对曲率就是

$$\kappa_x = \|\nabla^2\boldsymbol{x}\|$$

其中$\nabla^2\boldsymbol{x}$ 由(2.4.4.80)式给出.

这里，如果局部标架系 $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \cdots, \boldsymbol{n}_k](k < m-n)$ 给出的只能是与 f 曲面相切的超平面，那么，法截曲线 $\boldsymbol{x}(t)$就退化为 $\boldsymbol{x}^0$ 这一个点. 此时，就不会成立

$$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},\ t)}{\partial(\boldsymbol{u},\ t)}\right)=\mathrm{rank}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},\ t)}{\partial \boldsymbol{u}}\right)=k$$

的条件(见下例，$\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},\ t)}{\partial \boldsymbol{u}}$、$\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},\ t)}{\partial(\boldsymbol{u},\ t)}$ 矩阵的秩在 $t \neq 0$，$|t|$ 充分小时分别为 1、2 并不相同).

当 $k=m-n$ 时，由于

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},\ t)}{\partial \boldsymbol{u}}=\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\Pi_k \in R^{(m-n)\times(m-n)}$$

且 $\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)}{\partial \boldsymbol{x}}$ 的行向量组、Π_k 矩阵的列向量组均是 f 曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的法空间的基向量组，故易知在 $|t|$ 充分小时，

$$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},\ t)}{\partial \boldsymbol{u}}\right)=m-n \Rightarrow \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},\ t)}{\partial \boldsymbol{u}} \text{ 可逆}$$

恒要成立. 故在 $k=m-n$ 时，$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{n}_{m-n}]$ 标架系决定的法截超平面一定能与 f 曲面相交并得到法截曲线(非退化)$\boldsymbol{x}(t)$.

从这里还可以看到 R^m 空间上的 n 维曲面与 $m-1$ 维曲面的差异. 在 $m-1$ 维曲面上，只有唯一的法方向 $\boldsymbol{n}$，因此，在该曲面任取的 $\boldsymbol{x}^0$ 点上，由切方向 $\boldsymbol{a}$ 与法方向 $\boldsymbol{n}$ 构造的法截平面(2 维)总能与曲面交到法截曲线. 并且，这一法截曲线由于是 2 维平面上的曲线，所以，可以求得它的相对曲率. 这就是传统意义上关于 $m-1$ 维曲面上 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的法曲率的概念.

但在 n 维曲面 $(n<m-1)$ 上，由上已见，不一定总能取到 2 维平面上的法截曲线. 一般地，只能说可以取到 $m-n+1$ 维法截超平面上的法截曲线. 由于这样得到的法截曲线一般地不再是 2 维平面上的曲线，故通常只能得到它的绝对曲率 κ_x. 由此说明通过以上给出的极值规划，以求得 n 维曲面的主法方向 $\boldsymbol{n}_1$，在 $n>1$ 的条件下，才可以在 $\boldsymbol{n}_1$ 法方向下，得到 2 维平面上的法截面线(曲率线).

以上内容可见下例予以理解. R^m 空间的 n 维曲面上的一般曲线及测地线在 §3.3.3 节还有介绍.

将(2.4.4.64)式给出的变换，其中 Q 由(2.4.4.72)式决定，看成是在 n 维曲面 f 的 $\boldsymbol{x}^0$ 点处决定了一个 $k+1$ 维法截超平面，

$$1 \leqslant k \leqslant m-n \qquad n \geqslant 2 \quad m>n$$

并附带地在这个法截超平面上确定了一个原点在 $\boldsymbol{x}^0$，以 Q 的列向量组为方向轴的局部标架系. 则以上方法就是上文分析过的在 R^m 空间上的 $m-1$ 维曲面上取 2 维法截平面方法的一个推广.

以上分析可归结为以下推论.

推论 2.4.4.7 设 f 是 R^m 空间上的 n 维正则参数曲面片，$2 \leqslant n \leqslant m-1$.

则在 f 上的 $\boldsymbol{x}^0$ 点处，可以构造 $k+1$ 维法截超平面，并在这个法截超平面上取到 f 上的过 $\boldsymbol{x}^0$ 点(位于 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域)的法截曲线 $\boldsymbol{x}(s)$. 其中

$$k = 1,\ \cdots,\ m-n$$

而 $\boldsymbol{x}(s)$ 是这个 $k+1$ 维超平面上的单参数曲线. 在 $k < m-n$ 时，$\boldsymbol{x}(s)$ 可能是退化的(即只是 $\boldsymbol{x}^0$ 点)，但在 $k = m-n$ 时，$\boldsymbol{x}(s)$ 一定是非退化的曲线. ■

所以，当 $n = m-1$，则只能取 $k=1$，从而在 $m-1$ 维曲面上只能取到 2 维法截平面上的法截曲线. 对于 $n=1$，取 $k = m-n = m-1$，总能取到 $k+1 = m$ 维法截超平面上的法截曲线，即 1 维曲面(线) f 自身；且这时在取 $1 \leqslant k < m-n$，$n = 1$ 时，所取到的法截曲线全部退化为 1 个点 $\boldsymbol{x}^0$.

利用以上的法截曲线的概念，设 R^m 空间上的 n 维正则参数曲面片 f，f 由 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) \in R^m \quad \boldsymbol{u} \in D_u \subset R^n$ 表示，则 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$ 是 f 的切空间基向量组，并设已由以上的极值方法得到了 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$ 的正交补空间的一组(极值意义上的)基法向量组 $\boldsymbol{n}_h$，$h = 1, 2, \cdots, m-n$，且 $\boldsymbol{I\!I}^h$ 是 $\boldsymbol{n}_h$ 决定的矩阵. 则对于 $\boldsymbol{I\!I}^h$，又可构造 Weingraten 映射矩阵

$$-D^h = W^h = \boldsymbol{I\!I}^h \boldsymbol{I}^{-1} \qquad \boldsymbol{I} = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$$

并记 λ_i^h，$i = 1, 2, \cdots, n$ 是 W^h 矩阵的特征值.

由于 W^h 矩阵仍具有 Weingarten 映射的意义，故 λ_i^h 是 $\boldsymbol{n}_h$ 法方向下的一个曲率量. 将 R^m 空间上的 n 维曲面 f 理解为 n 维曲线，则可以认为 λ_i^h 曲率量中，必有某个 $h = k$ 对应的 λ_i^k，是 $\boldsymbol{n}_k$ 法向量决定的 2 维法截平面上的法截曲线的曲率，且这一法截曲率的符号由 § 2.1 节的方法给出. 而其余的 λ_i^h 曲率量所对应的则是 n 维曲线 f 的某个投影意义上的曲率.

参照 § 2.3.2 节关于单参数曲线 Frenet 标架极值意义的分析，可以稍加改动应用到这里的 n 维曲线 f 上来. 但这会导致很繁琐的符号及冗长的说明，而其意义已包含在本节上面的极值规划之中. 所以，以下只利用一个典型的示例予以说明.

例 2.4.4.5 设 R^4 空间上，有以下正则参数曲面片

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) = (\cos u,\ \sin u,\ \cos v,\ \sin v)^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{u} = (u,\ v)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{D}_u \subset R^2$$

其中 D_u 是定义域，如何确定可见下文.

曲面片 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 是 R^4 空间上的一个 2 维曲面. 它也可以表示成以下方程组决定的交曲面

$$f:\begin{cases} f_1:\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ f_2:\ x_3^2 + x_4^2 = 1 \end{cases}$$

以上方程组的参数形式即是

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}^1(u, z_1, z_2) = (\cos u, \sin u, z_1, z_2)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{r}^2(p_1, p_2, v) = (p_1, p_2, \cos v, \sin v)^{\mathrm{T}}\end{cases}$$

这里的 $\boldsymbol{r}^{1,2}$ 分别是 R^4 空间上的 3 维曲面，其几何意义接近于 R^3 空间上的圆柱面.

$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面的正则性易见. 由

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & -\sin v \\ 0 & \cos v \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{I} = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2$$

即 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的第一基本微分形式与 2 维平面相同. 这里事先指出决不能因此推断 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的 Gauss 曲率处处为 0.

由 m 维空间上 n 个线性无关向量的多重矢量积算法，取

$$\boldsymbol{c}_3^1 = (1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{c}_3^2 = (0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$$

可得 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$ 的正交补空间上的一组基向量

$$\boldsymbol{N}^1 = (0, 0, -\cos u\cos v, -\cos u\sin v)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{N}^2 = (\cos u\sin v, \sin u\sin v, 0, 0)^{\mathrm{T}}$$

作

$$\boldsymbol{\Pi} = [\boldsymbol{N}^1, \boldsymbol{N}^2]$$

$$\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix} \cos^2 u & 0 \\ 0 & \sin^2 v \end{bmatrix} \qquad |\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}| = \cos^2 u \cdot \sin^2 v$$

由 $\boldsymbol{N}^1$、$\boldsymbol{N}^2$ 的线性无关性，应有 $\cos u \cdot \sin v > 0$（或 < 0），由此可得到 $\boldsymbol{u}$ 的定义域，如取

$$D_{\boldsymbol{u}} = \left\{\boldsymbol{u} \middle| -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, 0 < v < \pi\right\}$$

由此得到极值规划约束条件

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{t} = t_1^2 \cdot \cos^2 u + t_2^2 \cdot \sin^2 v = 1$$

并作单位法向量

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{N}^1 t_1 + \boldsymbol{N}^2 t_2$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial \boldsymbol{N}^1}{\partial \boldsymbol{u}} t_1 + \frac{\partial \boldsymbol{N}^2}{\partial \boldsymbol{u}} t_2$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{N}^1}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \sin u \cos v & \cos u \sin v \\ \sin u \sin v & -\cos u \cos v \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{N}^2}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} -\sin u \sin v & \cos u \cos v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbb{I}}^1 = -\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{N}^1}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \cos u \end{bmatrix} \qquad \widetilde{\mathbb{I}}^2 = \begin{bmatrix} -\sin v & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{—(a)}$$

于是

$$\mathbb{I}(t) = \frac{\begin{bmatrix} -t_2 \sin v & 0 \\ 0 & t_1 \cos u \end{bmatrix}}{(t_1^2 \cos^2 u + t_2^2 \sin^2 v)^{\frac{1}{2}}}$$

利用以下变换

$$t_1 = \frac{a}{\cos u} \qquad t_2 = \frac{b}{\sin v}$$

得

$$|\mathbb{I}(t)| = -\frac{ab}{a^2 + b^2}$$

得到简化的极值规划

$$\begin{cases} \text{极值:} \; ab \\ \text{s. t.} \quad a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

由

$$L = ab + \zeta(1 - a^2 - b^2)$$

得到极值条件

$$\begin{bmatrix} 2\zeta & -1 \\ -1 & 2\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

故特征值 $\zeta = \pm \frac{1}{2}$.

对于 $\zeta_1=-\dfrac{1}{2}$，可得 $a=-b\quad a=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，有

$$\boldsymbol{t}_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}\cos u},\ \frac{1}{\sqrt{2}\sin v}\right)^{\mathrm{T}}$$

由 $\zeta_2=\dfrac{1}{2}$ 亦可得

$$\boldsymbol{t}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cos u},\ \frac{1}{\sqrt{2}\sin v}\right)^{\mathrm{T}}$$

并得到

$$\boldsymbol{n}_1=\frac{\Pi\boldsymbol{t}_1}{(\boldsymbol{t}_1^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t}_1)^{\frac{1}{2}}}=\Pi\boldsymbol{t}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\cos u\\ \sin u\\ \cos v\\ \sin v\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{n}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\cos u\\ \sin u\\ -\cos v\\ -\sin v\end{bmatrix}$$

仍然有 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$.

由 $\left|\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u},\ \dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v},\ \boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2\right|$ 行列式的值为 1，故这个局部标架系为右手性. 在这个局部标架系上，取极值法方向 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 决定下的这一曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 上的第二基本二次型矩阵分别是

$$\begin{cases}\mathbb{I}^1=-\dfrac{\partial\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{u}}\dfrac{\partial\boldsymbol{n}_1}{\partial\boldsymbol{u}}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\\ \mathbb{I}^2=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\end{cases}\qquad\text{—(b)}$$

取 $u=\dfrac{\pi}{3}\quad v=\dfrac{\pi}{6}\quad \boldsymbol{x}^0=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$ 为例.

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{u}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & 0\\ 1 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & \sqrt{3}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{n}_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{3}\\ \sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{n}_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{3}\\ -\sqrt{3}\\ -1\end{bmatrix}$$

取非 0 向量 $\boldsymbol{h}\in R^2$，作曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的单位切向量 $\boldsymbol{a}$

$$a = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{h} \qquad \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} = 1 \qquad \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = 1$$

并用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{n}_1$ 向量作过 $\boldsymbol{x}^0$ 点的 2 维法截平面

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{n}_1 s$$

于是

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 - \sqrt{3}h_1 t + \frac{1}{\sqrt{2}}s \\ \sqrt{3} + h_1 t + \sqrt{\frac{3}{2}}s \\ \sqrt{3} - h_2 t + \sqrt{\frac{3}{2}}s \\ 1 + \sqrt{3}h_2 t + \frac{1}{\sqrt{2}}s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ \cos v \\ \sin v \end{bmatrix}$$

这一个 2 维法截平面与 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的交曲线由以下方程组决定

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\left[\left(1 - \sqrt{3}h_1 t + \frac{1}{\sqrt{2}}s\right)^2 + \left(\sqrt{3} + h_1 t + \sqrt{\frac{3}{2}}s\right)^2\right] = 1 \\ \frac{1}{4}\left[\left(\sqrt{3} - h_2 t + \sqrt{\frac{3}{2}}s\right)^2 + \left(1 + \sqrt{3}h_2 t + \frac{1}{\sqrt{2}}s\right)^2\right] = 1 \end{cases}$$

展开并化简，有

$$\boldsymbol{f}: \begin{cases} h_1^2 t^2 + \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)^2 = 1 \\ h_2^2 t + \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)^2 = 1 \end{cases}$$

从这个关系中直接可得只有 $h_1^2 = h_2^2$ 时，才能在这一法截平面上得到 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 上的法截曲线. 也可以用(2.4.4.73)式的条件说明这一点. 由于

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(s,\ t)}{\partial s} = \begin{bmatrix} s + \sqrt{2} \\ s + \sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{f}(s,\ t)}{\partial (s,\ t)} = \begin{bmatrix} s + \sqrt{2} & 2h_1^2 t \\ s + \sqrt{2} & 2h_2^2 t \end{bmatrix}$$

故当且仅当 $h_1^2 = h_2^2$ 时，对 $|t|$ 充分小，且 $t \neq 0$ 的情形，才有

$$\operatorname{rank}\frac{\partial \boldsymbol{f}(s,\ t)}{\partial (s,\ t)} = \operatorname{rank}\frac{\partial \boldsymbol{f}(s,\ t)}{\partial s} = 1$$

另由 $\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} = 1$，即得 $h_1^2 = h_2^2 = \frac{1}{2}$.

则从以上关系即有

$$s=\sqrt{2}\left(-1\pm\left(1-\frac{t^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\qquad -\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$$

要求 $t=0\Rightarrow s=0$，即法截曲线过 $\boldsymbol{x}^0$ 点，可知应将上式取为

$$s=\sqrt{2}\left(1-\frac{t^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}$$

由此知

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{t^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{t^2}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{t^2}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{t^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0\qquad \left.\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

由于$\left.\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0}$就是法截曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的，并是在 $\boldsymbol{n}_1$ 法方向下法曲率（见§2.1节）. 这就说明 $\boldsymbol{n}_1$ 法方向下的法截曲线的曲率等于 W^1 矩阵的特征值，且由 $\boldsymbol{n}_1$ 的极值意义，即是 $\boldsymbol{n}_1$ 法方向下得到的就是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面上的主法曲率. 并且由

$$h_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad h_2=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

可知 $\boldsymbol{h}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Leftrightarrow\boldsymbol{h}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\boldsymbol{h}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Leftrightarrow\boldsymbol{h}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 故，由 $h_{1,2}$的符号取法，可知刚好有 2 条这样的法截曲线存在. 它们的曲率就是 W^1 矩阵的 2 个特征值$-\frac{1}{\sqrt{2}}$，且这两条法截曲线是在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处正交的.

这里附带地可以看到，当取 $\boldsymbol{a}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{u}}\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{n}_1$ 这 2 个方向作 2 维法截平面时，如果 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$是 R^m 空间上的 $m-1$ 维曲面，则任取的 $\boldsymbol{h}\in R^{m-1}$ 都可交到 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$上的法截曲线. 但以上的分析说明，如本例，在这 R^4 空间的 2 维曲面上，$\boldsymbol{n}_1$ 方向的 2 维法截平面上能取到 $h_1^2=h_2^2$ 条件决定的 2 条法截曲线. 这是 R^m 空间上的 n 维曲面（$n<m-1$）的又一个特殊的性质.

作为比较，可以再构造以下形式的 3 维法截平面，并说明在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处还存在有（无数条）符合推论 2.4.4.7 规定的法截曲线，并且以上得到的 2 条法截曲线是所有这些法截曲线中曲率取极值的曲线.

作

$$x = x^0 + at + n_1 s_1 + n_2 s_2 \qquad a = \frac{\partial r}{\partial u} h \quad h^T h = 1 \qquad —(a)$$

这即是用一个切方向 a 和 2 个法方向 n_1、n_2 在 x^0 点处构造一个 3 维法截平面.

$$x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 - \sqrt{3}h_1 t + \frac{1}{\sqrt{2}}s_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}s_2 \\ \sqrt{3} + h_1 t + \sqrt{\frac{3}{2}}s_1 + \sqrt{\frac{3}{2}}s_2 \\ \sqrt{3} - h_2 t + \sqrt{\frac{3}{2}}s_1 - \sqrt{\frac{3}{2}}s_2 \\ 1 + \sqrt{3}h_2 t + \frac{1}{\sqrt{2}}s_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}s_2 \end{bmatrix}$$

仍由

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \qquad x_3^2 + x_4^2 = 1$$

可得到

$$\begin{cases} f_1: h_1^2 t^2 + \frac{1}{2}s_1^2 + \frac{1}{2}s_2^2 + \sqrt{2}s_1 + \sqrt{2}s_2 + s_1 s_2 = 0 \\ f_2: h_2^2 t^2 + \frac{1}{2}s_1^2 + \frac{1}{2}s_2^2 + \sqrt{2}s_1 - \sqrt{2}s_2 - s_1 s_2 = 0 \end{cases} \qquad —(b)$$

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} (s_1 + \sqrt{2}) + s_2 & (s_1 + \sqrt{2}) + s_2 \\ (s_1 + \sqrt{2}) - s_2 & -((s_1 + \sqrt{2}) - s_2) \end{bmatrix}$$

知

$$\left|\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(s_1, s_2)}\right| = -2((s_1 + \sqrt{2})^2 - s_2^2)$$

故在 $(s_1 + \sqrt{2})^2 \neq s_2^2$ 条件下，f_1、$f_2 = 0$ 方程式可解出 $s_1(t)$、$s_2(t)$ 函数. 由隐函数定理.

$$\begin{bmatrix} \frac{ds_1}{dt} \\ \frac{ds_2}{dt} \end{bmatrix} = -\left[\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(s_1, s_2)}\right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{bmatrix}$$

由

$$\left[\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(s_1, s_2)}\right]^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} ((s_1 + \sqrt{2}) + s_2)^{-1} & ((s_1 + \sqrt{2}) - s_2)^{-1} \\ ((s_1 + \sqrt{2}) + s_2)^{-1} & -((s_1 + \sqrt{2}) - s_2)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial t}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial t}\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}h_1^2\\ h_2^2\end{bmatrix}t$$

得

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\dfrac{h_1^2}{s_1+\sqrt{2}+s_2}+\dfrac{h_2^2}{s_1+\sqrt{2}-s_2}\\ \dfrac{h_1^2}{s_1+\sqrt{2}+s_2}-\dfrac{h_2^2}{s_1+\sqrt{2}-s_2}\end{bmatrix}t \qquad \text{—(c)}$$

故

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}_{\substack{t=0\\ s_1,\, s_2=0}}=0$$

这里 $t=0\Rightarrow s_1=s_2=0$ 是方程式(b)的特解之一，故可以取到. 对(c)式再求关于 t 的导数，并在 $t=s_1=s_2=0$ 处取值，即知

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}^2s_1}{\mathrm{d}t^2}\\ \dfrac{\mathrm{d}^2s_2}{\mathrm{d}t^2}\end{bmatrix}_{\substack{t=0\\ s_1,\, s_2=0}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}h_1^2+h_2^2\\ h_1^2-h_2^2\end{bmatrix}$$

由(a)式，在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\nabla\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{n}_1\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{n}_2\frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}h_1\\ h_1\\ -h_2\\ \sqrt{3}h_2\end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}=\nabla^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{n}_1\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+\boldsymbol{n}_2\frac{\mathrm{d}^2s_2}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}h_1^2\\ \sqrt{3}h_1^2\\ \sqrt{3}h_2^2\\ h_2^2\end{bmatrix}$$

所以

$$\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{x}=1 \qquad \nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\nabla^2\boldsymbol{x}=0 \qquad \nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\nabla^2\boldsymbol{x}=h_1^4+h_2^4$$

由此知(a)式决定的 3 维法截平面上得到的法截曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的(绝对)曲

率是

$$\kappa_x = (h_1^4 + h_2^4)^{\frac{1}{2}} \qquad (h_1^2 + h_2^2 = 1)$$

显然，现在 h_1, h_2 是可变动的. 故对 κ_x 求其极值，等价于以下条件极值规划

$$\begin{cases} \text{极值} & h_1^4 + h_2^4 \\ \text{s.t.} & h_1^2 + h_2^2 = 1 \end{cases}$$

从中可得极值充要条件

$$h_1\left(h_1^2 - \frac{\zeta}{2}\right) = 0 \qquad h_2\left(h_2^2 - \frac{\zeta}{2}\right) = 0 \qquad \text{—(d)}$$

由于 h_1、h_2 不能同时为 0，故可以取

$$h_1^2 = \frac{\zeta}{2} = h_2^2 \Rightarrow h_1^2 = h_2^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \kappa_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

由此又得前述的两条法截曲线. 还可知道，在 $h_1^2 = h_2^2$ 条件下，将(b)式中第一式减去第二式即得

$$s_2(\sqrt{2} + s_1) = 0$$

因为在法截曲线上 s_1 是变量，故上式表示必有 $s_2 \equiv 0$. 即这样得到的 2 条法截曲线一定是 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{n}_1$ 决定的 2 维平面上的曲线[1]. 再由这些曲线上总有 $\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}$ 与 $\boldsymbol{n}_1$ 刚好方向相反的事实，以及平面曲线相对曲率的符号规定，即知这两条平面上的法截曲线的(相对)曲率应为 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

所以，两种方法得到的结果一致. 但后一种方法对 $h_1^2 = h_2^2$ 的条件给出了极值意义的说明

应注意到(d)式的极值条件中，还有以下 2 个解

$$h_1 = 1,\ h_2 = 0,\ \frac{\zeta}{2} = 1$$

$$h_1 = 0,\ h_2 = 1,\ \frac{\zeta}{2} = 1$$

这一组解所给出的法截曲线，在意义上与极值规划(2.4.4.19)式具有一些差异. 比如，以 $h_1 = 1$, $h_2 = 0$ 为例. 它表示的实际是取 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面上

---

[1] 也可以在 $h_1^2 = h_2^2$ 条件下，直接验证这样得到 3 维法截平面上的法截曲线的挠率为 0 得知它必是平面曲线.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} t + \frac{\boldsymbol{N}^2}{\| \boldsymbol{N}^2 \|} s$$

法截平面所截得的曲线. 即只是 R^4 空间上的以下 2 维曲面

$$f_1: x_1^2 + x_2^2 = 1$$

上, 过 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的法截曲线.

这可以将 $h_1 = 1$, $h_2 = 0$ 代入以上的(b)式, 由其第 2 式

$$f_2: \frac{1}{2}s_1^2 + \frac{1}{2}s_2^2 + \sqrt{2}s_1 - \sqrt{2}s_2 - s_1 s_2 = 0$$

可知现在 s_1、s_2 中有一个不独立. 如可得到

$$s_2 = s_1 + \sqrt{2} \pm \sqrt{2}$$

要求 $s_1 = 0 \Rightarrow s_2 = 0$, 故应有 $s_2 = s_1$.

从而, 现在法截平面实际是

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2}{\sqrt{2}}s \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}t + 2\sqrt{\frac{3}{2}}s \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

将 s 前的法向量 $\left[\frac{2}{\sqrt{2}},\ 2\sqrt{\frac{3}{2}},\ 0,\ 0\right]^{\mathrm{T}}$ 再归一化, 就是 f_1 曲面上 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的法截平面. 在这个法截平面上, 法截曲线的法方向显然由 f_1 曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的法方向给出.

因此, 在这样的规定下, 所得到的法截曲线仅只是 f_1 曲面上的法截曲线. 相对于 f_1 的法方向, 它的曲率即为 1. 更详细一些的分析可见下文. 这里仅指出, 由此即知, 不应当将 $h_1 = 1$, $h_2 = 0$ 条件决定的法截曲线看成是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面作为 2 维曲面上的代表性的极值曲线.

因此, 由曲面的 Gauss 曲率的定义, 应将 $\boldsymbol{n}_1$ 法方向视为 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面的主法方向, 并将 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面的 Gauss 曲率规定为

$$\kappa = | W^1 | = | \mathbb{I}^1 | = \frac{1}{2}$$

由此可知在 R^m 空间上, 第一基本二次型矩阵取为单位阵的 n 维曲面 $(1 < n < m-1)$, 其 Gauss 曲率可以不为 0. 这里其实还涉及到了所谓的"内蕴几何分

析”方法的适用性条件问题(详见下文).

以下,继续考察矩阵$\boldsymbol{I\!I}^2$的意义.先对 $\boldsymbol{n}_2$ 法方向构造以下 2 维法截平面

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{n}_2 s \quad \boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} = 1 \qquad \text{—(e)}$$

类似以上方法,马上得到以下方程组

$$\boldsymbol{f}: \begin{cases} h_1^2 t^2 + \dfrac{s^2}{2} + \sqrt{2}s = 0 \\ h_2^2 t^2 + \dfrac{s^2}{2} - \sqrt{2}s = 0 \end{cases}$$

从这一关系中直接得到只能有

$$t^2 + s^2 = 0 \Rightarrow t = s = 0$$

即知对任取的 $\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} = 1$,由 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{n}_2$ 构造的法截平面(即(e)式)只能是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$决定的 2 维曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的一个切平面.这类似于 R^3 空间中的曲线在其上一点处的从切平面的情形.这就是上文曾提及的,在推论 2.4.4.7 中,当 $k < m - n$ 时,所构造的法截平面可以存在只能与 n 维曲面 f 交到 $\boldsymbol{x}^0$ 这一个点的退化的情形.从(2.4.4.73)式条件上讲,由于在(e)式中

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(s,t)}{\partial s} = \begin{bmatrix} s+\sqrt{2} \\ s-\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{f}(s,t)}{\partial (s,t)} = \begin{bmatrix} s+\sqrt{2} & 2h_1^2 t \\ s-\sqrt{2} & 2h_2^2 t \end{bmatrix}$$

现在,在$|t|$充分小,$t \neq 0$ 的时候,不论如何选取 h_1、h_2 的值,因为

$$\left| \frac{\partial \boldsymbol{f}(s,t)}{\partial (s,t)} \right| = 2t(\sqrt{2} + (h_2^2 - h_1^2)s) \not\equiv 0$$

故将出现

$$\operatorname{rank} \frac{\partial \boldsymbol{f}(s,t)}{\partial s} = 1 \neq \operatorname{rank} \frac{\partial \boldsymbol{f}(s,t)}{\partial (s,t)} = 2$$

的情形.从而以下线性方程组

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(s,t)}{\partial s} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \boldsymbol{f}(s,t)}{\partial t}$$

无解[1].

这样,就不能说(e)式决定的 2 维平面上存在有一条 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面上的(非退化

---

[1] 这里矩阵$\frac{\partial \boldsymbol{f}(s,t)}{\partial s}$等价于这一方程组的系数矩阵,$\frac{\partial \boldsymbol{f}(s,t)}{\partial (s,t)}$等价于增广系数矩阵,$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$是未知变量.

的)法截曲线. 但是可将 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面上，从 $\boldsymbol{x}^0$ 点出发的任一个切方向向量所能按投影关系对应的一条($\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面上的)曲线再投影到(e)式决定的平面上去.

具体作法如下. 设 $\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{h}\quad \boldsymbol{h} \in R^2\quad \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} = 1$，是任取的一个从 $\boldsymbol{x}^0$ 点出发的切方向向量. 作以下条件极值规划

$$\min\quad (\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{a}t))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{a}t))$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_3^2 + x_4^2 = 1 \end{cases}$$

则这一规划可决定 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 上的一条曲线 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$，而 $\boldsymbol{a}t$ 即是 $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0$ 在切空间上的正投影向量.

构造以上规划的 L—函数

$$L = \left(x_1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}h_1 t\right)^2 + \left(x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}h_1 t\right)^2 + \left(x_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{h_2}{2}t\right)^2 +$$

$$+ \left(x_4 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h_2 t\right)^2 + \zeta_1(1 - x_1^2 - x_2^2) + \zeta_2(1 - x_3^2 - x_4^2)$$

由极值条件可得

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}h_1 t)\cdot(1 - \zeta_1)^{-1}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + h_1 t)\cdot(1 - \zeta_1)^{-1}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - h_2 t)\cdot(1 - \zeta_2)^{-1}$$

$$x_4 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}h_2 t)\cdot(1 - \zeta_2)^{-1}$$

利用约束条件可得

$$1 - \zeta_1 = \pm(1 + h_1^2 t^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$1 - \zeta_2 = \pm(1 + h_2^2 t^2)^{\frac{1}{2}}$$

由于 $t = 0$ 时，要求曲线 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^0 > 0$，故应取

$$1 - \zeta_1 = (1 + h_1^2 t^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \zeta_1 < 0$$

$$1 - \zeta_2 = (1 + h_2^2 t^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \zeta_2 < 0$$

即得 $\boldsymbol{x}(t)$ 的参数函数形式，可表成

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{h}):\begin{cases}x_1=\dfrac{1-\sqrt{3}h_1t}{2\sqrt{1+h_1^2t^2}}\\ x_2=\dfrac{\sqrt{3}+h_1t}{2\sqrt{1+h_1^2t^2}}\\ x_3=\dfrac{\sqrt{3}-h_2t}{2\sqrt{1+h_2^2t^2}}\\ x_4=\dfrac{1+\sqrt{3}h_2t}{2\sqrt{1+h_2^2t^2}}\end{cases}$$

注意到 ζ_1、$\zeta_2<0$，故以上得到的 $\boldsymbol{x}(t)$ 由条件极值规划的二阶充分条件即知确是上述规划的极小值函数.

现在再将 $\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^0$ 向量投影到 $\boldsymbol{n}_2$ 方向上. 记 s 是这一投影的度量.

$$s=\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^0\|\cdot\cos\theta$$

$$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_2}{\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^0\|\cdot\|\boldsymbol{n}_2\|}$$

所以

$$s=(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_2=s(t)$$

显然，$s(t)$就是 $\boldsymbol{x}(t)$在$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}_2)$决定的切平面上的投影曲线. 直接计算，即得

$$s(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+h_1^2t^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+h_2^2t^2}}\right)$$

并可得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(h_1^2(1+h_1^2t^2)^{-\frac{3}{2}}-h_2^2(1+h_2^2t^2)^{-\frac{3}{2}})t$$

从而

$$\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(h_1^2(1+h_1^2t^2)^{-\frac{3}{2}}-h_2^2(1+h_2^2t^2)^{-\frac{3}{2}})+(\cdot)t$$

$(\cdot)$内的项无关紧要.

可知

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(h_1^2-h_2^2)$$

由§2.1节即知，$s(t)$曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的曲率（记为 κ_s）即为

$$\kappa_s = \left.\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(h_1^2 - h_2^2)$$

再对 κ_s 作以下条件极值规划

$$\begin{cases} \text{极值} & \kappa_s \\ \text{s. t.} & h_1^2 + h_2^2 = 1 \end{cases}$$

便有

$$h_1(1-\zeta) = 0 \qquad h_2(1+\zeta) = 0$$

ζ 是 L—乘子. 由于

$$1-\zeta = 0 \qquad 1+\zeta = 0$$

不能同时成立，故以上条件的解即为

$$\begin{cases} \zeta = 1,\ h_2 = 0,\ h_1 = \pm 1 \\ \zeta = -1,\ h_1 = 0,\ h_2 = \pm 1 \end{cases}$$

由于 $h_2 = 0$ 时，h_1、$-h_1$ 决定的实质上是同一条 $\boldsymbol{x}(t)$ 曲线，故以上的解给出了 2 条 $\boldsymbol{x}(t)$ 曲线. 且这 2 条 $\boldsymbol{x}(t)$ 曲线在($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{n}_2$)切平面上的投影曲线的曲率是所有可能取到的 $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{h})$ 曲线中具有极值意义的曲线.

由以上结果，κ_s 的 2 个极值就是 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$、$\frac{1}{\sqrt{2}}$，即是 W^2 矩阵的 2 个特征值. 由于 W^2 矩阵即为 $\mathit{II}^2 I^{-1}$，所以，这就给出了 II^2 矩阵的意义.

注意，由以上条件给出的其在($\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{n}_2$)决定的切平面上的投影曲线曲率 κ_s 取极值的且是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面上的曲线 $\boldsymbol{x}(t)$、与在 $\boldsymbol{n}_1$ 法方向下决定的法截曲率取极值的曲线，并不是同一条曲线.

由此可见 R^m 空间上的 n 维曲面 $(1 < n < m-1)$ 兼具有 1 维曲线和 $m-1$ 维曲面的一些属性但又与它们有所区别. 以本例而言，R^4 空间上的 2 维曲面，具有不止一个极值法方向. 这一点类似于 1 维曲线不同于 3 维曲面. 但 2 维曲面的极值法方向的极值意义，均是指的曲面上的法截曲线（或投影曲线）的曲率取极值，这一点又类似于 3 维曲面而不同于 1 维曲线[1].

需要说明，(2.4.4.19)式和(2.4.4.38)式的极值规划，是将 R^m 空间上的 n 维曲面当作"曲面"看待的. 如果只要求去找这个 n 维曲面上的具有极值意义的

---

〔1〕 见§2.3.2节. 由那里的分析，1 维曲线是通过求取 3 维、4 维……正交标架空间上的挠率极值给出 Frenet 标架的极值意义的. 即对于 1 维曲线，必须要使用到 $m-1$ 阶导数，而对于以上的 n 维曲面，只求曲率极值，故只使用了 2 阶导数.

一条曲线，那么，极值规划的形式及结果都与以上有所不同. 以下给出求取极值曲率 2 维法截曲线的一般方法.

为此，记在过 n 维曲面上的 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的任一切方向向量为 $\boldsymbol{\alpha}$，并记由 $\boldsymbol{\alpha}$ 和给定的 $\boldsymbol{t} \in R^{m-n}$ 所决定的法方向向量

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{\Pi t}}{(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi t})^{\frac{1}{2}}}$$

所得到的 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的法截曲线的法曲率为 $\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{t})$

$$\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{t}) = \frac{\sum_{i=1}^{m-n} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I\!I}^i \boldsymbol{\alpha} \cdot t_i}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I} \boldsymbol{\alpha}} \qquad \text{—(2.4.4.81)}$$

其中 $\boldsymbol{I\!I}^i$ 由(2.4.4.5)式决定. 要给出 $\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{t})$ 的极值，利用(2.4.4.6)式，可构造以下条件极值规划

$$\begin{cases} \text{极值：} \dfrac{\sum_{i=1}^{m-n} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{I\!I}}^i \boldsymbol{\alpha} \cdot t_i}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I} \boldsymbol{\alpha}} \\ \text{s.t.} \quad \boldsymbol{t\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi t} = 1 \end{cases} \qquad \text{—(2.4.4.82)}$$

由 L—函数

$$L = \frac{\sum_{i=1}^{m-n} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{I\!I}}^i \boldsymbol{\alpha} \cdot t_i}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I} \boldsymbol{\alpha}} + \zeta(1 - \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi t})$$

得极值条件

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{m-n} \widetilde{\boldsymbol{I\!I}}^i \cdot t_i - \kappa_n \cdot \boldsymbol{I} \right) \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0} \qquad \text{—(2.4.4.83)}$$

其中 κ_n 由(2.4.4.81)式决定. 仍记

$$\widetilde{\boldsymbol{I\!I}}(\boldsymbol{t}) = \sum_{i=1}^{m-n} \widetilde{\boldsymbol{I\!I}}^i \cdot t_i$$

则(2.4.4.83)式等价于

$$\left| \widetilde{\boldsymbol{I\!I}}(\boldsymbol{t}) - \kappa_n \cdot \boldsymbol{I} \right| = 0 \qquad \text{—(2.4.4.84)}$$

故知极值 κ_n 仍具有特征值的意义. 再记

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{I\!I}}^1 \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{I\!I}}^2 \boldsymbol{\alpha}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{I\!I}}^{m-n} \boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}$$

则由

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{t}} = 0 \Rightarrow \frac{\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha})}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I}\, \boldsymbol{\alpha}} = 2\zeta \Pi^{\mathrm{T}} \Pi \boldsymbol{t} \qquad \text{—(2.4.4.85)}$$

或

$$\zeta \boldsymbol{t} = \frac{1}{2}(\Pi^{\mathrm{T}}\Pi)^{-1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha})/\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{\alpha} \qquad \text{—(2.4.4.86)}$$

由(2.4.4.81)式，现在 κ_n 又可表示为

$$\kappa_n = \frac{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha})}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{\alpha}} \qquad \text{—(2.4.4.87)}$$

所以，即知

$$\zeta = \frac{1}{2}\kappa_n \qquad \text{—(2.4.4.88)}$$

注意到(2.4.4.87)式，有

$$\kappa_n \boldsymbol{t} = \frac{(\Pi^{\mathrm{T}}\Pi)^{-1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha})}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\alpha}} = (\Pi^{\mathrm{T}}\Pi)^{-1}\frac{\partial \kappa_n}{\partial \boldsymbol{t}} \qquad \text{—(2.4.4.89)}$$

(2.4.4.89)式即“包络定理”的一个形式.

由(2.4.4.89)式即知，n 维曲面上以 $\kappa_n = 0$ 为极值的充要条件是在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的切方向有 $\boldsymbol{\alpha}$，使

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{II}}^{i}\boldsymbol{\alpha} = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m-n \qquad \text{—(2.4.4.90)}$$

用因子 κ_n 乘(2.4.4.84)式左边的行列式，可将其表成

$$|\,\widetilde{\boldsymbol{II}}(\kappa_n \boldsymbol{t}) - \kappa_n^2 \cdot \boldsymbol{I}\,| = 0 \qquad \text{—(2.4.4.91)}$$

因为(2.4.4.89)式，以及以(2.4.4.85～87)式中还可以得到

$$\kappa_n^2 = \frac{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha})(\Pi^{\mathrm{T}}\Pi)^{-1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha})}{(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{\alpha})^2} = \kappa_n^2(\boldsymbol{\alpha}) \qquad \text{—(2.4.4.92)}$$

将(2.4.4.89)式、(2.4.4.92)式代入(2.4.4.91)式，并将其表成(因为 $\kappa_n \boldsymbol{t}$ 因子也可看成是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的函数)

$$|\,\widetilde{\boldsymbol{II}}(\boldsymbol{\alpha}) - \kappa_n^2(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{I}\,| = 0 \qquad \text{—(2.4.4.93)}$$

(2.4.4.93)式是关于 n 维变量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的 n 次多元多项式，是可解的. 由 $\boldsymbol{II}(\boldsymbol{t})$ 的对称性，(2.4.4.84)式，κ_n 总有 n 个特征解，且均为实数. 故(2.4.4.93)式中的 $\boldsymbol{\alpha}$ 也必至少有 n 个实数解. 由此可以得到 n 维曲面上，在 2 维法截曲线的曲率意义上取极值的全部(2 维)法截曲线.

与(2.4.4.19)式、(2.4.4.38)式极值规划相比较，(2.4.4.82)式给出的极值规划所确定的法截曲率取极值的那些法截曲线上，$|\,\boldsymbol{II}(t)\,|$ 行列式不一定是一

个极值.

续例 2.4.4.5 利用前面的结果,易得

$$\widetilde{\mathit{II}}(t)=\begin{bmatrix}-t_2\sin v & ,0\\ 0 & t_1\cos u\end{bmatrix}$$

$$t^{\mathrm T}\Pi^{\mathrm T}\Pi t=t_1^2\cos^2 u+t_2^2\sin^2 v$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}I\,\boldsymbol{\alpha}=\alpha_1^2+\alpha_2^2$$

(2.4.4.84)式现在是

$$\begin{vmatrix}-t_2\sin v-\kappa_n & 0\\ 0 & t_1\cos u-\kappa_n\end{vmatrix}=0 \qquad \text{—(a)}$$

取 $\alpha_1^2+\alpha_2^2=1$. 从(2.4.4.85)式中可得

$$\zeta t_1=\frac{\alpha_2^2}{2\cos u}\qquad \zeta t_2=-\frac{\alpha_1^2}{2\sin v}$$

由此即知 $\zeta\neq 0$. 故可表成

$$t_1=\frac{\alpha_2^2}{2\zeta\cos u}\qquad t_2=\frac{-\alpha_1^2}{2\zeta\sin v} \qquad \text{—(b)}$$

利用 $t^{\mathrm T}\Pi^{\mathrm T}\Pi t=1$ 条件,可得

$$\zeta=\pm\frac{1}{2}(\alpha_1^4+\alpha_2^4)^{\frac{1}{2}}$$

所以

$$\kappa_n=\pm(\alpha_1^4+\alpha_2^4)^{\frac{1}{2}}$$

简单地对以上的 κ_n 作条件极值规划

$$\begin{cases}\text{极值:}\ \alpha_1^4+\alpha_2^4\\ \text{s.t.}\quad \alpha_1^2+\alpha_2^2=1\end{cases} \qquad \text{—(c)}$$

将 $\alpha_{1,2}$看成 $h_{1,2}$,这一极值规划的形式已出现在例 2.4.4.5 中.

以上即是求取 n 维曲面上具极值曲率意义的 2 维法截曲线的一般方法.

从续例 2.4.4.5 中可见,(c)形式的规划的极值条件是 $\alpha_1^2=\alpha_2^2$ 和 $\alpha_1^2=1$, $\alpha_2^2=0$ 及 $\alpha_1^2=0$, $\alpha_2^2=1$. 在例 2.4.4.5 中,已知道 $\alpha_1^2=\alpha_2^2$ 条件给出了

$$f:\begin{cases}f_1:\ x_1^2+x_2^2=1\\ f_2:\ x_3^2+x_4^2=1\end{cases}$$

决定的 2 维曲面 f 上的具有 Gauss 曲率极值意义下的 2 条法截曲线. 在那里举

例说，$\alpha_1^2=1$，$\alpha_2^2=0$ 条件给出的是 f_1 曲面上，在∇f_1 法方向下的极值曲率意义上的一条法截曲线. 这一点，在续例 2.4.4.5 中可以见到. 在 $\alpha_1^2=1$，$\alpha_2^2=0$ 条件下，由上的(b)式中，可取 $\zeta=-\dfrac{1}{2}$，得，$t_1=0$，$t_2=\sin^{-1}v$，于是即知，由此决定的法方向就是 $\boldsymbol{N}^2$，即 f_1 曲面的法方向. 而 $\alpha_2^2=0$ 故切方向也仅由 f_1 曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切方向给出，所以，这一条件决定的法截曲线只是 f_1 曲面上的法截曲线.

但从例 2.4.4.5 中亦知，$\alpha_1^2=1$、$\alpha_2^2=0$(及 $\alpha_1^2=0$，$\alpha_2^2=1$) 条件给出曲线刚好是其在 $\boldsymbol{n}_2$ 方向[1]上的投影曲线的曲率取极值的曲线. 但这个现象是否具有一般的意义尚不清楚.

由以上的分析，对 R^m 空间上的 n 维曲面的 Gauss 曲率，可以给予以下形式的定义：

定义 2.4.4.2 设 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$是 R^m 空间上的 n 维正则参数曲面片 ($1<n\leqslant m-1$)，$\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{n}_{m-n}$是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$上任一点 $\boldsymbol{x}^0$ 处切超平面的正交补空间的任一组基单位向量组，$\boldsymbol{t}\in R^{m-n}$，称 $\boldsymbol{t}^*$ 决定的

$$\boldsymbol{n}^*=\boldsymbol{n}_1t_1^*+\cdots+\boldsymbol{n}_2t_{m-n}^*=\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{t}^*\quad \boldsymbol{\Pi}=[\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{n}_{m-n}]$$

为 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的主法方向，若 $\boldsymbol{n}^*$ 方向下的 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的第二基本二次型矩阵

$$\boldsymbol{I\!I}^*=-\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{n}^*}{\partial \boldsymbol{u}}$$

的行列式 $|\boldsymbol{I\!I}^*|$ 是一切 $|\boldsymbol{I\!I}(\boldsymbol{t})|$ 在 $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{t}=1$ 限制下的极大值(最大值)，并且，在 $\boldsymbol{n}^*$ 法方向下，$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面上刚好有 n 条相互正交的法截曲线，且这 n 条法截曲线的(相对)曲率给出了矩阵$\boldsymbol{I\!I}^*\boldsymbol{I}^{-1}$的 n 个特征值. 则 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面的 Gauss 曲率 κ 由下式决定

$$\kappa=|\boldsymbol{I\!I}^*|/|\boldsymbol{I}|$$

■

由这一定义，在 $n=m-1$ 时，只有唯一的法方向 $\boldsymbol{n}$，从而，$\boldsymbol{n}$ 总可以决定 $m-1$ 条正交的曲率线，故它就是主法方向，Gauss 曲率就是这 $m-1$ 条曲率线曲率的乘积.

作为比较可知，在例 2.4.4.5 中，在条件 $h_1=1$，$h_2=0$，(或 $h_1=0$，$h_2=1$) 下，所得到的法方向，不能给出 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面上 2 条相互正交的曲率线，而只能决定 f_1(或 f_2)曲面上的 3 条正交的曲率线，只有 $h_1^2=h_2^2$ 条件下，才能得到$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面上 2 条相互正交的曲率线. 故 $h_1^2=h_2^2$ 条件决定的法方向即为符合以上定义的主法方向.

---

[1] 这个 $\boldsymbol{n}_2$ 单位法方向由例 2.4.4.5 中给出.

利用以上得到的 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面上法空间的单位正交基向量组 $\boldsymbol{n}_i$，就可以对 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面建立 Gauss-Codazzi 方程组和相容性方程组. 这就是法空间单位正交基向量组 $\boldsymbol{n}_i$ 的一个重要意义.

将 Gauss - Codazzi 方程推广到 R^m 空间上的 n 维曲面上去. 对应于(2.4.3.2～3)式，有以下关系，

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \dot{\boldsymbol{r}}_k^{\mathrm{T}} + \sum_{h=1}^{m-n} C_{ij}^{h} \boldsymbol{n}_h^{\mathrm{T}} \quad i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \qquad \text{—(2.4.4.94)}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}_h^{\mathrm{T}}}{\partial u_i} = \sum_{k=1}^{n} D_{ik}^{h} \dot{\boldsymbol{r}}_k^{\mathrm{T}} + \sum_{s=1}^{m-n} b_i^{hs} \boldsymbol{n}_s^{\mathrm{T}} \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ h = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-n \qquad \text{—(2.4.4.95)}$$

这里 $\boldsymbol{n}_h$ 可取为 n 维曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的 $m-n$ 个主法(单位)向量. $\boldsymbol{n}_h$ 是相互**正交**的. 规定以下符号

$$\boldsymbol{I\!I}^h = \left[-\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{n}_h}{\partial \boldsymbol{u}}\right] = \left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_i \partial u_j} \boldsymbol{n}_h\right] = [I\!I_{ij}^h] \qquad \text{—(2.4.4.96)}$$

即 $\boldsymbol{I\!I}^h$ 是主法方向 $\boldsymbol{n}_h$ 决定的第二基本二次型(子)矩阵. 类似(2.4.3.4)式有

$$C_{ij}^h = I\!I_{ij}^h \qquad \text{—(2.4.4.97)}$$

由(2.4.4.95)式

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}_h^{\mathrm{T}}}{\partial u_i} \boldsymbol{n}_p = \begin{cases} b_i^{hh} = 0 & \text{当 } p = h \\ b_i^{hp} & \text{当 } p \neq h \end{cases} \qquad \text{—(2.4.4.98)}$$

规定以

$$B_i = [b_i^{hp}] \quad h,\ p = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-n,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \qquad \text{—(2.4.4.99)}$$

表示 b_i^{hp} 组成的矩阵. 因为

$$\boldsymbol{n}_h^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}_p = 0 \Rightarrow \frac{\partial \boldsymbol{n}_h^{\mathrm{T}}}{\partial u_i} \boldsymbol{n}_p = -\frac{\partial \boldsymbol{n}_p^{\mathrm{T}}}{\partial u_i} \boldsymbol{n}_h \Rightarrow b_i^{hp} = -b_i^{ph} \qquad \text{—(2.4.4.100)}$$

可知 B_i 矩阵的主对角线元素为 0，且是负对称矩阵，其元素 b_i^{hp} 在单位正交基向量组 $\boldsymbol{n}_h$ 是极大值规划决定的主法方向时，是一个(不恒为 0 的)几何不变量(见下文).

再由(2.4.4.95)式

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}_h^{\mathrm{T}}}{\partial u_i} \dot{\boldsymbol{r}}_j = \sum_{k=1}^{n} D_{ik}^{h} \dot{\boldsymbol{r}}_k^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_j \qquad \text{—(2.4.4.101)}$$

并记

$$D^h = [D^h_{ik}] \quad i, k = 1, 2, \cdots, n \qquad —(2.4.4.102)$$

可得到

$$D^h = -\mathbf{II}^h \mathbf{I}^{-1} \quad h = 1, 2, \cdots, m-n \qquad —(2.4.4.103)$$

仍利用 $\boldsymbol{\Gamma}_{ij}$、$\boldsymbol{\Gamma}^{ij}$ 符号，不过现在它们均为 n 维向量，形式上仍有

$$\boldsymbol{\Gamma}_{ij} = \boldsymbol{I}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}^{ij} \qquad —(2.4.3.11)$$

对(2.4.4.94)式两边求$\dfrac{\partial}{\partial u_t}$偏导数，并利用(2.4.4.94～95)式化简整理得，

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_j}{\partial u_t \partial u_i} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial u_t} + \sum_{h=1}^{n}\Gamma^h_{ij}\Gamma^k_{th} + \sum_{p=1}^{m-n}C^p_{ij}D^p_{tk}\right)\dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}_k + \\ + \sum_{s=1}^{m-n}\left(\sum_{h=1}^{n}\Gamma^h_{ij}C^s_{th} + \frac{\partial C^s_{ij}}{\partial u_t} + \sum_{p=1}^{m-n}C^p_{ij}b^{ps}_t\right)\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}_s \qquad —(2.4.4.104)$$

将上式中的下标 t, i 位置互换，得

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_j}{\partial u_i \partial u_t} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \Gamma^k_{tj}}{\partial u_i} + \sum_{h=1}^{n}\Gamma^h_{tj}\Gamma^k_{ih} + \sum_{p=1}^{m-n}C^p_{tj}D^p_{ik}\right)\dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}_k + \\ + \sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{h=1}^{n}\Gamma^h_{tj}C^s_{ih} + \frac{\partial C^s_{tj}}{\partial u_i} + \sum_{p=1}^{m-n}C^p_{tj}b^{ps}_i\right)\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}_s \qquad —(2.4.4.105)$$

将(2.4.4.104)式减去(2.4.4.105)式，由可积性条件及 $\dot{\boldsymbol{r}}_k$、$\boldsymbol{n}_h$ 是线性无关向量组的性质，得

$$\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial u_t} - \frac{\partial \Gamma^k_{tj}}{\partial u_i} + \sum_{h=1}^{n}(\Gamma^h_{ij}\Gamma^k_{th} - \Gamma^h_{tj}\Gamma^k_{ih}) + \sum_{p=1}^{m-n}(C^p_{ij}D^p_{tk} - C^p_{tj}D^p_{ik}) = 0 \qquad —(2.4.4.106)$$

$$\sum_{h=1}^{n}(\Gamma^h_{ij}C^s_{th} - \Gamma^h_{tj}C^s_{ih}) + \frac{\partial C^s_{ij}}{\partial u_t} - \frac{\partial C^s_{tj}}{\partial u_i} + \sum_{p=1}^{m-n}(C^p_{ij}b^{ps}_t - C^p_{tj}b^{ps}_i) = 0 \qquad —(2.4.4.107)$$

$$i, j, t, k = 1, 2, \cdots, n; \; s = 1, 2, \cdots, m-n$$

(2.4.4.106～107)式就是$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}_i}$函数组的可积性条件. 在前一节中，曾指出，在 $n = m-1$ 时，由于 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面只有唯一的单位法向量 $\boldsymbol{n}$，且 $\boldsymbol{n}$ 可以由 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 函数组的多重矢量积算法构造. 所以，只要 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 函数组满足可积性条件，那么，$\dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u_i}$函数一定也就满足可积性条件.

但现在在 $1 < n < m-1$ 时，标架系($\dot{\boldsymbol{r}}_1, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_n$; $\boldsymbol{n}_1, \cdots, \boldsymbol{n}_{m-n}$)中的 $\boldsymbol{n}_i$ 正交

单位法向量可以是$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$正交补空间中任取的一个基向量组，所以，必须还要给出$\frac{\partial \boldsymbol{n}_h}{\partial u_i}$函数组的可积性条件.

利用(2.4.4.95)式

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{n}_h}{\partial u_t \partial u_i} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial D_{ik}^h}{\partial u_t}\dot{\boldsymbol{r}}_k + D_{ik}^h \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\partial u_t}\right) + \sum_{s=1}^{m-n}\left(\frac{\partial b_i^{hs}}{\partial u_t}\boldsymbol{n}_s + b_i^{hs}\frac{\partial \boldsymbol{n}_s}{\partial u_t}\right)$$

将(2.4.4.94～95)式再代入上式并整理，有

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{n}_h}{\partial u_t \partial u_i} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial D_{ik}^h}{\partial u_t} + \sum_{p=1}^{n} D_{ip}^h \Gamma_{tp}^k + \sum_{s=1}^{m-n} b_i^{hs} D_{tk}^s\right)\dot{\boldsymbol{r}}_k + $$

$$+ \sum_{s=1}^{m-n}\left(\frac{\partial b_i^{hs}}{\partial u_t} + \sum_{k=1}^{n} D_{ik}^s C_{tk}^s + \sum_{v=1}^{m-n} b_i^{hv} b_t^{vs}\right)\boldsymbol{n}_s$$

将上式中 t、i 下标位置互换，可得$\frac{\partial^2 \boldsymbol{n}_h}{\partial u_i \partial u_t}$，再令

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{n}_h}{\partial u_t \partial u_i} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{n}_h}{\partial u_i \partial u_t} = 0$$

得

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial D_{ik}^h}{\partial u_t} - \frac{\partial D_{tk}^h}{\partial u_i} + \sum_{p=1}^{n}(D_{ip}^h \Gamma_{tp}^k - D_{tp}^h \Gamma_{ip}^k) + \sum_{s=1}^{m-n}(b_i^{hs} D_{tk}^s - b_t^{hs} D_{ik}^s)\right]\dot{\boldsymbol{r}}_k + $$

$$+ \sum_{s=1}^{m-n}\left[\frac{\partial b_i^{hs}}{\partial u_t} - \frac{\partial b_t^{hs}}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{n}(D_{ik}^s C_{tk}^s - D_{tk}^s C_{ik}^s) + \sum_{v=1}^{m-n}(b_i^{hv} b_t^{vs} - b_t^{hv} b_i^{vs})\right]\boldsymbol{n}_s$$

$$= 0$$

由标架系的线性无关性，即得以下关于$\frac{\partial \boldsymbol{n}_h}{\partial u_i}$函数的可积性条件

$$\frac{\partial D_{ik}^h}{\partial u_t} - \frac{\partial D_{tk}^h}{\partial u_i} + \sum_{p=1}^{n}(D_{ip}^h \Gamma_{tp}^k - D_{tp}^h \Gamma_{ip}^k) + \sum_{s=1}^{m-n}(b_i^{hs} D_{tk}^s - b_t^{hs} D_{ik}^s) = 0$$

—(2.4.4.108)

$$\frac{\partial b_i^{hs}}{\partial u_t} - \frac{\partial b_t^{hs}}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{n}(D_{ik}^s C_{tk}^s - D_{tk}^s C_{ik}^s) + \sum_{v=1}^{m-n}(b_i^{hv} b_t^{vs} - b_t^{hv} b_i^{vs}) = 0$$

—(2.4.4.109)

其中可知(2.4.4.108)式形式的可积性条件其实就是(2.4.4.107)式给出的条件.这只要利用

$$D_{ik}^h = -\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^h g^{jk}$$

其中 g^{jk} 是 I^{-1} 矩阵的元素，对(2.4.4.108)式作展开，再用因子

$$\sum_{v=1}^{n} g_{kv}$$

乘之，其中 g_{kv} 是 I 矩阵的元素，再对 k 下(上)标求和，可得

$$\sum_{k,v,j=1}^{n}\Big[-\frac{\partial C_{ij}^{h}}{\partial u_t}g^{jk}g_{kv}-C_{ij}^{h}\frac{\partial g^{jk}}{\partial u_t}g_{kv}+\frac{\partial C_{tj}^{h}}{\partial u_i}g^{jk}g_{kv}+C_{tj}^{h}\frac{\partial g^{jk}}{\partial u_i}g_{kv}+$$

$$+\sum_{p=1}^{n}(-C_{ij}^{h}\Gamma_{tp}^{k}g_{kv}+C_{tj}^{h}\Gamma_{ip}^{k}g_{kv})g^{jp}+\sum_{s=1}^{m-n}(-b_i^{hs}C_{tj}^{s}+b_t^{hs}C_{ij}^{s})g^{ik}g_{kv}\Big]=0$$

这里 $\sum\limits_{k,v,j=1}^{n}\Leftrightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{v=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}$ 下同.

记以上等号左边的求和式为 M. 现对于任意给定的 v、j 下标，$1\leqslant v$, $j\leqslant n$，对 k 的求和可得到以下结果.

当 $v\neq j$ 时，上式可表成

$$\sum_{k=1}^{n}[\cdot]=C_{ij}^{h}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_{kv}}{\partial u_t}g^{jk}-C_{tj}^{h}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_{kv}}{\partial u_i}g^{jk}+\sum_{p=1}^{n}(-C_{ij}^{h}\Gamma_{tpv}+C_{tj}^{h}\Gamma_{ipv})g^{jp}$$

上式利用了

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g^{jk}}{\partial u_t}g_{kv}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_{kv}}{\partial u_t}g^{jk}\qquad \Gamma_{tpv}=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{tp}^{k}g_{kv}$$

的关系.

将前一式等号右边的 k 下(上)标改写为 p，即有

$$\sum_{k=1}^{n}[\cdot]=\sum_{p=1}^{n}\left(-C_{ij}^{h}\left(\Gamma_{tpv}-\frac{\partial g_{pv}}{\partial u_t}\right)+C_{tj}^{h}\left(\Gamma_{ipv}-\frac{\partial g_{pv}}{\partial u_i}\right)\right)g^{jp}$$

由

$$\Gamma_{tpv}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pv}}{\partial u_t}+\frac{\partial g_{tv}}{\partial u_p}-\frac{\partial g_{tp}}{\partial u_v}\right)$$

即知

$$\Gamma_{tpv}-\frac{\partial g_{pv}}{\partial u_t}=-\Gamma_{tvp}$$

于是得到

$$\sum_{k=1}^{n}[\cdot]=\sum_{p=1}^{n}(C_{ij}^{h}\Gamma_{tvp}g^{jp}-C_{tj}^{h}\Gamma_{ivp}g^{jp})$$

再由

$$\sum_{p=1}^{n}\Gamma_{tvp}g^{jp}=\Gamma_{tvj}$$

得到

$$\sum_{k=1}^{n}[\cdot]=C_{ij}^{h}\Gamma_{tv}^{j}-C_{tj}^{h}\Gamma_{iv}^{j}\qquad(v\neq j\text{ 给定})\quad—(2.4.4.110)$$

当 $v=j$ 时，

$$\sum_{k=1}^{n}[\cdot]=-\frac{\partial C_{iv}^{h}}{\partial u_t}+C_{iv}^{h}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_{kj}}{\partial u_t}g^{jk}+\frac{\partial C_{tv}^{h}}{\partial u_i}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_{kj}}{\partial u_i}g^{jk}+$$

$$+\sum_{p=1}^{n}(-C_{ij}^{h}\Gamma_{tpv}+C_{tj}^{h}\Gamma_{ipv})g^{jp}+\sum_{s=1}^{m-n}(-b_i^{hs}C_{tv}^{s}+b_t^{hs}C_{iv}^{s})$$

将上式右边的 k 下(上)标改写为 p，并注意到 $j=v$，经整理便有

$$\sum_{k=1}^{n}[\cdot]=-\frac{\partial C_{iv}^{h}}{\partial u_t}+\frac{\partial C_{tv}^{h}}{\partial u_i}+\sum_{p=1}^{n}\left(-C_{ij}^{h}\left(\Gamma_{tpj}-\frac{\partial g_{pj}}{\partial u_t}\right)+C_{tj}^{h}\left(\Gamma_{ipj}-\frac{\partial g_{pj}}{\partial u_i}\right)\right)g^{jp}+$$

$$+\sum_{s=1}^{m-n}(-b_i^{hs}C_{tj}^{s}+b_t^{hs}C_{ij}^{s})$$

$$\sum_{k=1}^{n}[\cdot]=-\frac{\partial C_{iv}^{h}}{\partial u_t}+\frac{\partial C_{tv}^{h}}{\partial u_i}+C_{ij}^{h}\Gamma_{tv}^{j}-C_{tj}^{h}\Gamma_{iv}^{h}+\sum_{s=1}^{m-n}(-b_i^{hs}C_{tv}^{s}+b_t^{hs}C_{iv}^{s})\quad(j=v\text{ 给定})$$

$$—(2.4.4.111)$$

对(2.4.4.110～111)式，固定一个 v，再对 j 求和，得

$$M=\sum_{v=1}^{n}\left(-\frac{\partial C_{iv}^{h}}{\partial u_t}+\frac{\partial C_{tv}^{h}}{\partial u_i}+\sum_{j=1}^{m-n}(\Gamma_{tv}^{j}C_{ij}^{h}-\Gamma_{iv}^{j}C_{tj}^{h})+\sum_{s=1}^{m-n}(-b_i^{hs}C_{tv}^{s}+b_t^{hs}C_{iv}^{s})\right)$$
$$=0$$

将 j、v 符号互换，并利用 $b_i^{hs}=-b_i^{sh}$ 的负对称性，即得

$$-M=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial C_{ij}^{h}}{\partial u_t}-\frac{\partial C_{tj}^{h}}{\partial u_i}+\sum_{v=1}^{m-n}(\Gamma_{tj}^{v}C_{iv}^{h}-\Gamma_{ij}^{v}C_{tv}^{h})+\sum_{s=1}^{m-n}(C_{ij}^{s}b_t^{sh}-C_{tj}^{s}b_i^{sh})\right)$$
$$=0$$

显然，当(2.4.4.107)式成立时，上式自然成立. 故(2.4.4.108)式没有给出新的可积性条件.

再考虑(2.4.4.109)式. 其式中间的一项

$$\sum_{k=1}^{n}(D_{ik}^{s}C_{tk}^{s}-D_{tk}^{s}C_{ik}^{s})=-\sum_{k,j=1}^{n}C_{ij}^{s}g^{jk}C_{tk}^{s}+\sum_{k,j=1}^{n}C_{tj}^{s}g^{jk}C_{ik}^{s}$$

将上式右边第二项中的 j，k 上(下)标互换，得

$$\sum_{k=1}^{n}(D_{ik}^{s}C_{tk}^{s}-D_{tk}^{s}C_{ik}^{s})=-\sum_{k,j=1}^{n}C_{ij}^{s}C_{tk}^{s}g^{jk}+\sum_{j,k=1}^{n}C_{tk}^{s}C_{ij}^{s}g^{kj}$$

因为 $g^{jk}=g^{kj}$，所以上式恒为 0. 这样，(2.4.4.109)式可简化为

$$\frac{\partial b_i^{hs}}{\partial u_t}-\frac{\partial b_t^{hs}}{\partial u_i}+\sum_{v=1}^{m-n}(b_i^{hv}b_t^{vs}-b_t^{hv}b_i^{vs})=0\quad\begin{cases}i,\ t=1,\ 2,\ \cdots,\ n\\ h,\ s=1,\ 2,\ \cdots,\ m-n\end{cases}\qquad\text{—(2.4.4.112)}$$

(2.4.4.112)式就是在 $1<n<m-1$ 时新出现的关于$\dfrac{\partial \boldsymbol{n}_h}{\partial u_i}$函数组的可积性条件. 在 $n=m-1$ 时，b_i^{hs} 因子只能是 $b_i^{11}=0$，$i=1,\cdots,n$，故(2.4.4.112)式成为 $0=0$ 恒等式，(2.4.4.106～107)式自然就成为(2.4.3.14～15)式[1]. 而在 $1<n<m-1$ 时，(2.4.4.112)式是有意义的. 它给出了所选取的 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面法空间的单位正交基向量组的各个单位法向量 $\boldsymbol{n}_h$、$\boldsymbol{n}_s$ 之间必须满足的相互关系，从而保证这个单位正交的法空间基向量组能够与所要求的各个 $\boldsymbol{n}_i$ 法向量是二阶可微向量函数这一条件是相容的(见以下分析).

以下将(2.4.4.106、107、112)式这 3 个方程组并称为 R^m 空间上 n 维曲面的**可积性**(或相容性)**条件**，其中(2.4.4.106～107)方程组等价于 Gauss-Codazzi 方程组.

利用 b_i^{hs} 的构造(见(2.4.4.98)式)，可以将(2.4.4.112)式直接用 $\boldsymbol{n}_h$ 因子表示出来. 即有

$$\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{n}_h^{\mathrm T}}{\partial u_t\partial u_i}-\frac{\partial^2\boldsymbol{n}_h^{\mathrm T}}{\partial u_i\partial u_t}\right)\boldsymbol{n}_s+\left(\frac{\partial\boldsymbol{n}_h^{\mathrm T}}{\partial u_i}\frac{\partial\boldsymbol{n}_s}{\partial u_t}-\frac{\partial\boldsymbol{n}_h^{\mathrm T}}{\partial u_t}\frac{\partial\boldsymbol{n}_s}{\partial u_i}\right)+$$
$$+\sum_{v=1}^{m-n}\left(\frac{\partial\boldsymbol{n}_h^{\mathrm T}}{\partial u_i}\boldsymbol{n}_v\boldsymbol{n}_s^{\mathrm T}\frac{\partial\boldsymbol{n}_v}{\partial u_t}-\frac{\partial\boldsymbol{n}_v^{\mathrm T}}{\partial u_i}\boldsymbol{n}_s\boldsymbol{n}_v^{\mathrm T}\frac{\partial\boldsymbol{n}_h}{\partial n_t}\right)=0\qquad\text{—(2.4.4.113)}$$

上式左边的第一项按要求为 0，故利用 $\boldsymbol{n}_h$、$\boldsymbol{n}_s$ 的单位正交性质，可以有

$$\frac{\partial\boldsymbol{n}_h^{\mathrm T}}{\partial u_i}\frac{\partial\boldsymbol{n}_s}{\partial u_t}-\sum_{v=1}^{m-n}\frac{\partial\boldsymbol{n}_h^{\mathrm T}}{\partial u_i}\boldsymbol{n}_v\boldsymbol{n}_v^{\mathrm T}\frac{\partial\boldsymbol{n}_s}{\partial u_t}=\frac{\partial\boldsymbol{n}_s^{\mathrm T}}{\partial u_i}\frac{\partial\boldsymbol{n}_h}{\partial u_t}-\sum_{v=1}^{m-n}\frac{\partial\boldsymbol{n}_s^{\mathrm T}}{\partial u_i}\boldsymbol{n}_v\boldsymbol{n}_v^{\mathrm T}\frac{\partial\boldsymbol{n}_h}{\partial u_t}$$

所以

$$\frac{\partial\boldsymbol{n}_h^{\mathrm T}}{\partial u_i}\left(I_m-\sum_{v=1}^{m-n}\boldsymbol{n}_v\boldsymbol{n}_v^{\mathrm T}\right)\frac{\partial\boldsymbol{n}_s}{\partial u_t}=\frac{\partial\boldsymbol{n}_h}{\partial u_t}\left(I_m-\sum_{v=1}^{m-n}\boldsymbol{n}_v\boldsymbol{n}_v^{\mathrm T}\right)\frac{\partial\boldsymbol{n}_s}{\partial u_i}\qquad\text{—(2.4.4.114)}$$

$$i,\ t=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ h,\ s=1,\ 2,\ \cdots,\ m-n$$

[1] 附带指出，在 $n=1$ 时，可积性条件就不再是二阶混合编导数与求导次序无关这种形式，而是 Frenet 标架系可微性及曲率、各阶挠率系数的可微性条件. 这一条件由曲线参数函数 $\boldsymbol{x}(s)$ 为 m 阶可微予以保证.

(2.4.4.114)式给出了一组关系式，这组关系式表明的是在 $\boldsymbol{n}_h$ 均为二阶可微时，单位正交法向量组 $\boldsymbol{n}_h \quad h=1,\cdots,m-n$ 之间必然要满足的条件. 但应指出，单纯的(2.4.4.114)式并不是与(2.4.4.112)式等价的. 与(2.4.4.112)式等价的关系式应是(2.4.4.113)式及(2.4.4.114)式.

因为若(2.4.4.114)式成立，且(2.4.4.113)式也成立，则

$$\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{n}_h^{\mathrm{T}}}{\partial u_t \partial u_i}-\frac{\partial^2 \boldsymbol{n}_h^{\mathrm{T}}}{\partial u_i \partial u_t}\right)\boldsymbol{n}_s=0$$

即

$$\sum_{s=1}^{m-n}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{n}_h^{\mathrm{T}}}{\partial u_t \partial u_i}-\frac{\partial^2 \boldsymbol{n}_h^{\mathrm{T}}}{\partial u_i \partial u_t}\right)\boldsymbol{n}_s=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \boldsymbol{n}_h}{\partial u_t \partial u_i}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{n}_h}{\partial u_i \partial u_t}$$

即知(2.4.4.112)式必成立.

对于 $h=s$ 时，(2.4.4.114)式成为恒等式(隐含了 $n=m-1$ 时，恒为恒等式). 在 $m-n=2$ 时，(2.4.4.114)式可简化成以下形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}_h^{\mathrm{T}}}{\partial u_i}\frac{\partial \boldsymbol{n}_s}{\partial u_t}=\frac{\partial \boldsymbol{n}_h^{\mathrm{T}}}{\partial u_t}\frac{\partial \boldsymbol{n}_s}{\partial u_i} \qquad \forall\, i,\, t;\, h,\, s \qquad —(2.4.4.115)$$

由前面关于 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$ 的法空间的极(大)值单位正交主法方向

$$\boldsymbol{n}_i^* = \Pi \boldsymbol{t}_i^* \qquad (\boldsymbol{t}_i^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}_i^*=1 \qquad i=1,\cdots,m-n$$

的构造方法，其中 $\Pi=[\boldsymbol{n}_1,\cdots,\boldsymbol{n}_{m-n}]$ 是 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$ 的列向量组经多重矢量积算法得到的任一组单位正交的法向量，则 $\boldsymbol{n}_i^*$ 的二阶可微性质，即等价于 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 是三阶可微的，并且 $\boldsymbol{t}_i^*(\boldsymbol{u})$ 函数是二阶可微的，$i=1,\cdots,(m-n-1)$. $\boldsymbol{t}_i^*(\boldsymbol{u})$ 是极(大)值规划 $N_k \quad k=1,\cdots,m-n-1$ 的解函数.

以下对于 $\boldsymbol{t}_i^*(\boldsymbol{u})$ 的可微性给予一些说明. 要求完全地解决 $\boldsymbol{t}_i^*(\boldsymbol{u})$ 函数的可微性问题仍具有一些困难. 但在简单的情形下，可以确知 $\boldsymbol{t}_i^*(\boldsymbol{u})$ 函数是可微的.

以 N_1 极大值规划为例. 由(2.4.4.24)式，一阶必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{t}}-\lambda \Pi^{\mathrm{T}}\Pi \boldsymbol{t}=\boldsymbol{0} \qquad —(2.4.4.24)$$

现设(2.4.4.25)式成立，

$$|\nabla_t L(\boldsymbol{t},\lambda)|=|\nabla_t^2 F(\boldsymbol{t})-\lambda \Pi^{\mathrm{T}}\Pi| \neq 0 \qquad —(2.4.4.25)$$

则由隐函数定理，在(2.4.4.24)式中可得到 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda)$ 形式的可微函数，且

$$\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial \lambda}=[\nabla_t^2 F(\boldsymbol{t})-\lambda \Pi^{\mathrm{T}}\Pi]^{-1}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi \boldsymbol{t} \qquad —(2.4.4.116)$$

将 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda)$ 代入约束函数，并记

$$f(\boldsymbol{u},\lambda)=\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u},\lambda)\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda)-1=0 \qquad \text{—(2.4.4.117)}$$

于是(并注意到(2.4.4.52～53)式，在 $|\mathbb{I}(\boldsymbol{t})|$ 的极值非 0 时，总有 $\lambda\neq 0$)，

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}=2\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u},\lambda)\Pi^{\mathrm{T}}\Pi[\nabla^2F(\boldsymbol{t})-\lambda\Pi^{\mathrm{T}}\Pi]^{-1}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda) \qquad \text{—(2.4.4.118)}$$

不妨将 Π 矩阵取为列正交的，则上式简化为

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}=2\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u},\lambda)[\nabla_t^2F(\boldsymbol{t})-\lambda I_{m-n}]^{-1}\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda) \qquad \text{—(2.4.4.119)}$$

因为 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda)$ 是 N_1 极大值规划的解，所以，由极大值解的二阶充分条件知在 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda)$ 处，有

$$\begin{cases}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}[\nabla_t^2F(\boldsymbol{t})-\lambda I_{m-n}]\boldsymbol{z}<0\\ \boldsymbol{z}\in\{\boldsymbol{z}\mid\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u},\lambda)\boldsymbol{z}=0\quad \boldsymbol{z}\in R^{m-n}\}\end{cases} \qquad \text{—(2.4.4.120)}$$

由§3 章关于拟特征值的分析，(2.4.4.120)式表示以下 μ 的多项式

$$\begin{vmatrix}\mu I_{m-n}-(\nabla_t^2F(\boldsymbol{t})-\lambda I_{m-n}) & \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda)\\ \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u},\lambda) & 0\end{vmatrix}=0$$

的 $m-n-1$ 个根均为负实数. 由此可知行列式

$$\begin{vmatrix}\nabla_t^2F(\boldsymbol{t})-\lambda I_{m-n} & \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda)\\ \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u},\lambda) & 0\end{vmatrix}\neq 0$$

或者说矩阵

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\nabla_t^2F(\boldsymbol{t})-\lambda I_{m-n} & \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda)\\ \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u},\lambda) & 0\end{bmatrix}=m-n+1 \qquad \text{—(2.4.4.121)}$$

由此再利用系 3.2.1.6 的结论及矩阵 $[\nabla^2F(\boldsymbol{t})-\lambda I_{m-n}]$ 的对称性，即知

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u},\lambda)[\nabla_t^2F(\boldsymbol{t})-\lambda I_{m-n}]^{-1}\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda)\neq 0$$

所以，

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}\neq 0$$

于是从(2.4.4.117)式中由隐函数定理可得到

$$\lambda=\lambda(\boldsymbol{u})$$

形式的函数.

现在

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}=2\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u},\lambda)\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\frac{\partial \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda)}{\partial u_i}+\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u},\lambda)\frac{\partial \Pi^{\mathrm{T}}\Pi}{\partial u_i}\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda) \qquad \text{—(2.4.4.122)}$$

其中由隐函数定理,在(2.4.4.24)式中得到的 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda)$ 函数关于 u_i 可导的. $\Pi(\boldsymbol{u})$ 矩阵的列向量是 $\dot{\boldsymbol{r}}_i(\boldsymbol{u})$ 函数的多重矢量积构造的,即是二阶可微函数经四则运算得到的函数,所以,矩阵 $\Pi^{\mathrm{T}}\Pi(\boldsymbol{u})$ 对于 u_i 一定是可导的. 故 $\frac{\partial f}{\partial u_i}$ 存在,所以

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_i}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial u_i}}{\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}} \qquad \text{—(2.4.4.123)}$$

一定存在. 由此知 $\lambda(\boldsymbol{u})$ 关于 u 是一阶可微的.

记

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda(\boldsymbol{u})) \qquad \text{—(2.4.4.124)}$$

则

$$\frac{\partial \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u})}{\partial u_i}=\frac{\partial \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda)}{\partial u_i}+\frac{\partial \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda)}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u_i} \qquad \text{—(2.4.4.125)}$$

由上已知等号右边的偏导数均存在,故 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u})$ 关于 $\boldsymbol{u}$ 一阶可微.

将(2.4.4.24)式左边的个别方程写出,如下式

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}-\lambda\sum_{j=1}^{m-n}\pi_{ij}t_j=0 \qquad (\Pi^{\mathrm{T}}\Pi=[\pi_{ij}])$$

对上式再求关于 u_k 的偏导数,并将 F 看成为 $F(\boldsymbol{u},\boldsymbol{t})$,以及 t_j 看成为 $t_j(\boldsymbol{u},\lambda)$,

$$\sum_{j=1}^{m-n}\frac{\partial^2 F}{\partial t_j\partial t_i}\frac{\partial t_j}{\partial u_k}+\frac{\partial^2 F}{\partial u_k\partial t_i}-\lambda\sum_{j=1}^{m-n}\pi_{ij}\frac{\partial t_j}{\partial u_k}-\lambda\sum_{j=1}^{m-n}\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial u_k}t_j=0 \quad i=1,\cdots,m-n \qquad \text{—(2.4.4.126)}$$

由以上的分析,上式左边的各导数均存在. 再对上式求关于 u_s 的偏导数,

$$\sum_{p=1}^{m-n}\sum_{j=1}^{m-n}\frac{\partial^3 F}{\partial t_p\partial t_j\partial t_i}\frac{\partial t_p}{\partial u_s}\frac{\partial t_j}{\partial u_k}+\sum_{j=1}^{m-n}\frac{\partial^2 F}{\partial t_j\partial t_i}\frac{\partial^2 t_j}{\partial u_s\partial u_k}+\frac{\partial^3 F}{\partial u_s\partial u_k\partial t_i}-\lambda\sum_{j=1}^{m-n}\pi_{ij}\frac{\partial^2 t_j}{\partial u_s\partial u_k}-$$
$$-\lambda\sum_{j=1}^{m-n}\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial u_s}\frac{\partial t_j}{\partial u_k}-\lambda\sum_{j=1}^{m-n}\frac{\partial^2 \pi_{ij}}{\partial u_s\partial u_k}t_j-\lambda\sum_{j=1}^{m-n}\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial u_k}\frac{\partial t_j}{\partial u_s}=0 \quad i=1,\cdots,m-n$$

对 $i=1,\cdots,m-n$,从上式中可解出 t_j 的二阶混合偏导数

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{t}}{\partial u_s \partial u_k} = [\nabla_t^2 F - \lambda \Pi^{\mathrm{T}} \Pi]^{-1} \left[\lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 \Pi^{\mathrm{T}} \Pi}{\partial u_s \partial u_k} \boldsymbol{t} + \frac{\partial \Pi^{\mathrm{T}} \Pi}{\partial u_s} \frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial u_k} + \frac{\partial \Pi^{\mathrm{T}} \Pi}{\partial u_k} \frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial u_s} \right) - \right.$$

$$\left. - \left\{ \partial^3 \boldsymbol{F} + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}}{\partial u_s} \dfrac{\partial \nabla_t^2 F}{\partial t_1} \dfrac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial u_k} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}}{\partial u_s} \dfrac{\partial \nabla_t^2 F}{\partial t_{m-n}} \dfrac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial u_k} \end{bmatrix} \right\} \right] \quad \text{—(2.4.4.127)}$$

其中

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{t}}{\partial u_s \partial u_k} = \left(\frac{\partial^2 t_1}{\partial u_s \partial u_k}, \cdots, \frac{\partial^2 t_{m-n}}{\partial u_s \partial u_k} \right)^{\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}, \lambda) \text{ 下同}$$

$$\frac{\partial \Pi^{\mathrm{T}} \Pi}{\partial u_s} = \left[\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial u_s} \right] \qquad \frac{\partial^2 \Pi^{\mathrm{T}} \Pi}{\partial u_s \partial u_k} = \left[\frac{\partial^2 \pi_{ij}}{\partial u_s \partial u_k} \right]$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial u_{s,k}} = \left(\frac{\partial t_1}{\partial u_{s,k}}, \cdots, \frac{\partial t_{m-n}}{\partial u_{s,k}} \right)^{\mathrm{T}}$$

$$\partial^3 \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial^3 F}{\partial u_s \partial u_k \partial t_1}, \cdots, \frac{\partial^3 F}{\partial u_s \partial u_k \partial t_{m-n}} \right)^{\mathrm{T}}$$

$$\frac{\partial \nabla_t^2 F}{\partial t_i} = \left[\frac{\partial^3 F}{\partial t_s \partial t_k \partial t_i} \right] \qquad s, k = 1, \cdots, n$$

由于(2.4.4.127)式右边的各项偏导数都是存在的，且

$$[\nabla_t^2 F - \lambda \Pi^{\mathrm{T}} \Pi]^{-1}$$

也存在，所以 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}, \lambda)$关于 $\boldsymbol{u}$ 的二阶(混合)偏导数存在. 类似地，再对(2.4.4.126)式作关于 λ 的偏导数，可知$\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}, \lambda)}{\partial \lambda \partial u_k}$偏导数存在. 因此，(2.4.4.117)式形式的 $f(\boldsymbol{u}, \lambda)$函数关于 $\boldsymbol{u}$ 也是二阶可导的. 再由(2.4.4.119)式，得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = 4\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}, \lambda)[\nabla_t^2 F - \lambda I_{m-n}]^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}, \lambda)}{\partial \lambda} + 2\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}, \lambda)[\nabla_t^2 F - \lambda I_{m-n}]^{-2} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}, \lambda)$$

可知这一二阶偏导数也存在. 这里利用了关于逆矩阵的求导规则

$$\frac{\mathrm{d}A^{-1}(t)}{\mathrm{d}t} = -A^{-1}(t) \frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} A^{-1}(t)$$

再由(2.4.4.123)式，得

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j \partial u_i} = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i} \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} - \dfrac{\partial f}{\partial u_i} \dfrac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \dfrac{\partial \lambda}{\partial u_j}}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial \lambda} \right)^2}$$

则由以上分析已知右边的各一、二阶偏导数均存在，且$\frac{\partial f}{\partial\lambda}$非 0，所以 $\lambda(\boldsymbol{u})$ 函数关于 $\boldsymbol{u}$ 二阶可导.

于是由(2.4.4.125)式，得

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u})}{\partial u_j \partial u_i} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda)}{\partial u_j \partial u_i} + \frac{\partial_t^2(\boldsymbol{u},\lambda)}{\partial\lambda\partial u_i}\frac{\partial\lambda}{\partial u_j} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda)}{\partial u_j \partial\lambda} + \\ + \frac{\partial^2 \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda)}{\partial\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\frac{\partial\lambda}{\partial u_i} + \frac{\partial \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda)}{\partial\lambda}\frac{\partial^2\lambda}{\partial u_j\partial u_i}$$

上式等号右边的各偏导数中，只需注意到再可从(2.4.4.116)式中得到

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u},\lambda)}{\partial\lambda^2} = [\nabla_t^2 F - \lambda\Pi^{\mathrm{T}}\Pi]^{-2}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t} + [\nabla_t^2 F - \lambda\Pi^{\mathrm{T}}\Pi]^{-1}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial\lambda}$$

即知它们均存在. 所以，(2.4.4.124)式给出的 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u})$ 函数关于 $\boldsymbol{u}$ 是二阶可导的.

这样，由于极值主法方向 $\boldsymbol{n}_1 = \Pi\boldsymbol{t}_1(\boldsymbol{u})$ 给出，故 $\boldsymbol{n}_1$ 关于 $\boldsymbol{u}$ 一定也是二阶可导的. 因此，在 N_1 极值规划的 Lagrange 函数关于 $\boldsymbol{t}$ 的 Hessian 矩阵可逆时，由这一规划决定的主法方向 $\boldsymbol{n}_1(\boldsymbol{u})$一定是二阶可微的. 以上的分析容易推广到 N_K 极值规划.

由以上分析可知，当在 N_1 规划中，极大值解决定的 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u})$可表为 λ 乘子的函数，取决于 Lagrange 函数的 Hessian 矩阵行列式非 0 的条件. 而这一条件等价于 $F(\boldsymbol{t})$目标函数的极大值是严格局部极大值，即 $F(\boldsymbol{t})$函数在极大值点邻域是严格凸的，即(2.4.4.121)式必要成立. 反过来说，在 N_1 规划中，如果极大值解决定的 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u})$，同时(2.4.4.121)式成立，由上即知 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u})$关于 $\boldsymbol{u}$ 二阶可导. 归纳起来可得以下推论.

推论 2.4.4.8 设 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ $\boldsymbol{u}\in D_{\boldsymbol{u}}\subset R^n$ $\boldsymbol{r}\in R^m$ 是 n 维正则参数曲面片. $\boldsymbol{n}_i^*$ $i=1,\cdots,k$ 是已经确定的$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面的极值主法方向. 设 $\boldsymbol{n}_i^*$ 关于 $\boldsymbol{u}$ 二阶可导. 并设 $\Pi=[\boldsymbol{n}_1,\cdots,\boldsymbol{n}_{m-n}]$ 是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$法空间的任取的一个(二阶可导)基向量组. 若对于以下极值规划

$$N_{k+1}:\begin{cases}\text{极大值 } |\mathit{II}(\boldsymbol{t})| = F(\boldsymbol{t}) \\ \text{s.t.}\quad \begin{cases}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t} = 1 \\ (\boldsymbol{n}_i^*)^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t} = 0 \quad i=1,\cdots,k \quad (k<m-n)\end{cases}\end{cases}$$

决定的解 $\boldsymbol{t}_{k+1}^*$ 是严格极大值解，则 Lagrange 函数的多重加边 Hessian 矩阵行列式

$$\begin{vmatrix} \nabla_t^2 F(\boldsymbol{t}^*) - \lambda\Pi^{\mathrm{T}}\Pi + \sum\zeta_i\boldsymbol{n}_i^* & \Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t}_1^* \cdots \Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t}_{k+1}^* \\ (\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t}_1^*)^{\mathrm{T}} & \\ \vdots & 0 \\ (\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t}_{k+1}^*)^{\mathrm{T}} & \end{vmatrix} \neq 0$$

$$n_i^* = \Pi t_i^*$$

从而 t^* 关于 u 二阶可导,并且 n_{k+1}^* 关于 u 也是二阶可导的. ■

这里附带说明,因为 λ 是形如 $\lambda = \lambda(u)$ 的函数,故在

$$t^{\mathrm{T}}(u, \lambda)t(u, \lambda) = 1$$

的条件下,在形式上将 u, λ 看成是不同的变量,所以,才能有(2.4.4.118)式决定的 $\frac{\partial f}{\partial \lambda} \neq 0$ 以及(2.4.4.122)式决定的 $\frac{\partial f}{\partial u_i} \neq 0$ 的情形. 而如利用(2.4.4.124)式,则在

$$t^{\mathrm{T}}(u)t(u) = 1$$

条件下,才总有

$$t^{\mathrm{T}}(u)\frac{\partial t(u)}{\partial u_i} = 0$$

成立.

类似地,在(2.4.4.25)式不成立,但(2.4.4.28)式成立时,也可以确知相应的 N_k 规划决定的主法方向 n_k 是二阶可导的. 这两种情形可以并称为,在 N_k 规划决定的极大值解 t_k^* 是局部严格极大值点时,n_k 是二阶可导的. 这种情形接近于矩阵的单根特征值一定具有可微性. 类似于矩阵重根特征值的情形,当 N_k 极值规划的极大值解 t_k^* 是局部弱极大值解时,目标函数 $F(t)$在 $t = t_k^*$ 的邻域不再是严格凹的. 这时,乘子 λ_k 可以对应于不只一个极值解 t_k^*. 在这一情形下,由 Lagrange 函数关于 t 的 Hessian 矩阵的秩$<m-n-1$,就不能利用 $[\nabla_t^2 F - \lambda I_{m-n}]$ 矩阵的可逆性质来导出 $t_k(u)$函数的可微性质. 这是有待解决的问题.

但有一点是很显然的,因为 $F(t) = |\mathbb{I}(t)|$ 是 t_i 的 n 次齐次 $m-n$ 元多项式,所以,在 N_1 极值规划的一阶必要条件中,总可以表成以下形式的方程组

$$[\nabla_t^2 \widetilde{F}(t) - \lambda \Pi^{\mathrm{T}}\Pi]t = \mathbf{0}$$

其中

$$\nabla_t^2 \widetilde{F}(t) \cdot t = \nabla_t^2 F(t)$$

$\nabla_t^2 F(t)$是 $F(t)$关于 t 的 Hessian 矩阵. 由此即可见,满足极大值条件的 t,必是 $[\nabla_t^2 \widetilde{F}(t) - \lambda \Pi^{\mathrm{T}}\Pi]$ 矩阵的特征向量. 由于这一矩阵是对称的,故即便 t 是该矩阵的多重特征根对应的特征向量,t 具有渐近可微性质是确定的(见§3 章关于特征值、特征向量可微性的内容及§6.6 节附录三).

由 Riemann 符号的构造,仍规定

$$R_{itj}^{k} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{k}}{\partial u_t} - \frac{\partial \Gamma_{tj}^{k}}{\partial u_i} + \sum_{h=1}^{n} (\Gamma_{ij}^{h}\Gamma_{th}^{k} - \Gamma_{tj}^{h}\Gamma_{ih}^{k})$$

这还是(2.4.3.16)式.则(2.4.4.106～107)式可表示成

$$R_{itj}^{k} = -\sum_{p=1}^{m-n} (C_{ij}^{p}D_{tk}^{p} - C_{tj}^{p}D_{ik}^{p}) \quad i, j, t, k = 1, 2, \cdots, n \qquad \text{—(2.4.4.128)}$$

$$\frac{\partial C_{tj}^{s}}{\partial u_i} - \frac{\partial C_{ij}^{s}}{\partial u_t} = \sum_{h=1}^{n} (\Gamma_{ij}^{h}C_{th}^{s} - \Gamma_{tj}^{h}C_{ih}^{s}) + \sum_{p=1}^{m-n} (C_{ij}^{p}b_t^{ps} - C_{tj}^{p}b_i^{ps})$$

$$s = 1, 2, \cdots, m-n;\ t, i, j = 1, 2, \cdots, n \qquad \text{—(2.4.4.129)}$$

(2.4.4.128～129)式与(2.4.3.17～18)式有些区别.原因是在 $n < m-1$ 时,n 维曲面具有 $m-n$ 个主法方向,而在 $n = m-1$ 时,$m-1$ 维曲面仅有一个(主)法方向.当 $n = m-1$ 时,显然,(2.4.4.128～129)式就转化成(2.4.3.17～18)式.

仍使用 $\boldsymbol{R}_{itj}$、R_{itjk} 符号,只是 $\boldsymbol{R}_{itj}$ 现在也是 n 维向量.类似(2.4.3.22～23)式,可得

$$\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{R}_{itj} = \begin{bmatrix} R_{itj1} \\ R_{itj2} \\ \vdots \\ R_{itjn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^{m-n} (C_{ij}^{p}C_{t1}^{p} - C_{tj}^{p}C_{i1}^{p}) \\ \sum_{p=1}^{m-n} (C_{ij}^{p}C_{t2}^{p} - C_{tj}^{p}C_{i2}^{p}) \\ \vdots \\ \sum_{p=1}^{m-n} (C_{ij}^{p}C_{tn}^{p} - C_{tj}^{p}C_{in}^{p}) \end{bmatrix} \qquad \text{—(2.4.4.130)}$$

当 $n = m-1$,(2.4.4.130)式就是(2.4.3.23)式.同理,有

$$R_{itjk} = \sum_{p=1}^{m-n} (C_{ij}^{p}C_{tk}^{p} - C_{tj}^{p}C_{ik}^{p}) \qquad \text{—(2.4.4.131)}$$

并可知

$$\begin{cases} R_{itjk} = \sum_{p=1}^{m-n} \left| \mathit{II}_p \begin{Bmatrix} i, & t \\ j, & k \end{Bmatrix} \right| \\ R_{itj}^{k} = -\sum_{p=1}^{m-n} \begin{vmatrix} C_{ij}^{p} & D_{ik}^{p} \\ C_{tj}^{p} & D_{tk}^{p} \end{vmatrix} \end{cases} \quad i, t, j, k = 1, 2, \cdots, n \qquad \text{—(2.4.4.132)}$$

(2.4.4.132)式即为(2.4.3.25～26)式的推广.但在形式上已出现了重要的差异.可知(2.4.3.27～31)式在 $1 \leqslant n \leqslant m-1$ 时仍是成立的.

很容易理解，当 $n=m-1$ 时，(2.4.4.94～95)式就成为(2.4.3.2～3)式. 当 $n=1$ 时，(2.4.4.94)式是 $i=j=1$，$n=1$，可表示成

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}}{\partial u}=\Gamma_{11}^{1}\dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}+\sum_{h=1}^{m-1}C_{11}^{h}\boldsymbol{n}_{h}^{\mathrm{T}}$$

且

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}}{\partial u}=\nabla^2\boldsymbol{r}\quad \dot{\boldsymbol{r}}=\nabla\boldsymbol{r}\quad \nabla\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\cdot\nabla^2\boldsymbol{r}=0\quad(\text{设 } u \text{ 是弧长参数})$$

及

$$\nabla\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_h=0\quad h=1,2,\cdots,m-1$$

可知

$$\Gamma_{11}^{1}=0$$

若令

$$\boldsymbol{n}_1=\frac{\nabla^2\boldsymbol{r}}{\|\nabla^2\boldsymbol{r}\|}\qquad \boldsymbol{n}_2=\frac{\nabla\boldsymbol{y}_1}{\|\nabla\boldsymbol{y}_1\|}\quad\cdots$$

(将 $\boldsymbol{r}$ 理解为 $\boldsymbol{x}$，而 $\boldsymbol{y}_i$、$\nabla\boldsymbol{y}_i\cdots$由(2.3.1.20)式及相关公式决定). 则

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{n}_1=\|\nabla^2\boldsymbol{r}\|=C_{11}^{1}=\kappa_x\qquad C_{11}^{h}=0\quad h=2,3,\cdots,m-1$$

κ_x 是曲线的曲率，故(2.4.4.94)式是

$$\frac{\mathrm{d}\nabla\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}u}=\kappa_x\boldsymbol{n}_1 \qquad —(2.3.1.21)$$

并且易理解，对(2.4.4.95)式，令 $h=1$，则等价于(2.3.1.21)式，令 $h=2$，则等价于(2.3.1.22)式……，故可知，当 $n=1$，(2.4.4.94～95)式即成为(2.3.1.21～24)式，即 R^m 空间上 1 维曲线 $\boldsymbol{r}(u)$的自然标架方程组. 由此可知(2.4.4.99)式的矩阵 B_i 的元素 b_i^{hp} 具有挠率的意义.

如果对 R^m 空间上的 n 维曲面的 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$，…，$\boldsymbol{n}_{m-n}$主法方向，作

$$\begin{cases}\kappa^h=\dfrac{|\,\mathbb{I}^h\,|}{|\,\boldsymbol{I}\,|}\\[2ex] h^s=\dfrac{tr(\mathbb{I}^s\cdot\boldsymbol{I}^{-1})}{n}\end{cases}\qquad —(2.4.4.133)$$

则 κ^h，h^s 分别是在取 $\boldsymbol{n}_h$（或 $\boldsymbol{n}_s$）主法方向时 n 维曲面的 Gauss 总曲率与平均曲率.

对任取的平均值函数 $\bar{f}(\cdot)$ [1]，可规定

$$\begin{cases}\kappa = \bar{f}(\kappa^1, \kappa^2, \cdots, \kappa^{m-n}) \\ h = \bar{f}(h^1, h^2, \cdots, h^{m-n})\end{cases} \qquad —(2.4.4.134)$$

分别为 n 维曲面的 Gauss 总曲率与平均曲率.

那么，由(2.4.4.32)式，现在利用 R_{itjk} 符号和曲率的定义，能否找到某个函数 $\bar{F}(\cdot)$ 及 $\bar{f}(\cdot)$，使

$$\bar{F}(R_{itjk}) = \bar{f}(\kappa^h)$$

成立？即对于 R^m 维空间中的 n 维曲面而言，Gauss 关于曲面总曲率(在一定条件下)完全由第一基本形式决定的结论是否仍能成立？对此，需要进一步说明.

注意，由(2.4.4.7)式关于 Gauss 曲率的构造，以及(2.4.4.131)式给出的 Riemann 符号 R_{itjk} 的意义规定，相对于 R^m 空间上的 n 维曲面而言，在 $n < m-1$ 时，R_{itjk} 与 Gauss 曲率 κ 之间，就不能有一般的相关性. 这是与 $n = m-1$ 时有区别的重要现象.

由(2.4.4.7)式 Gauss 曲率 κ 仍可由矩阵

$$\left[\sum_{h=1}^{m-n} \mathbb{I}^h t_h\right] \qquad (\text{取 } \| \Pi t \| = 1)$$

的二阶子式行列式组成的伴随矩阵(行列式)予以表出. 但现在以上矩阵的二阶子式行列式是

$$\left|\begin{Bmatrix} i, t \\ j, k \end{Bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} \sum_{h=1}^{m-n} C_{ij}^h t_h & \sum_{h=1}^{m-n} C_{ik}^h t_h \\ \sum_{h=1}^{m-n} C_{tj}^h t_h & \sum_{h=1}^{m-n} C_{tk}^h t_h \end{vmatrix} = \sum_{h,p=1}^{m-n} (C_{ij}^h C_{tk}^p - C_{ik}^h C_{tj}^p) t_h t_p$$

而由(2.4.4.131)式，

$$R_{itjk} = \sum_{h=1}^{m-n} (C_{ij}^h C_{tk}^h - C_{ik}^h C_{tj}^h)$$

显然，R_{itjk} 一般地不等同于 $\left|\begin{Bmatrix} i, t \\ j, k \end{Bmatrix}\right|$. 特别地，$R_{itjk}$ 与 t_h 的取法无关，而

---

[1] $\bar{f}(\cdot)$ 是平均值函数是指，对 $x \in R^m$

(a) $\bar{f}(x)$ 是 x 的线性齐次函数.

(b) $\bar{f}(x)$ 是单调的，即当 $x^1 \geqslant x^2$ $\quad \bar{f}(x^1) \geqslant \bar{f}(x^2)$。

(c) $\min\limits_j x_j \leqslant \bar{f}(x) \leqslant \max\limits_j x_j$.

$\left|\begin{Bmatrix} i, t \\ j, k \end{Bmatrix}\right|$ 却与 t_h 的取法有关. 而在 $n = m-1$ 时，显然 R_{itjk} 恒等于 $\left|\begin{Bmatrix} i, t \\ j, k \end{Bmatrix}\right|$.

注意，上文中已指出 R^m 空间上的 n 维正则曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 中存在有一类法向迷向的曲面. 在这一类曲面上，行列式

$$|\mathit{II}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})| \equiv |\mathit{II}(\boldsymbol{u})| \qquad (\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t} = 1)$$

即第二基本二次型矩阵的行列式与 $\boldsymbol{t}$ 如何选取是无关的. 所以，在这类法向迷向的 n 维曲面上，$\mathit{II}(\boldsymbol{u})$ 矩阵的二阶子式 $\left|\begin{Bmatrix} i, t \\ j, k \end{Bmatrix}\right|$ 也就与 $\boldsymbol{t}$ 的选取无关，这时，Riemann 符号 R_{itjk} 就**可能**恒等于 $\left|\begin{Bmatrix} i, t \\ j, k \end{Bmatrix}\right|$. 例如 $\left|\begin{Bmatrix} i, t \\ j, k \end{Bmatrix}\right| \equiv 0$，且 $C_{ij}^h C_{tk}^h - C_{ik}^h C_{tj}^h \equiv 0 \quad h = 1, \cdots, m-n$. 这即是说，在 R^m 空间的 n 维曲面上，若该曲面是法向迷向的，则该曲面的 Gauss 曲率(不变量)才可能由 R_{itjk} 符号以第二基本二次型矩阵的 2 阶伴随矩阵行列式的形式构造出来. 除此而外，对于 $n < m-1$，n 维曲面的 Gauss 曲率不能利用 R_{itjk} 符号构造出来.

在一般情况下，当 $n < m-1$ 时，由(2.4.4.131)式，R_{itjk} 与 $\boldsymbol{t}$ 的取法无关，所以，R_{itjk} 表示了一个只取决于第一基本不变量(及其偏导数)构造出来的不变量. 这个不变量的意义是指，其等式右边的二阶行列(子)式之和与构造 II^p $p = 1, \cdots, m-n$ 矩阵时所选取的 n 维曲面上的 $m-n$ 维法空间的单位正交基向量组

$$\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \cdots, \boldsymbol{n}_{m-n}$$

的取法无关. 这个性质说明，若 $\boldsymbol{n}_h$、$\boldsymbol{n}_p$ 是 n 维曲面法空间的 2 组不同的单位正交基向量组. 它们分别决定了 II^h、II^p 矩阵. 那么，

$$\sum_{p=1}^{m-n}\left|\Pi^p\begin{Bmatrix} i, t \\ j, k \end{Bmatrix}\right| \equiv \sum_{h=1}^{m-n}\left|\Pi^h\begin{Bmatrix} i, t \\ j, k \end{Bmatrix}\right| \qquad \forall\, i, j, t, k$$

—(2.4.4.134a)

如在例 2.4.4.5 中，由于 I 为单位阵，故已知 $R_{1212} \equiv 0$. 另方面按(a)式，在 $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t} = 1$ 时，

$$|\widetilde{\mathit{II}}^1| = |\widetilde{\mathit{II}}^2| = 0 \Rightarrow R_{1212} = |\widetilde{\mathit{II}}^1| + |\widetilde{\mathit{II}}^2| = 0$$

而若按(b)式，则又有

$$|\mathit{II}^1| = \frac{1}{2},\ |\mathit{II}^2| = -\frac{1}{2} \Rightarrow R_{1212} = |\mathit{II}^1| + |\mathit{II}^2| = 0$$

故 R_{1212} 与法方向基向量组的取法无关.

但正因为如此，R_{itjk} 符号也就不能表出定义 2.4.4.2 给出的 n 维曲面的 Gauss 曲率. 要利用 R_{itjk} 的不变性质来表出 n 维曲面的 Gauss 曲率，就只能回到上文提出的问题，即要求对(2.4.4.134)式给予新的定义，并确定存在平均值函数 $\overline{F}(\cdot)$，使

$$\kappa = \overline{f}(\kappa^1, \kappa^2, \cdots, \kappa^{m-n}) = \overline{f}(|\boldsymbol{I\!I}^1|, |\boldsymbol{I\!I}^2|, \cdots, |\boldsymbol{I\!I}^{m-n}|)$$
$$= \overline{F}(R_{itjk}, \forall i, j, t, k)$$

由以上的分析，即可理解，为什么在例 2.4.4.5 中可以出现 $R_{1212} \equiv 0$，但这一 2 维曲面的 Gauss 曲率却恒不为 0 的现象. 这个事实即表明了(在定义 2.4.4.2条件下)，“内蕴几何分析”方法在应用到 R^m 空间上的 n 维曲面的 Gauss 曲率时可能是无效的. 这里情形就是上一节中一再强调的，要利用 R_{itjk} 符号去构造出 Gauss 曲率，隐含的条件就是(2.4.3.25～26)式一定要成立. 但现在在 R^m 空间的 n 维曲面 ($n < m-1$) 上，(2.4.3.25～26)式在形式上已发生了变化，变成为(2.4.4.132)式了. 因此(2.4.3.25～26)式不再成立.

以上给出的 R^m 空间上的多重矢量积方法，是对向量组 $\boldsymbol{z}_i \in R^m$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 张成的线性子空间构造出其正交补空间的基向量组的方法. 要构造 $\boldsymbol{z}_i$ 的正交补空间的基向量组，除了多重矢量积方法，显然还可以利用逆矩阵方法，即直接求解以下方程组

$$\boldsymbol{z}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad —(2.4.4.135)$$

的方法.

设 Π 为(2.4.4.135)式的任一基础解系矩阵，则 $\boldsymbol{z}_i$ 正交补空间中的任一向量 $\boldsymbol{\xi}$，总可表成

$$\boldsymbol{\xi} = \Pi\boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-k}$$

其中 $k = \mathrm{rank}(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_n)$ 即 $\boldsymbol{z}_i$ 向量组的秩. 所以，Π 的列向量组就是 $\boldsymbol{z}_i$ 正交补空间的一组基向量.

与多重矢量积方法相比较，以 $n = m-1$、且 $\boldsymbol{z}_i$ 线性无关为例，可知，多重矢量积方法中只利用了矩阵

$$Z^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{m-1}, \boldsymbol{b}]^{\mathrm{T}}$$

的伴随矩阵的第 m 列向量来当作 $\boldsymbol{z}_i$ 的法向量，不涉及行列式倒数运算，而逆矩阵方法则总要涉及行列式倒数运算. 这个区别导致这两种方法在确定非 0 法向量(或有定义的法向量)的定义域上，多重矢量积的条件更为宽松一些.

由以上符号，$\boldsymbol{N} = (Z_{1m}, Z_{2m}, \cdots, Z_{mm})^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{z}_i$ 的多重矢量积决定的法向量，Z_{im} 是 Z^{T} 矩阵的伴随矩阵第 i 行第 m 列元素的代数余子式，则 $\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N} \neq 0$ 的条件即为

$$Z_{1m}^2 + Z_{2m}^2 + \cdots + Z_{mm}^2 > 0$$

或者说是矩阵 $[z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}]$ 的全部 $m-1$ 阶子行列式的平方和非 0. 而逆矩阵方法则应要求法向量 $\boldsymbol{N}$ 的定义域限制在某一个选定的 $Z_{im} \neq 0$(可取为 $Z_{im} > 0$ 或 $Z_{im} < 0$) 的区域内. 显然,逆矩阵方法得到的法向量 $\boldsymbol{N}$ 的定义域是多重矢量积方法得到的非 0 法向量定义域的(真)子集[1].

由此可以想见,对于给定的一个正则曲面,利用多重矢量积方法可以确定最少数量的一组正则参数曲面片覆盖这个正则曲面. 在这一点上,多重矢量积方法比逆矩阵方法更具效率. 但在一些数学推导中,逆矩阵方法确有不可替代的优势.

对于 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$形式的参数曲面函数,设

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} X_1(\boldsymbol{u}) \\ X_2(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \\ X_m(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u} \in D_u \subset R^{m-1}$$

并设 Jacobi 行列式

$$G_x(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial(X_1, X_2, \cdots, X_{m-1})}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})} \neq 0$$

则可从

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$$

中得到法向量 $\boldsymbol{N}_u$,

$$\boldsymbol{N}_u = \Pi = \begin{bmatrix} -(G_x^{-1}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}} \nabla_u X_m \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \nabla_u X_m = \left(\frac{\partial X_m}{\partial u_1}, \frac{\partial X_m}{\partial u_2}, \cdots, \frac{\partial X_m}{\partial u_{m-1}}\right)^{\mathrm{T}}$$

—(2.4.4.136)

Π 是基础解系矩阵,同时即是法向量 $\boldsymbol{N}_u$. 单位法向量应为

$$\boldsymbol{n}_u = \frac{\boldsymbol{N}_u}{(1 + \nabla_u X_m^{\mathrm{T}} G_x^{-1}(\boldsymbol{u})(G_x^{-1}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}} \nabla_u X_m)^{\frac{1}{2}}} \quad —(2.4.4.137)$$

以上利用 G_x^{-1} 逆矩阵构造单位法向量 $\boldsymbol{n}_u$ 的方法可以很容易地扩展到 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) \in R^m$, $\boldsymbol{u} \in D_u \subset R^n$ 的一般情形上去.

例 2.4.4.6 考虑 R^4 空间上的 2 维曲面

---

[1] 在 Z_{im} 的平方和大于 0 时,隐含了 $Z_{im}(\boldsymbol{u})=0$ 时必有 $Z_{jm}(\boldsymbol{u})\neq 0$,故法向量 $\boldsymbol{N}$ 按各个 $Z_{im}\neq 0$ 决定的定义域集合的并集一定是连通开集.

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = a^2 - b^2 \\ x_1 x_2 + x_3 x_4 = ab \end{cases} \qquad a、b\text{ 为常数} \qquad —(a)$$

其中设 $a^2 - b^2$、ab 不同时为 0. 求这一曲面的主法方向.

现将以上方程组决定的曲面，形式上看成是

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) = \begin{cases} x_1 = x_1(u_1, u_2) \\ x_2 = x_2(u_1, u_2) \\ x_3 = u_1 \\ x_4 = u_2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}} \in D_u \subset R^2 \qquad —(b)$$

并用逆矩阵方法给出其单位法向量. 设 G 是(a)式的 Jacobi 矩阵，

$$G = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 & 2x_3 & -2x_4 \\ x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \end{bmatrix}$$

并记

$$G_{2\times2} = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \qquad G_{2\times2}^{-1} = \frac{1}{2(x_1^2 + x_2^2)} \begin{bmatrix} x_1 & 2x_2 \\ -x_2 & 2x_1 \end{bmatrix}$$

则由隐函数定理知，在局部，(a)转换成(b)式的条件是

$$|G_{2\times2}| = 2(x_1^2 + x_2^2) \neq 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 > 0$$

故

$$D_u = \{\boldsymbol{u} \mid x_1^2(\boldsymbol{u}) + x_2^2(\boldsymbol{u}) > 0 \quad \boldsymbol{u} \in R^2\}$$

对 $\boldsymbol{u} \in D_u$，由隐函数定理，并记

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} = -G_{2\times2}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2u_1 & -2u_2 \\ u_2 & u_1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{bmatrix} x_1 u_1 + x_2 u_2 & -x_1 u_2 + x_2 u_1 \\ x_1 u_2 - x_2 u_1 & x_1 u_1 + x_2 u_2 \end{bmatrix}$$

所以，从(b)式中可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{u}} \\ 1 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \end{bmatrix}$$

第一基本二次型矩阵为

$$\boldsymbol{I} = |\boldsymbol{I}|^{\frac{1}{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{I}| = (1 + (x_1^2 + x_2^2)^{-2}((x_1 u_1 + x_2 u_2)^2 + (x_1 u_2 - x_2 u_1)^2))^2 > 0$$

直接解方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$$

得到基础解系矩阵 Π 及法向量 $\boldsymbol{N}$

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\dfrac{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{N} = \Pi \boldsymbol{h} \qquad \boldsymbol{h} \in R^2 \qquad \boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}$$

注意在本例中有 $\dfrac{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{u}} = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{u}} \dfrac{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}$，故 $\Pi^{\mathrm{T}} \Pi = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{I}$，从而可得

$$\boldsymbol{n}_u = |\boldsymbol{I}|^{-\frac{1}{4}} \cdot \Pi \boldsymbol{t} \qquad \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{t} = 1 \qquad \left(\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{h}}{(\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h})^{\frac{1}{2}}} \right)$$

由于对(a)两边求 $\dfrac{\partial}{\partial u_1}$、$\dfrac{\partial^2}{\partial u_1^2}$ 偏导数，是

$$\frac{\partial}{\partial u_1}: \begin{cases} 2x_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} - 2x_2 \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} + 2u_1 = 0 \\ x_2 \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} + x_1 \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} + u_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1^2}: \begin{cases} 2\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}\right)^2 + 2x_1 \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial u_1^2} - 2\left(\dfrac{\partial x_2}{\partial u_1}\right)^2 - 2x_2 \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial u_1^2} + 2 = 0 \\ 2 \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} + x_2 \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial u_1^2} + x_1 \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial u_1^2} = 0 \end{cases}$$

从而可解出

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial u_1^2} \\ \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial u_1^2} \end{bmatrix} = - G_{2\times 2}^{-1} \begin{bmatrix} 2\left(1 + \left(\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial x_2}{\partial u_1}\right)^2\right) \\ 2 \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} \end{bmatrix}$$

由于$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{u}}$已解出，故$\frac{\partial^2 x_{1,2}}{\partial u_1^2}$偏导数由上式已可确定. 同理，可得

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_2^2} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial u_2^2} \end{bmatrix} = -G_{2\times 2}^{-1} \begin{bmatrix} -2\left(1-\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_2}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial u_2}\right)^2\right) \\ 2\frac{\partial x_1}{\partial u_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1 \partial u_2} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial u_1 \partial u_2} \end{bmatrix} = -G_{2\times 2}^{-1} \begin{bmatrix} 2\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_2}-\frac{\partial x_2}{\partial u_1}\frac{\partial x_2}{\partial u_2}\right) \\ 1+\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\frac{\partial x_2}{\partial u_2}+\frac{\partial x_1}{\partial u_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_1} \end{bmatrix}$$

所以

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_1 \partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1 \partial u_2} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial u_1 \partial u_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_2 \partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_2^2} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial u_2^2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最终得到第二基本二次型矩阵

$$\boldsymbol{II} = |\boldsymbol{I}|^{-\frac{1}{4}} \cdot (\nabla^2 x_1 \cdot t_1 + \nabla^2 x_2 \cdot t_2)$$

按照主法方向的定义，应再解以下极值规划

$$\begin{cases} \text{极值} & |\nabla^2 x_1 \cdot t_1 + \nabla^2 x_2 \cdot t_2| \\ \text{s. t.} & t_1^2 + t_2^2 = 1 \end{cases}$$

但可以验证，在本例中以上规划的目标行列式的值与 t_1、t_2 参数无关.
即可以有

$$|\nabla^2 x_1 \cdot t_1 + \nabla^2 x_2 \cdot t_2| = F\left(\frac{\partial^2 x_{1,2}}{\partial u_i \partial u_j}\right) \cdot (t_1^2 + t_2^2) = F\left(\frac{\partial^2 x_{1,2}}{\partial u_i \partial u_j}\right)$$

这里 $F(\cdot)$表示是仅由 x_1、x_2 关于 u_1、u_2 的 2 阶偏导数的四则运算组成的函数. 对此不再作详细推导，仅给予以下数字实例予以说明. 设 $a=2$，$b=1$，并取

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad x_4 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

为本例曲面上的 $\boldsymbol{x}^0$ 点. 由以上关系可得，在这一点处

$$\nabla^2 x_1 = \begin{bmatrix} -.25 & -1.75 \\ -1.75 & .25 \end{bmatrix} \quad \nabla^2 x_2 = \begin{bmatrix} 1.75 & -.25 \\ -.25 & -1.75 \end{bmatrix}$$

$$| \nabla^2 x_1 \cdot t_1 + \nabla^2 x_2 \cdot t_2 | = \begin{bmatrix} -.25t_1 + 1.75t_2 & -1.75t_1 - .25t_2 \\ -1.75t_1 - .25t_2 & .25t_1 - 1.75t_2 \end{bmatrix}$$

$$= -3.125(t_1^2 + t_2^2)$$

因为已设定 $t_1^2 + t_2^2 = 1$，故在这一点处

$$| \boldsymbol{I\!I} | = -3.125 \, | \boldsymbol{I} |^{-\frac{1}{2}}$$

与 t_1、t_2 无关.

这就是说，本例给出的曲面是代表了 R^m 空间中的 n 维曲面

$$1 < n < m - 1$$

可以具有一种特殊的几何性状. 即在这个 n 维曲面上的一点 $\boldsymbol{x}^0 \in R^m$ 处，任取的该曲面的法方向上，该曲面具有相同的总曲率(和主法曲率). 从这个意义上讲，该曲面的 $\boldsymbol{x}^0$ 点具有**法向迷向**性状. 或者说，在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处，该曲面上任取的法方向都是主法方向. 注意，具有法向迷向性状的点，取过该点的不同的切方向，仍可以具有不同的法截曲率. 如本例中，在以上所给的点处，W 映射的特征值是

$$\lambda^2 = 3.125 \, | \boldsymbol{I} |^{-\frac{3}{2}} (t_1^2 + t_2^2) = 3.125 \, | \boldsymbol{I} |^{-\frac{3}{2}}$$

与 t_1、t_2 无关. 但可以有

$$\lambda_1 = -\sqrt{3.125} \, | \boldsymbol{I} |^{-\frac{3}{4}} \qquad \lambda_2 = \sqrt{3.125} \, | \boldsymbol{I} |^{-\frac{3}{4}}$$

这样 2 个不同的主法曲率，故说明本例曲面上的这一点处，在任取的法方向下，对任取的过这点的(不同的)切方向，曲面的法截曲率不会相同. 所以，本例曲面在切方向上并不是迷向的，仅在法方向上是迷向的. 还应说明，本例中曲面任一点上的主法曲率和 $\lambda_1 + \lambda_2 \equiv 0$，故这一曲面具有极小曲面的意义. 其次，仍以本例曲面为例，若有 $\boldsymbol{x}_1$、$\boldsymbol{x}_2$ 是该曲面上的 2 个不同的法向迷向的点，但 $\boldsymbol{x}_1$、$\boldsymbol{x}_2$ 点处仍可以具有不同的 Gauss 曲率.

附带指出，以 C^m 表示复 Euclid 空间. $z \in C$ 是复变量，$\boldsymbol{z} \in C^m$ 是复变量向量. 将 $\boldsymbol{z}$ 看成是

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y} \qquad i = \sqrt{-1} \qquad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^m$$

则

$$f(\boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + ih(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \qquad \text{—(2.4.4.138)}$$

是一个解析函数，其中 $g(\cdot)$、$h(\cdot)$ 是实函数，如果 $f(z)$ 满足 **Cauchy - Riemann** 条件[1]，对 $z \in D_z \subset C^m$，D_z 是一个开集成立

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} = \frac{\partial h}{\partial y_k} \quad \frac{\partial g}{\partial y_k} = -\frac{\partial h}{\partial x_k} \quad k = 1, 2, \cdots, m \quad —(2.4.4.139)$$

现在设 $f(z)$ 是解析函数，将

$$f(z) = 0 \quad —(2.4.4.140)$$

看成是 C^m 复空间上的一个复曲面. 则由(2.4.4.138)式，以上复曲面可对应于以下 R^{2m} 实空间上的一个曲面，即

$$\begin{cases} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \\ h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \end{cases} \quad —(2.4.4.141)$$

例如上例中的曲面，就可以看成是以下 C^2 复空间上的复曲面(曲线)的对应实曲面，

$$z_1^2 + z_2^2 = z_0^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{z} = z_0^2$$

这里，取

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad z_0 = a + ib$$

$$\boldsymbol{z} = (z_1, z_2)^{\mathrm{T}}$$

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 - y_2^2$$

$$h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1 y_1 + 2x_2 y_2$$

$$f(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{z} - z_0^2 = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + ih(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - [(a^2 - b^2) + i2ab] = 0$$

可验证 $f(z)$ 是解析的，且有对应的实曲面是

$$\begin{cases} x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 - y_2^2 = a^2 - b^2 \\ 2x_1 y_1 + 2x_2 y_2 = 2ab \end{cases}$$

重新定义 $y_1 = x_2$，$x_2 = x_3$，$y_2 = x_4$ 并简化，就是上例中 R^4 空间上的 2 维曲面.

类似上例这样，由 2 个解析函数组成的 R^m 空间上的 $m-2$ 维曲面(且 m 是偶数)，都可以看成是 $C^{\frac{m}{2}}$ 复空间上的某个复曲面的对应曲面. 但它们二者之间的相互关系仍不甚清晰.

本书以下部分还会有所涉及 C^m 复空间上的曲面问题以及法向迷向曲面的问题(见 § 4.4 节).

上文中已指出，在法向迷向曲面上，Gauss 曲率可能由 R_{iijk} 符号表出的问

---

[1] 《微分几何讲义》(第二版)，陈省身、陈维桓，北京大学出版社 2001 年，第 213 页.

题. 以下就此再予以举例说明.

例 2.4.4.7 构造以下 R^4 空间上的 2 维曲面

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) = (u^3, u^2, u, v^2)^{\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{u} = (u, v)^{\mathrm{T}}$$

由

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 3u^2 & 0 \\ 2u & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1+4u^2+9u^4 & 0 \\ 0 & 4v^2 \end{bmatrix}$$

取定义区间为 $0 < v < +\infty \quad -\infty < u < +\infty$

由多重矢量积易得以下基法向量组

$$\boldsymbol{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2u \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{N}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3u^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2u & -3u^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Pi^{\mathrm{T}}\Pi = \begin{bmatrix} 1+4u^2 & -6u^3 \\ -6u^3 & 1+9u^4 \end{bmatrix}$$

$$|\Pi^{\mathrm{T}}\Pi| = 1+4u^2+9u^4 > 0$$

由

$$\frac{\partial \boldsymbol{N}_1}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{N}_2}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -6u & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在约束条件

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t} = 1$$

之下,

$$\boldsymbol{II}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{II}^1 t_1 + \boldsymbol{II}^2 t_2$$

且因

$$\boldsymbol{II}^1 = -\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{N}_1}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{II}^2 = \begin{bmatrix} 6u & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{I\!I}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} -2t_1 + 6ut_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以

$$|\boldsymbol{I\!I}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{t})| \equiv 0$$

与 $\boldsymbol{t}$ 的取法无关. $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$是法向迷向的,且其 Gauss 曲率在任意给定的法方向下均为 0.

利用$\boldsymbol{I}$ 矩阵,易知 $R_{1212} \equiv 0$. 以下利用法截曲线的分析方法说明这一点. 以 $u = 1 \quad v = \dfrac{1}{2}$ 为例.

$$\boldsymbol{x}^0 = \left(1,\ 1,\ 1,\ \frac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}}$$

在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 点处,有

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将 $\boldsymbol{\Pi}$ 矩阵调整为列正交矩阵,且仍记为 $\boldsymbol{\Pi}$. $\boldsymbol{\Pi}$ 仍是$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$的正交补空间的基向量组.

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\dfrac{6}{5} \\ 2 & -\dfrac{3}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

为简化符号,不再作 $\boldsymbol{\Pi}$ 各列的归一化. 这不影响以下分析,仅影响了非 0 极值法截曲线法曲率的绝对值.

作为 $\boldsymbol{x}^0$ 上的 3 维法截平面

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{h}\right)t + \boldsymbol{\Pi s} \qquad \boldsymbol{s} = (s_1,\ s_2)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{h} = 1 \qquad \boldsymbol{h} = (h_1,\ h_2)^{\mathrm{T}}$$

有

$$x=\begin{bmatrix}1+3h_1t & +s_2\\ 1+2h_1t-s_1 & -\frac{6}{5}s_2\\ 1+h_1t+2s_1 & -\frac{3}{5}s_2\\ \frac{1}{4}+h_2t & \end{bmatrix}\qquad \text{—(a)}$$

由 $r(u)$ 的函数形式，知应有

$$\begin{cases} f_1:\ \left(1+h_1t+2s_1-\frac{3}{5}s_2\right)^2-\left(1+2h_1t-s_1-\frac{6}{5}s_2\right)=0\\ f_2:\ \left(1+h_1t+2s_1-\frac{3}{5}s_2\right)^3-(1+3h_1t+s_2)=0\end{cases}\qquad \text{—(b)}$$

方程组成立.

由此可得

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(s_1,s_2)}=\begin{bmatrix}4\left(1+h_1t+2s_1-\frac{3}{5}s_2\right)+1 & -\frac{6}{5}\left(\left(1+h_1t+2s_1-\frac{3}{5}s_2\right)-1\right)\\ 6\left(1+h_1t+2s_1-\frac{3}{5}s_2\right)^2 & -\left(\frac{9}{5}\left(1+h_1t+2s_1-\frac{3}{5}s_2\right)^2+1\right)\end{bmatrix}$$

当 $t=s_1=s_0=0$ 即在 $x=x^0$ 点处，

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(s_1,s_2)_{x=x^0}}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 6 & -\frac{14}{5}\end{bmatrix}\qquad \left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(s_1,s_2)_{x=x^0}}\right|=-14$$

所以，在 $x=x^0$ 的邻域处，从(b)式中可决定 $s_1(t)$、$s_2(t)$ 形式的可微函数.

由于从(b)式中可得

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial t}\\ \frac{\partial f_2}{\partial t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2h_1\left(\left(1+h_1t+2s_1-\frac{3}{5}s_2\right)-1\right)\\ 3h_1\left(\left(1+h_1t+2s_1-\frac{3}{5}s_2\right)^2-1\right)\end{bmatrix}$$

故

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial t}\\ \frac{\partial f_2}{\partial t}\end{bmatrix}_{x=x^0}=\mathbf{0}$$

所以

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t}\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}_{x=x^0}=\left(\left[\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(s_1,s_2)}\right]^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial t}\\[2mm]\dfrac{\partial f_2}{\partial t}\end{bmatrix}\right)_{x=x^0}=\mathbf{0}$$

对(b)式方程组,求关于 t 的二阶导数,可得

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}^2s_1}{\mathrm{d}t^2}\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}^2s_2}{\mathrm{d}t^2}\end{bmatrix}_{x=x^0}=\left(\left[\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(s_1,s_2)}\right]^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}\\[2mm]\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}\end{bmatrix}\right)_{x=x^0}$$

其中

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}\\[2mm]\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2h_1^2\\[2mm]6h_1^2\left(1+h_1t+2s_1-\dfrac{3}{5}s_2\right)\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}\\[2mm]\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}\end{bmatrix}_{x=x^0}=\begin{bmatrix}2h_1^2\\6h_1^2\end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}^2s_1}{\mathrm{d}t^2}\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}^2s_2}{\mathrm{d}t^2}\end{bmatrix}_{x=x^0}=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{5}\\[2mm]-\dfrac{9}{7}\end{bmatrix}h_1^2$$

将(a)式中的 s_1、s_2 看成是 $s_1(t)$、$s_2(t)$,便得到 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 形式的法截曲线.于是

$$\nabla\boldsymbol{x}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}3h_1+\dfrac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}t}\\[2mm]2h_1-\dfrac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t}-\dfrac{6}{5}\dfrac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}t}\\[2mm]h_1+2\dfrac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t}-\dfrac{3}{5}\dfrac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}t}\\[2mm]h_2\end{bmatrix}$$

$$\nabla\boldsymbol{x}(0)=(3h_1,\ 2h_1,\ h_1,\ h_2)^{\mathrm{T}}$$

$$\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{x}\,|_{t=0}=14h_1^2+h_2^2\equiv 1$$

$$\nabla^2\boldsymbol{x}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}=\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}^2s_2}{\mathrm{d}t^2}\\[2mm]-\dfrac{\mathrm{d}^2s_1}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{6}{5}\dfrac{\mathrm{d}^2s_2}{\mathrm{d}t^2}\\[2mm]2\dfrac{\mathrm{d}^2s_1}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{3}{5}\dfrac{\mathrm{d}^2s_2}{\mathrm{d}t^2}\\[2mm]0\end{bmatrix}\qquad\nabla^2\boldsymbol{x}(0)=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-9\\8\\11\\0\end{bmatrix}h_1^2$$

因为在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0$ 点 $\nabla \boldsymbol{x} \perp \nabla^2 \boldsymbol{x}$，故法截曲线的(绝对)曲率就是

$$\kappa_x = \| \nabla^2 \boldsymbol{x}(0) \| = \sqrt{\frac{38}{7}} \cdot h_1^2$$

因此，极值曲率由以下规划决定

$$\begin{cases} \text{极值} & h_1^2 \\ \text{s.t.} & 14h_1^2 + h_2^2 = 1 \end{cases}$$

一阶条件是

$$\begin{cases} 2h_1 - 28h_1 \cdot \lambda = 0 \\ \qquad\quad 2h_2 \cdot \lambda = 0 \end{cases}$$

故极值法曲率及法截曲线由以下解给出

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow h_1 = 0 \quad h_2 = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{14} \Rightarrow h_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \quad h_2 = 0$$

给出了过 $\boldsymbol{x}^0$ 点且正交的两条法截曲线. 在 $\lambda_1 = 0$ 决定的法截曲线的法曲率(极值)是 0，在 $\lambda_2 = \frac{1}{14}$ 时的法截曲线的法曲率(极值)恒大于 0. 故依 Gauss 曲率的定义即知，本例中 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面上 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的 Gauss 总曲率确系为 0.

在结束本节时，还可指明以下一个关于综合的问题. 即由于以上已就 R^m 空间上的 n 维曲面建立起了自然标架系方程组和可积性条件方程组，所以，经典微分几何中的“曲线”(1 维曲面)与“曲面”($m-1$ 维曲面)的理论，完全可以在 R^m 空间上的 $1 \leqslant n \leqslant m-1$ 维曲面的分析方法上统一起来并成为 $n=1$ 和 $n=m-1$ 时的特例. 对此，本书已有所尝试，但显然囿于时间、篇幅和精力，这项极有意义的工作没能完全展开.

有意思的是，如大数学家庞加莱(H. Poincaré)所说：在高维空间的几何学分支中，有些是“不太有兴趣”. 例如那些关于 n 维空间中曲面曲率的研究，事先就能肯定会得到同 R^3 空间上曲面同样的结果.“我们无须走多远，就可以见到我们平常在自己身边常常遇到的类似的景色”[1]. 这个说法在许多场合都是对的. 然而，正如以上的分析已见到、恰恰是在 R^m 空间中且 $m=3$，没有这样一大类几何对象——n 维曲面，这里的 n 是整数且 $1<n<m-1$. 只有在 $m>3$ 的 R^m 的高维空间上，才可能存在 1 维曲面(可称为标准曲线)、$m-1$ 维曲面(可称为标准曲面)以及存在 $1<n<m-1$ 的 n 维曲面(可称为 n 维曲线面). 显而易见事实上就是这种 n 维曲线面才是最普遍性的几何对象. 而标准曲线、标准曲面完

[1] 转引自《数学珍宝》，李文林主编. 第 628 页.

全也应当被看成是 $n=1$ 和 $n=m-1$ 时的 2 个特例. 从这个意义上讲，任何局限于 R^3 空间上的思维或简单地外推 R^3 空间上的一切成果的思维方式，只会对于更深入和全面地研究高维空间的几何学带来事先预设的限制和造成诸多的误解.

这里可举一例. 黎曼(G. F. B. Riemann)在 1854 年的演讲《关于几何基础中的假设》一文中，指出了"像平面和空间那样的流形，其中 ds 可以表成 $\sqrt{\sum (dx)^2}$ 的形式"是一个特例. "我称 ds 的平方可以表成整体一次微分式的平方和的流形为**平坦流形**". 以现行的符号表示，这即是说曲面(或空间)的第一基本形式是

$$ds^2 = \sum dx_i^2$$

即为平坦流形. 在现行的许多文献中，人们不加分析地将 Riemann 的这个判断推广到 R^m 空间上的 n 维曲线面 $(1<n<m-1)$ 的情形中. 如，称以上例 2.4.4.5 中的 R^4 空间上的 2 维曲面

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) = (\cos u,\ \sin u,\ \cos v,\ \sin v)^{\mathrm{T}}$$

为"平坦环面". 这无非是因为这一曲面的第一基本形式就是

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

但从例 2.4.4.5 的分析中已说明了，将这一曲面的 Gauss 曲率(传统意义上的)不加分析就视为处处为 0 是错误的. 所以，称这一曲面为平坦的也就是错误的. 造成这一错误的原因，即在于不适当地对 R^4 空间上的 2 维曲面的曲率使用了"内蕴几何"的推定. 而前面已指出，关于曲率的"内蕴几何"的分析仅仅只适用于 R^4 空间上的 3 维(正则)曲面(片).

相比较而言，Riemann 本人在他的 1854 年演讲中，所给予的"平坦流形"的推断则是正确无误的. 因为 Riemann 在他的演讲的第 2、3 节，分别说明了 1 维曲线的移动可织成一个 2 维曲面片，2 维曲面片的移动可"织成"一个 3 维曲面片，"则上述的构造过程可以刻划为从具有 n 个自由度的变量和具有 1 个自由度的变量合成一个具有 $n+1$ 个自由度的变量的过程."反之，"如此确定给定流形中点的位置就简化成确定一个数量和具有较低维数的流形中点的位置. 现在容易看出，如果给定的流形是 n 维的，则那个有较低维数的流形是 $n-1$ 维的."[1]很清楚，Riemann 在这里仅仅只考虑了 n 维(或 $n+1$ 维)空间(或流形)上的 $n-1$ 维(或 n 维)曲面(或流形)的度量问题. 在这样的标准曲面上，Riemann 的推断就是正确的. 以上所分析的 R^m 空间上的 n 维曲线面 $(1<n<m-1)$ 的情形，在 Riemann 的演讲中并没有涉及.

---

[1] 转引自《数学珍宝》，李文林主编，第 603—604 页.

总起来说，在 Euclid 空间上关于(Gauss)曲率的内蕴几何分析方法，只能限制在标准曲面这一几何对象上. 在 Euclid 空间上对于任意给定的一个实对称的微分二次型线素的度量

$$ds^2 = \sum g_{ij} du_i d u_j \qquad i, j = 1, \cdots, n$$

如果不假定它是一个 $n+1$ 维 R^{n+1}空间上的曲面上的度量，就不能利用内蕴几何方法去推断这一流形的 Gauss 曲率.

这一限制条件也可以简洁地表成**不可能单纯利用(2.4.3.16)式、(2.4.3.23)式构造出 R^k_{itj}、R_{itjk} 符号并使其**(或通过代数运算)**具有曲率的意义.**

附注 1：多重矢量积中的变换与标架系的手性

在 $z_i \in R^m$, $i = 1, \cdots, n$, 且 $n = m-1$ 的向量组的多重矢量积中，若对 z_i 向量组给予变换的一些关系式，已在§2.4.1 节中给出了说明(见(2.4.1.6a～10)式). 以下就 $n < m-1$ 时的情形再给予一个说明.

设

$$Z_n = [z_1, \cdots, z_n] \quad Y_n = [y_1, \cdots, y_n]$$

z_i, $y_i \in R^m$, Z_n、Y_n 均是列满秩矩阵.

Z_n、Y_n 矩阵间有变换关系

$$Y_n = Z_n Q \qquad Z_n = Y_n Q^{-1} \qquad Q \in R^{n\times n}$$

Q 是可逆变换矩阵，仍可有(2.4.1.9)式构造出来.

记

$$N_z = [N_1^z, N_2^z, \cdots, N_{m-n}^z]$$

其中 N_i^z 是 z_i 向量组的多重矢量积给出的向量. 类似地有 N_y 矩阵.

设标架系(Z_n, N_z)和(Y_n, N_y)都是(拟)右手性的. 行列式

$$|Z_n, N_z| > 0 \qquad |Y_n, N_y| > 0$$

利用 Gram 矩阵的性质及以上关系式，类似于(2.4.1.7～10)式的作法，可得

$$|Z_n, N_z| = |Z_n^T Z_n|^{\frac{1}{2}} \; |N_z^T N_z|^{\frac{1}{2}} \qquad \text{—(2.4.4.142)}$$

对 Y_n、N_y 有类似关系.

由

$$\begin{bmatrix} Z_n^T \\ N_z^T \end{bmatrix} [Y_n, N_y] = \begin{bmatrix} Z_n^T Y_n & Z_n^T N_y \\ N_z^T Y_n & N_z^T N_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_n^T Z_n Q & [Q^{-1}]^T Y_n N_y \\ N_z^T Z_n Q & N_z^T N_y \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} Z_n^{\mathrm{T}} Z_n Q & 0 \\ 0 & N_z^{\mathrm{T}} N_y \end{bmatrix}
$$

这里已附带说明了 N_z 的列向量同时与 $\boldsymbol{z}_i$、$\boldsymbol{y}_i$ 正交，N_y 的列向量类似.

对上式两边取行列式，并利用(2.4.4.142)式，有

$$
| Y_n^{\mathrm{T}} Y_n |^{\frac{1}{2}} \; | N_z^{\mathrm{T}} N_z |^{\frac{1}{2}} \; | N_y^{\mathrm{T}} N_y |^{\frac{1}{2}} = | Z_n^{\mathrm{T}} Z_n |^{\frac{1}{2}} \; | N_z^{\mathrm{T}} N_y | \, | Q |
$$

又因为

$$
| Y_n^{\mathrm{T}} Y_n |^{\frac{1}{2}} = \sqrt{| Q |^2} \cdot | Z_n^{\mathrm{T}} Z_n |^{\frac{1}{2}} = | (| Q |) | \, | Z_n^{\mathrm{T}} Z_n |^{\frac{1}{2}}
$$

所以，以上两式可得

$$
\frac{| N_z^{\mathrm{T}} N_y |}{| N_z^{\mathrm{T}} N_z |^{\frac{1}{2}} \; | N_y^{\mathrm{T}} N_y |^{\frac{1}{2}}} = \frac{| Q |}{| (| Q |) |} = \operatorname{sign}(| Q |) \qquad \text{—(2.4.4.143)}
$$

在 $n = m-1$ 时，(2.4.4.143)式就成为(2.4.1.8)式.(2.4.4.143)式表示，在 Q 矩阵给出的变换下，标架系(Z_n, N_z)成为(Y_n, N_y)又要保持(拟)右手性不变，则应有

$$
\operatorname{sign}(| Q |) \cdot | N_z^{\mathrm{T}} N_y | > 0 \qquad \text{—(2.4.4.144)}
$$

的关系成立.

由于在 $n < m-1$ 时，多重矢量积的结果不是唯一的.设 N_z、N_y 之间有变换关系

$$
N_y = N_z T \qquad T \in R^{(m-n)\times(m-n)} \qquad | T | \neq 0
$$

则

$$
\frac{| N_z^{\mathrm{T}} N_y |}{| N_z^{\mathrm{T}} N_z |^{\frac{1}{2}} \; | N_y^{\mathrm{T}} N_y |^{\frac{1}{2}}} = \frac{| T |}{\sqrt{| T |^2}} = \operatorname{sign}(| T |)
$$

故(Y_n, N_y)保持(拟)右手性的条件也可以表成

$$
\operatorname{sign}(| T |) = \operatorname{sign}(| Q |) \Leftrightarrow | T | \, | Q | > 0 \qquad \text{—(2.4.4.145)}
$$

当取 $Q = I_n$，即对于 $\boldsymbol{z}_i$ 向量组，在(任取的)多重矢量积算法下，标架系保持(拟)右手性不变的条件即

$$
\operatorname{sgin}(| T |) = 1 \Leftrightarrow | N_z^{\mathrm{T}} N_y | > 0 \qquad \text{—(2.4.4.146)}
$$

其中 N_z、N_y 现在是 $\boldsymbol{z}_i$ 向量组张成子空间的法空间中任取的两组基向量组(矩阵).

附注 2：R^m 空间上的 n 维曲面的极值主法方向在基变换下的不变性

设 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})\in R^m$，$\boldsymbol{u}\in D_u\subset R^n$ 给出了 R^m 空间上的一个 n 维正则参数曲面片．由以上关于 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的法空间的极值（极大值）主法方向 $\boldsymbol{n}_i^*$ 的确定方式，可知 $\boldsymbol{n}_i^*$ 与 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$ 矩阵列向量组在多重矢量积算法中取得的法空间的基向量组即（2.4.4.2）式的矩阵 Π 的取法是无关的．以下就此给予具体说明．

设 $\Pi^i=[\boldsymbol{N}_1^i,\cdots,\boldsymbol{N}_{m-n}^i]$ $\quad \boldsymbol{N}_j^i\in R^m \quad i=1,2$ 是 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$ 的列向量组在多重矢量积算法中取得的两个矩阵．$\Pi^{1,2}$ 就是 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$ 的正交补空间上的两个基向量组所组成的矩阵．

则有 $Q\in R^{(m-n)\times(m-n)}$ 使

$$\Pi^2=\Pi^1 Q \qquad |Q|>0$$

在自然标架系 $\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}},\Pi^1\right)$ 之下，取 $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\Pi^1)^{\mathrm{T}}\Pi^1\boldsymbol{t}=1$ 成立时，

$$\mathbb{I}_1(\boldsymbol{t})=-\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\sum_{h=1}^{m-n}\frac{\partial \boldsymbol{N}_h^1}{\partial \boldsymbol{u}}t_h=-\sum_{h=1}^{m-n}\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{N}_h^1}{\partial \boldsymbol{u}}t_h=\sum_{h=1}^{m-n}\mathbb{I}_1^h t_h$$

而在自然标架系 $\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}},\Pi^2\right)$ 之下，

$$\boldsymbol{N}_h^2=\sum_{i=1}^{m-n}\boldsymbol{N}_i^1 q_{ih}$$

q_{ih} 是 Q 的对应元素．作 Π^2 决定的单位法向量 $\boldsymbol{n}^2$

$$\boldsymbol{n}^2=\frac{\Pi^2\boldsymbol{t}}{(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\Pi^2)^{\mathrm{T}}\Pi^2\boldsymbol{t})^{\frac{1}{2}}} \qquad \boldsymbol{t}\in R^{(m-n)}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}^2}{\partial \boldsymbol{u}}=\sum_{h=1}^{m-n}\sum_{i=1}^{m-n}\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}_i^1}{\partial \boldsymbol{u}}q_{ih}t_h+\boldsymbol{N}_i^1\frac{\partial(q_{ih}t_h)}{\partial \boldsymbol{u}}\right)\Big/(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\Pi^2)^{\mathrm{T}}\Pi^2\boldsymbol{t})^{\frac{1}{2}}-\frac{\boldsymbol{n}^2}{2}\frac{\partial(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\Pi^2)^{\mathrm{T}}\Pi^2\boldsymbol{t})/\partial \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\Pi^2)^{\mathrm{T}}\Pi^2\boldsymbol{t}}$$

所以，

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_2(\boldsymbol{t})&=-\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{n}^2}{\partial \boldsymbol{u}}=-\sum_{h,i=1}^{m-n}\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{N}_i^1}{\partial \boldsymbol{u}}q_{ih}t_h\Big/(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\Pi^2)^{\mathrm{T}}\Pi^2\boldsymbol{t})^{\frac{1}{2}}\\&=\sum_{i=1}^{m-n}\left(\mathbb{I}_1^i\cdot\sum_{h=1}^{m-n}q_{ih}t_h\right)\Big/(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(\Pi^2)^{\mathrm{T}}\Pi^2\boldsymbol{t})^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

记

$$p_i=\sum_{h=1}^{m-n}q_{ih}t_h \qquad \boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}p_1\\ \vdots\\ p_{m-n}\end{bmatrix}=Q\boldsymbol{t}$$

就有

$$t^{\mathrm{T}}(\Pi^2)^{\mathrm{T}}\Pi^2 t = t^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}(\Pi^1)^{\mathrm{T}}\Pi^1 Qt = p^{\mathrm{T}}(\Pi^1)^{\mathrm{T}}\Pi^1 p$$

令 $t^{\mathrm{T}}(\Pi^2)^{\mathrm{T}}\Pi^2 t = 1$，就有

$$\boldsymbol{I\!I}_2(t) = \sum_{i=1}^{m-n} \boldsymbol{I\!I}_1^i p_i = \boldsymbol{I\!I}_1(p)$$

所以，极值规划

$$\begin{cases}\text{极值：} |\boldsymbol{I\!I}_2(t)| \\ \text{s. t. } t^{\mathrm{T}}(\Pi^2)^{\mathrm{T}}\Pi^2 t = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\text{极值：} |\boldsymbol{I\!I}_1(p)| \\ \text{s. t. } p^{\mathrm{T}}(\Pi^1)^{\mathrm{T}}\Pi^1 p = 1\end{cases}$$

并且设 t^*、p^* 分别是以上极值规划的解向量，那么，极值主法向量 n_1^* 是

$$n_1^* = \Pi^2 t^* = \Pi^1 Q t^* = \Pi^1 p^*$$

从而，n_1^* 是不变的. 所以，由 n^* 决定的 Gauss 曲率也不变. 这一性质，可递推到 n_i^* $\quad i = 2, \cdots, m-n$.

其次，考虑对 u 作变换 $u = u(v)$，且 $\left|\dfrac{\partial u}{\partial v}\right| > 0$. 有

$$r(v) = r(u(v))$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v} \qquad \boldsymbol{I}(v) = \frac{\partial u^{\mathrm{T}}}{\partial v}\boldsymbol{I}(u)\frac{\partial u}{\partial v}$$

设 $\Pi(u)$ 是 $\dfrac{\partial r}{\partial u}$ 的列向量组经多重矢量积得到的法空间的基向量组矩阵. 显然 $\Pi(u)$ 也就是 $\dfrac{\partial r}{\partial v}$ 的法空间的基向量组矩阵. 由以上的结论，可仍取 $\left(\dfrac{\partial r}{\partial v}, \Pi(u)\right)$ 为自然标架系.

记 $\Pi(u) = [N_1, \cdots, N_{m-n}]$，从而有

$$\boldsymbol{I\!I}(v, t) = -\frac{\displaystyle\sum_{h=1}^{m-n} \frac{\partial u^{\mathrm{T}}}{\partial v}\frac{\partial r^{\mathrm{T}}}{\partial u}\frac{\partial N_h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}t_h}{(t^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}(u)\Pi(u)t)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\displaystyle\frac{\partial u^{\mathrm{T}}}{\partial v}\sum_{h=1}^{m-n}\frac{\partial r^{\mathrm{T}}}{\partial u}\frac{\partial N_h}{\partial u}t_h \cdot \frac{\partial u}{\partial v}}{(t^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}(u)\Pi(u)t)^{\frac{1}{2}}}$$

即知有

$$\boldsymbol{I\!I}(v, t) = \frac{\partial u^{\mathrm{T}}}{\partial v}\boldsymbol{I\!I}(u, t)\frac{\partial u}{\partial v}$$

且由于

$$\begin{cases}\text{极值：} \left|\dfrac{\partial u^{\mathrm{T}}}{\partial v}\boldsymbol{I\!I}(u, t)\dfrac{\partial u}{\partial v}\right| \\ \text{s. t. } \quad t^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}(u)\Pi(u)t = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\text{极值：} |\boldsymbol{I\!I}(u, t)| \\ s.\,t. \quad t^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}(u)\Pi(u)t = 1\end{cases}$$

故其极大值解向量 $\boldsymbol{t}^*$ 不变，从而 $\boldsymbol{n}_1^* = \Pi(\boldsymbol{u})\boldsymbol{t}^*$ 也不变，并且易知 Gauss 曲率

$$\kappa = \frac{|\boldsymbol{I\!I}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{t}^*)|}{|\boldsymbol{I}(\boldsymbol{v})|} = \frac{|\boldsymbol{I\!I}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}^*)|}{|\boldsymbol{I}(\boldsymbol{u})|}$$

也是不变的. 对 $\boldsymbol{n}_i^*$ $\quad i = 2, \cdots, m-n$ 亦类似.

附注 3：可积性条件方程组对于 n 维曲面刚体运动的不变性

R^m 空间上的 n 维曲面的可积性条件方程组即(2.4.4.106、107、112)式方程组.

设 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a} \in R^m$, $A \in R^{m\times m}$, $\boldsymbol{a}$、A 是数值向量、矩阵.

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} + A\boldsymbol{x}$$

给出了 R^m 空间的坐标变换. 若 A 是正交矩阵 $A^{\mathrm{T}}A = I_m$，称 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 之间存在刚体运动(平移与旋转)变换.

仍设 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$是 R^m 上的 n 维正则参数曲面片. 则称

$$\sigma:\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{a} + A\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) \qquad (A^{\mathrm{T}}A = I_m) \qquad —(2.4.4.147)$$

决定的曲面片是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$经刚体运动变换 σ 而来的曲面片.

对于 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})$曲面片，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{u}} = A\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \qquad —(2.4.4.148)$$

所以

$$\boldsymbol{I}_y = \frac{\partial \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}A^{\mathrm{T}}A\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{I}_r$$

即曲面的第一基本二次型矩阵在刚体运动下是不变的.

设 Π 是$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$列向量的矢量积矩阵. 直接取

$$\Pi_y = A\Pi \qquad \Pi = [\boldsymbol{N}_1, \cdots, \boldsymbol{N}_{m-n}] \qquad —(2.4.4.149)$$

则 Π_y 就是$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{u}}$的正交补空间的基向量组矩阵. 于是在

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Pi_y^{\mathrm{T}}\Pi_y\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}\Pi^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\Pi\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{t} = 1 \qquad —(2.4.4.150)$$

条件下，直接取$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{u}}$的单位法向量 $\boldsymbol{n}_y$ 是

$$\boldsymbol{n}_y = \Pi_y\boldsymbol{t} = A\Pi\boldsymbol{t} \qquad —(2.4.4.151)$$

故

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}_y}{\partial \boldsymbol{u}} = A\sum_{h=1}^{m-n}\frac{\partial \boldsymbol{N}_h}{\partial \boldsymbol{u}}t_h + A\Pi\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial \boldsymbol{u}} \qquad —(2.4.4.152)$$

所以，

$$\boldsymbol{I\!I}_y = -\frac{\partial \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{n}_y}{\partial \boldsymbol{u}} = -\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}A^{\mathrm{T}}A\sum_{h=1}^{m-n}\frac{\partial \boldsymbol{N}_h}{\partial \boldsymbol{u}}t_h = -\sum_{h=1}^{m-n}\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{N}_h}{\partial \boldsymbol{u}}t_h = \boldsymbol{I\!I}_r$$

故曲面的第二基本二次型矩阵在刚体运动下是不变的.

再由(2.4.4.150)式，决定极值主法方向规划的约束条件在刚体运动下也不变，即知决定曲面极值主法方向 $\boldsymbol{n}_i$ 的 $\boldsymbol{t}_i^*$ 也是不变的. 所以，在 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})$ 曲面上的法空间的极值主法方向是

$$\boldsymbol{n}_i^y = A\Pi\boldsymbol{t}_i^* = A\boldsymbol{n}_i \quad i = 1, \cdots, m-n \qquad —(2.4.4.153)$$

由(2.4.4.94～95)式给出的标架方程组的系数与$\boldsymbol{I}$、$\boldsymbol{I\!I}$矩阵元素的关系，即知，在 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})$ 曲面上，Γ_{ij}^k、C_{ij}^h、D_{ik}^h 系数，由于第一、二基本二次型矩阵的不变性是不变的，而对于 b_i^{hs} 系数，由(2.4.4.98)式给出的关系，由(2.4.4.153)式即知也是不变的.

由此即可知可积性条件方程组的系数也是在曲面刚体运动变换下的不变量.

附注 4：R^m 空间的 n 维曲面的基本定理

与 R^3 空间上的 2 维曲面相类似，R^m 空间上的 n 维曲面也有以下两个基本的定理. 这两个定理的证明可以参照 R^3 空间的情形给出〔1〕，仅只是有关方程式的形式略有些差异. 以下先给出曲面唯一性定理的证明.

定理 2.4.4.9　(曲面的唯一性)设 $\boldsymbol{r}^1(\boldsymbol{u})$、$\boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{u})$　$\boldsymbol{u} \in D \subset R^n$　$\boldsymbol{r}^1$、$\boldsymbol{r}^2 \in R^m$ 是两个 n 维正则参数曲面片. 若在 $\boldsymbol{u} \in D$ 的每一点上，$\boldsymbol{r}^1$、$\boldsymbol{r}^2$ 都有相同的第一、二基本二次型矩阵

$$\boldsymbol{I} = [g_{ab}(\boldsymbol{u})] \quad \boldsymbol{I\!I} = \sum_{h=1}^{m-n}\boldsymbol{I\!I}^h t_h \qquad \boldsymbol{I\!I}^h = [C_{ab}^h(\boldsymbol{u})]$$

$$a, b = 1, \cdots, n; \ h = 1, \cdots, m-n$$

其中 $t_h \in R$，$\sum_{h=1}^{m-n} t_h^2 = 1$，并且，$\boldsymbol{r}^1$、$\boldsymbol{r}^2$ 曲面的自然标架系方程组的各因子在 $\boldsymbol{u} \in D$ 的每一点上也都相同，则曲面 $\boldsymbol{r}^1$ 和 $\boldsymbol{r}^2$ 在 R^m 空间的一个刚体运动下是彼此重合的.

■

〔1〕 如《微分几何》，陈维桓，见前注，§5.2 节，定理 2.1，§5.4 节，定理 4.1 及证明方法.

证明：由于 R^m 空间的 n 维曲面上的自然标架系方程组(2.4.4.94～95)式中的 b_i^{hs} 系数(同时出现在可积性条件方程组中)不是由第一、二基本二次型矩阵元素给出的，所以，在这一定理的条件中，增加了 $\boldsymbol{r}^1$、$\boldsymbol{r}^2$ 曲面的自然标架系方程组的系数相同这一条件.

设 $\boldsymbol{r}^i$ 的自然标架系是 $(\dot{\boldsymbol{r}}_1^i, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_n^i; \boldsymbol{n}_1^i, \cdots, \boldsymbol{n}_{m-n}^i) = \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}^i}{\partial \boldsymbol{u}}; N^i\right)$，$\boldsymbol{n}_j^i$ 是极值主法方向(单位正交向量)，N^i 是以 $\boldsymbol{n}_j^i$ 为列向量的矩阵. 任取 D 中的一定点 $\boldsymbol{u}^0$，由定理中的条件，在 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^0$ 点处有

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I_{m-n} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}^1(\boldsymbol{u}^0)}{\partial \boldsymbol{u}}; N^1(\boldsymbol{u}^0)\right]^{\mathrm{T}} \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}^1(\boldsymbol{u}^0)}{\partial \boldsymbol{u}}; N^1(\boldsymbol{u}^0)\right]$$

$$= \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{u}^0)}{\partial \boldsymbol{u}}; N^2(\boldsymbol{u}^0)\right]^{\mathrm{T}} \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{u}^0)}{\partial \boldsymbol{u}}; N^2(\boldsymbol{u}^0)\right] \quad —(2.4.4.154)$$

设 A 是标架系 $\left[\dfrac{\partial \boldsymbol{r}^i}{\partial \boldsymbol{u}}; N^i\right]\Bigg|_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^0} i = 1, 2$ 之间的变换矩阵，

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}^1(\boldsymbol{u}^0)}{\partial \boldsymbol{u}}; N^1(\boldsymbol{u}^0)\right] = A \cdot \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{u}^0)}{\partial \boldsymbol{u}}; N^2(\boldsymbol{u}^0)\right]$$

则

$$A = \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}^1(\boldsymbol{u}^0)}{\partial \boldsymbol{u}}; N^1(\boldsymbol{u}^0)\right] \cdot \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{u}^0)}{\partial \boldsymbol{u}}; N^2(\boldsymbol{u}^0)\right]^{-1} \quad —(2.4.4.155)$$

一般地，A、B、$C \in R^{m\times m}$ 且 B、C 均为可逆矩阵，并且有 $B^{\mathrm{T}}B = C^{\mathrm{T}}C$，令 $A = CB^{-1}$，$C = AB$，则 $C^{\mathrm{T}}C = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AB = B^{\mathrm{T}}B$，故

$$(B^{\mathrm{T}})^{-1}B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}ABB^{-1} = (B^{\mathrm{T}})^{-1}B^{\mathrm{T}}BB^{-1} = I_m \Rightarrow A^{\mathrm{T}}A = I_m$$

由(2.4.4.153～155)式，即知(2.4.4.155)式给出的 A 是正交矩阵.

所以在 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^0$ 点有变换 σ

$$\begin{cases} \sigma(\boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{u}^0)) = \boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{u}^0) + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}^1(\boldsymbol{u}^0) \quad (\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}^1(\boldsymbol{u}^0) - \boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{u}^0)) \\ \sigma\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{u}^0)}{\partial \boldsymbol{u}}; N^2(\boldsymbol{u}^0)\right) = A\left[\dfrac{\partial \boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{u}^0)}{\partial \boldsymbol{u}}; N^2(\boldsymbol{u}^0)\right] = \left[\dfrac{\partial \boldsymbol{r}^1(\boldsymbol{u}^0)}{\partial \boldsymbol{u}}; N^1(\boldsymbol{u}^0)\right] \end{cases} \quad —(2.4.4.156)$$

将这一变换 σ 作用于 $\boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{u}) \quad \boldsymbol{u} \in D$，有

$$\sigma(\boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{u})) = \boldsymbol{a} + A\boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{u}) \quad \boldsymbol{u} \in D \quad —(2.4.4.157)$$

则显然 σ 是刚体运动变换. 故知 $\sigma(\boldsymbol{r}^2)$ 曲面的第一、二基本二次型矩阵和可积性条件方程组中的各因子均不变. 仍将 $\sigma(\boldsymbol{r}^2)$ 记为 $\boldsymbol{r}^2$. 构造以下函数

$$\begin{cases} f_{ab}^{rr}(\boldsymbol{u}) = (\dot{\boldsymbol{r}}_a^1 - \dot{\boldsymbol{r}}_a^2)^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{r}}_b^1 - \dot{\boldsymbol{r}}_b^2) \\ f_{cd}^{rn}(\boldsymbol{u}) = (\dot{\boldsymbol{r}}_c^1 - \dot{\boldsymbol{r}}_c^2)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{n}_d^1 - \boldsymbol{n}_d^2) \\ f_{ef}^{nn}(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{n}_e^1 - \boldsymbol{n}_e^2)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{n}_f^1 - \boldsymbol{n}_f^2) \end{cases} \quad —(2.4.4.158)$$

f_{ab}^{rr}的上标"rr"仅只是标识，没有运算意义，余类似. 则显然，在 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^0$ 定点处，有

$$f_{ab}^{rr}(\boldsymbol{u}^0) = 0 \qquad f_{cd}^{rn}(\boldsymbol{u}^0) = 0 \qquad f_{ef}^{nn}(\boldsymbol{u}^0) = 0 \quad —(2.4.4.159)$$

根据(2.4.4.94～95)式，直接计算，可得 f_{ab}^{rr}、f_{cd}^{rn}、f_{ef}^{nn}满足以下一阶线性齐次偏微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_{ab}^{rr}}{\partial u_i} = \sum\limits_{k=1}^{n}(\Gamma_{ia}^k f_{kb}^{rr} + \Gamma_{ib}^k f_{ak}^{rr}) + \sum\limits_{h=1}^{m-n}(C_{ia}^h f_{bh}^{rn} + C_{ib}^h f_{ah}^{rn}) \\ \dfrac{\partial f_{cd}^{rn}}{\partial u_i} = \sum\limits_{k=1}^{n}(\Gamma_{ic}^k f_{kd}^{rn} + D_{ik}^d f_{kc}^{rr}) + \sum\limits_{h=1}^{m-n}(C_{ic}^h f_{hd}^{nn} + b_i^{dh} f_{ch}^{rn}) \\ \dfrac{\partial f_{ef}^{nn}}{\partial u_i} = \sum\limits_{k=1}^{n}(D_{ik}^e f_{kf}^{rn} + D_{ik}^f f_{ke}^{rn}) + \sum\limits_{h=1}^{m-n}(b_i^{eh} f_{hf}^{nn} + b_i^{fh} f_{he}^{nn}) \end{cases} \quad —(2.4.4.160)$$

$$i,\ a,\ b,\ c=1,\ \cdots,\ n;\ d,\ e,\ f=1,\ \cdots,\ m-n$$

(2.4.4.160)式给出的偏微分方程组在(2.4.4.159)式给出的 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^0$ 初值条件下，有零解. 由一阶偏微分方程组在初值条件下的解的唯一性，知(2.4.4.160)式的解必是

$$f_{ab}^{rr}(\boldsymbol{u}) = 0 \qquad f_{cd}^{rn}(\boldsymbol{u}) = 0 \qquad f_{ef}^{nn}(\boldsymbol{u}) = 0 \quad —(2.4.4.161)$$

于是即知

$$f_{aa}^{rr}(\boldsymbol{u}) = (\dot{\boldsymbol{r}}_a^1 - \dot{\boldsymbol{r}}_a^2)^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{r}}_a^1 - \dot{\boldsymbol{r}}_a^2) = 0$$

$$f_{aa}^{nn}(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{n}_a^1 - \boldsymbol{n}_a^2)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{n}_a^1 - \boldsymbol{n}_a^2) = 0$$

所以，有

$$\dot{\boldsymbol{r}}_a^1(u) = \dot{\boldsymbol{r}}_a^2(\boldsymbol{u}) \qquad \boldsymbol{n}_a^1(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{n}_a^2(\boldsymbol{u}) \quad —(2.4.4.162)$$

再令

$$h(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{r}^1(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}^1(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{u}))$$

于是

$$\frac{\partial h}{\partial u_i} = 2(\boldsymbol{r}^1(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{r}}_i^1(\boldsymbol{u}) - \dot{\boldsymbol{r}}_i^2(\boldsymbol{u})) = 0$$

故知

$$h(\boldsymbol{u}) = c \qquad c\text{— 常数}$$

因 $\sigma(\boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{u}^0))$ 仍记为 $\boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{u}^0)$ 故 $\boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{u}^0)=\boldsymbol{r}^1(\boldsymbol{u}^0)$，因此

$$h(\boldsymbol{u}^0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

即知，

$$\boldsymbol{r}^1(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{u}) \qquad \boldsymbol{u} \in D$$

成立. 证毕.

由以上的分析已可知当 $\boldsymbol{n}_h \quad h = 1, \cdots, m-n$ 是极值主法方向时，$b_i^{hp} = \dfrac{\partial \boldsymbol{n}_h^{\mathrm{T}}}{\partial u_i}\boldsymbol{n}_p$ 是 R^m 空间上 $n < m-1$ 维曲面的一个几何不变量.

定理 2.4.4.10（曲面的存在性） 设 $D \subset R^n$ 是 R^n 中的一个超立方区域，设给出

$$\boldsymbol{I} = [g_{ab}(\boldsymbol{u})] \quad \boldsymbol{I\!I}^h = [C_{ab}^h(\boldsymbol{u})] \quad a, b = 1, \cdots, n \quad h = 1, \cdots, z$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} \quad \varphi_2 = \mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\sum_{h=1}^{z}\boldsymbol{I\!I}^h t_h \mathrm{d}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in D \quad \text{—(2.4.4.163)}$$

是 D 上的两个二次微分形式，其中 $\boldsymbol{I}$ 是正定的，$\boldsymbol{I\!I}^h$ 是对称的，而 t_h 满足 $\sum\limits_{h=1}^{z} t_h^2 = 1$，$t_h \in R$，以及给出 n 个负对称的矩阵

$$B_i = [b_i^{hp}] \quad h, p = 1, \cdots, k, \ i = 1, \cdots, n \quad b_i^{hh} = 0 \quad b_i^{hp} = -b_i^{ph}$$

其中 $b_i^{hp} = b_i^{hp}(\boldsymbol{u})$ 是 $\boldsymbol{u}$ 的连续函数.

用 $\boldsymbol{I}$ 矩阵的元素构造出 Christoffel 符号 Γ_{ij}^k 并构造 $D_{ik}^p = -\sum\limits_{j=1}^{n} C_{ij}^p g^{jk}$ 因子，其中 g^{jk} 是 $\boldsymbol{I}^{-1}$ 矩阵的元素. 如果 Γ_{ij}^k、C_{ij}^h、D_{ik}^p 和 b_i^{hp} 因子满足可积性条件方程组 (2.4.4.106、107、112) 式，则在任意一点 $\boldsymbol{u}^0 \in D$，必有 $\boldsymbol{u}^0$ 的一个邻域 $U \subset D$，以及在 R^m 空间 $(m = n+z)$ 中定义在 U 上的一个正则参数曲面片 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) \quad \boldsymbol{u} \in U \quad \boldsymbol{r} \in R^m$，使 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的第一、二基本形式分别就是 $\mathrm{d}s^2$、φ_2，并且，在 R^m 中任意两块满足以上条件的曲面片必定能够在 R^m 中的一个刚体运动下彼此重合.

■

证明：此定理中的唯一性结论已由定理 2.4.4.9 给出. 这里只需证明曲面的存在性.

用 Γ_{ij}^k、C_{ij}^h 和 b_i^{hp} 因子，构造以下一阶线性齐次偏微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} = \dot{\boldsymbol{r}}_i \\ \dfrac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_j}{\partial u_i} = \sum\limits_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^k \dot{\boldsymbol{r}}_k + \sum\limits_{h=1}^{z} C_{ij}^h \boldsymbol{n}_h & \begin{matrix} i, j = 1, \cdots, n \\ p = 1, \cdots, z \end{matrix} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{n}_p}{\partial u_i} = \sum\limits_{k=1}^{n} D_{ik}^p \dot{\boldsymbol{r}}_k + \sum\limits_{s=1}^{z} b_i^{ps}\boldsymbol{n}_s \end{cases} \quad \text{—(2.4.4.164)}$$

将(2.4.4.164)式中的 $\boldsymbol{r}$、$\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 和 $\boldsymbol{n}_p$ 都看成是 $m=n+z$ 维向量形式的未知函数，则(2.4.4.164)式方程组的可积性条件(见定理 2.4.4.8)就是(2.4.4.106、107、112)式方程组. 所以，在定理给出的条件下，(2.4.4.164)式方程组可积. 从而，对于任意的 $\boldsymbol{u}^0\in D$，以及任意给定的初始值

$$\boldsymbol{r}^0 \quad \dot{\boldsymbol{r}}_j^0 \quad \boldsymbol{n}_p^0$$

必有 $\boldsymbol{u}^0$ 的邻域 $U\subset D$，存在函数组

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) \\ \dot{\boldsymbol{r}}_j=\dot{\boldsymbol{r}}_j(\boldsymbol{u}) \quad j=1,\cdots,n \quad p=1,\cdots,z \quad \boldsymbol{u}\in U \\ \boldsymbol{n}_p=\boldsymbol{n}_p(\boldsymbol{u})\end{cases} \qquad \text{—(2.4.4.165)}$$

且 $\boldsymbol{r}$、$\dot{\boldsymbol{r}}_j$、$\boldsymbol{n}_p$ 满足(2.4.4.164)式，并且满足

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}^0)=\boldsymbol{r}^0 \quad \dot{\boldsymbol{r}}_j(\boldsymbol{u}^0)=\dot{\boldsymbol{r}}_j^0 \quad \boldsymbol{n}_p(\boldsymbol{u}^0)=\boldsymbol{n}_p^0$$

取初值条件满足以下关系

$$[\dot{\boldsymbol{r}}_1^0,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_n^0;\boldsymbol{n}_1^0,\cdots,\boldsymbol{n}_z^0]^{\mathrm{T}}[\dot{\boldsymbol{r}}_1^0,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_n^0;\boldsymbol{n}_1^0,\cdots,\boldsymbol{n}_z^0]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}(\boldsymbol{u}^0) & 0 \\ 0 & I_z\end{bmatrix}$$

I_z—z 阶单位矩阵. (2.4.4.166)

以及行列式

$$|\dot{\boldsymbol{r}}_1^0,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_n^0;\boldsymbol{n}_1^0,\cdots,\boldsymbol{n}_z^0|>0 \qquad \text{—(2.4.4.167)}$$

再构造以下函数组

$$\begin{cases}f_{ab}^{rr}(\boldsymbol{u})=\dot{\boldsymbol{r}}_a^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})\dot{\boldsymbol{r}}_b(\boldsymbol{u})-g_{ab}(\boldsymbol{u}) \\ f_{cd}^{rn}(\boldsymbol{u})=\dot{\boldsymbol{r}}_c^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}_d(\boldsymbol{u}) & a、b、c=1,\cdots,n \\ f_{ee}^{nn}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{n}_e^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}_e(\boldsymbol{u})-1 & d、e、f=1,\cdots,z \\ f_{ef}^{nn}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{n}_e^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}_f(\boldsymbol{u}) & (e\neq f)\end{cases} \qquad \text{—(2.4.4.168)}$$

根据(2.4.4.166)式，有初值条件

$$f_{ab}^{rr}(\boldsymbol{u}^0)=f_{cd}^{rn}(\boldsymbol{u}^0)=f_{ef}^{nn}(\boldsymbol{u}^0)=0 \qquad (\forall a,b,c,d,e,f)$$

对 f_{ab}^{rr}、f_{cd}^{rn} 和 f_{ee}^{nn}、f_{ef}^{nn} 求关于 u_i 的偏导数，就又得到(2.4.4.160)式方程组. 所以，在以上的初值条件下，必有

$$f_{ab}^{rr}(\boldsymbol{u})=f_{cd}^{rn}(\boldsymbol{u})=f_{ef}^{nn}(\boldsymbol{u})=0 \quad (\forall a,b,c,d,e,f)$$

因此成立

$$[\dot{\boldsymbol{r}}_1(\boldsymbol{u}),\ \cdots,\ \dot{\boldsymbol{r}}_n(\boldsymbol{u});\ \boldsymbol{n}_1(\boldsymbol{u}),\ \cdots,\ \boldsymbol{n}_z(\boldsymbol{u})]^{\mathrm{T}}[\dot{\boldsymbol{r}}_1(\boldsymbol{u}),\ \cdots,\ \dot{\boldsymbol{r}}_n(\boldsymbol{u});\ \boldsymbol{n}_1(\boldsymbol{u}),\ \cdots,\ \boldsymbol{n}_z(\boldsymbol{u})]$$
$$=\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}(\boldsymbol{u}) & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix}$$

由$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{u})$的正定性，即知 $\dot{\boldsymbol{r}}_i(\boldsymbol{u})$、$\boldsymbol{n}_j(\boldsymbol{u})$，$i=1,\ \cdots,\ n$，$j=1,\ \cdots,\ z$ 向量组是线性无关的，并可知是右手性的. 所以，$\boldsymbol{n}_j(\boldsymbol{u})$向量组是 $\dot{\boldsymbol{r}}_i(\boldsymbol{u})$向量组张成的子空间的法空间的一个基向量组.

由于函数 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$满足(2.4.4.164)式中的第一式，故把 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$看成是 R^m 空间中的一个 n 维曲面片，则 $\dot{\boldsymbol{r}}_i(\boldsymbol{u})$就是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的切空间基向量组. 因为 $\dot{\boldsymbol{r}}_i(\boldsymbol{u})$是线性无关的，故 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$是正则的曲面片，而 $\boldsymbol{n}_j(\boldsymbol{u})$就是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的法空间基向量组，从而 $\mathrm{d}s^2$、φ_2 分别是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的第一、二基本微分形式.

证毕.

由于在 R^m 空间上的 n 维曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$上，由$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$的列向量组实施的多重矢量积的结果不是唯一的，所以，在定理 2.4.4.10 中，仅给出$\boldsymbol{I}$、$\boldsymbol{II}^h$　$h=1,\ \cdots,\ z$ 矩阵仍无法构造出 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$函数，还必须给出全部的 b_i^{hp} 因子，才能在 $n<m-1$ 时列出(2.4.4.164)式这样的方程组，并在各系数因子满足可积性条件方程组的条件下积出 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$函数. 当 $n=m-1$ 时，$z=1$，故 $b_i^{11}\equiv 0$，从而这个条件就自动消失了，定理 2.4.4.10 就成为关于 R^m 空间上的 $m-1$ 维曲面的存在性定理.

注意，在 R^m 空间的 n 维曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$且 $(n<m-1)$ 上的法空间基向量组如果规定为前面所给出的 N_i 极值规划决定的极值主法方向向量组 $\boldsymbol{n}_i^*$，$i=1,\ \cdots,\ z$，那么，$\boldsymbol{n}_i^*$ 是唯一的(如果各 $\boldsymbol{n}_i^*$ 是 N_i 极值规划的严格(局部)极大值解). 而如果 $\boldsymbol{n}_i$ 仅是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的法空间中任取的单位正交基向量组，那么，设 $\boldsymbol{n}_i^1$、$\boldsymbol{n}_i^2$，$i=1,\ \cdots,\ z$ 是这样任取的两组单位正交基向量组，则必有 $z\times z$ 阶过渡矩阵 $Q=[q_{ij}]$，使

$$N^2=N^1Q \qquad N^i=[\boldsymbol{n}_1^i,\ \cdots,\ \boldsymbol{n}_z^i] \quad i=1,\ 2$$

显然 Q 是正交矩阵，$Q=[q_{ij}]$.

记 $\boldsymbol{n}_i^1$、$\boldsymbol{n}_i^2$ 决定的可积性条件方程组中的 b_i^{hp}、D_{ik}^h 因子是

$$(b_i^{hp})^1 \quad (b_i^{hp})^2;\ (D_{ik}^h)^1 \quad (D_{ik}^h)^2$$

则由

$$\boldsymbol{n}_s^2=\sum_{j=1}^{z}\boldsymbol{n}_j^1 q_{js} \qquad \text{—(2.4.4.169)}$$

有

$$(b_i^{hs})^2\boldsymbol{n}_s^2=\sum_{j=1}^{z}(b_i^{hs})^2 q_{js}\boldsymbol{n}_j^1 \qquad \text{—(2.4.4.170)}$$

因此，标架方程式(2.4.4.95)式对于 $\boldsymbol{n}_j^2$ 基向量组是

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}_h^2}{\partial u_i} = \sum_{k=1}^{n} (D_{ik}^h)^2 \dot{\boldsymbol{r}}_k + \sum_{s=1}^{z} (b_i^{hs})^2 \boldsymbol{n}_s^2 \qquad \text{—(2.4.4.171)}$$

由(2.4.4.169)式

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}_h^2}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{z} \frac{\partial q_{jh}}{\partial u_i} \boldsymbol{n}_j^1 + \sum_{j=1}^{z} q_{jh} \frac{\partial \boldsymbol{n}_j^1}{\partial u_i}$$

由

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}_j^1}{\partial u_i} = \sum_{k=1}^{n} (D_{ik}^j)^1 \dot{\boldsymbol{r}}_k + \sum_{s=1}^{z} (b_i^{js})^1 \boldsymbol{n}_s^1$$

可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{n}_h^2}{\partial u_i} &= \sum_{j=1}^{z} \frac{\partial q_{jh}}{\partial u_i} \boldsymbol{n}_j^1 + \sum_{j=1}^{z} q_{jh} \Big(\sum_{k=1}^{n} (D_{ik}^j)^1 \dot{\boldsymbol{r}}_k + \sum_{s=1}^{z} (b_i^{js})^1 \boldsymbol{n}_s^1 \Big) \\ &= \sum_{j=1}^{z} \frac{\partial q_{jh}}{\partial u_i} \boldsymbol{n}_j^1 + \sum_{j,k=1} (D_{ik}^j)^1 q_{jh} \dot{\boldsymbol{r}}_k + \sum_{j,s=1}^{z} (b_i^{js})^1 q_{jh} \boldsymbol{n}_s^1\end{aligned}$$

将此结果代入(2.4.4.171)式，并将 $\boldsymbol{n}_s^2$ 用(2.4.4.169)式代替，有

$$\sum_{j=1}^{z} \frac{\partial q_{jh}}{\partial u_i} \boldsymbol{n}_j^1 + \sum_{j,k=1}^{z} (D_{ik}^j)^1 q_{jh} \dot{\boldsymbol{r}}_k + \sum_{j,s=1}^{z} (b_i^{js})^1 q_{jh} \boldsymbol{n}_s^1 = \sum_{k=1}^{n} (D_{ik}^h)^2 \dot{\boldsymbol{r}}_k + \sum_{s,j=1}^{z} (b_i^{hs})^2 q_{js} \boldsymbol{n}_j^1$$

用 $(\boldsymbol{n}_p^1)^{\mathrm{T}}$ 分别左乘上式的两边，由 $\boldsymbol{n}_i^1$ 的正交归一性质，有

$$\frac{\partial q_{ph}}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^{z} (b_i^{jp})^1 q_{jh} = \sum_{s=1}^{z} (b_i^{hs})^2 q_{ps}$$

注意到 $b_i^{pj} = -b_i^{jp}$ 的负对称性，上式可表为

$$\frac{\partial q_{ph}}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{z} [(b_i^{pj})^1 q_{jh} + (b_i^{hj})^2 q_{pj}] \quad \begin{cases} i = 1, \cdots, n \\ p, h = 1, \cdots, z \\ z = m - n \end{cases} \qquad \text{—(2.4.4.172)}$$

(2.4.4.172)式即是 $(b_i^{pj})^1$、$(b_i^{hj})^2$ 和变换矩阵 Q 的元素 q_{ph} 必须满足的关系. 当 $(b_i^{pj})^k$ $k = 1, 2$ 因子满足可积性条件时，则(2.4.4.172)式给出的变换矩阵 Q 也就一定可以满足可积性条件.

§2.4.5 其他形式的曲面函数决定的第一、第二基本形式

R^m 空间上的任一个正则曲面，局部地都可以用三种形式的函数给出：

一般形式： $f(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$

Monge 形式：$z = f(\hat{\boldsymbol{x}}) \quad \hat{\boldsymbol{x}} \in D_{\hat{x}} \subset R^{m-1} \quad z \in R$

参数形式： $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) \quad \boldsymbol{u}\in D_u\subset R^{m-1} \quad \boldsymbol{r}\in R^m$

其中的 D 均为开集. 参数形式的曲面函数也可称之为矢量形式的曲面函数.

由于曲面是正则的，故

$$\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|\neq 0$$

可以任选 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\neq 0$ 的下标 i，由隐函数定理，一般形式的曲面函数总能局部地表示成以下 Monge 形式的曲面函数

$$x_i=\widetilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) \quad \hat{\boldsymbol{x}}=(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}\in D_{\hat{x}}\subset R^{m-1}$$

而任一 Monge 形式的曲面函数又总能看成是

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{m-1}\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_{m-1}\\f(\boldsymbol{u})\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u}\in D_u\subset R^{m-1}$$

形式的参数曲面函数. 所以，通过 Monge 形式为中介，这三种曲面函数在形式上可以互相转换.

本节以下主要分析一般形式和 Monge 形式的曲面函数所对应的第一、二基本形式，以及以上三种曲面函数形式(按不同方法)所得到的曲面定向及弯曲方向之间的相互关系.

对于一般形式的曲面函数来讲，由于$\nabla f(\boldsymbol{x})$梯度向量的几何意义就是曲面的法向量，故直接由(1.2.11)式

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}=\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \qquad —(1.2.11)$$

就可以得到单位法向量. 对于 Monge 形式的曲面函数有类似的(1.2.12)式. 这是最简便的方法. 但在许多场合，仍需利用将一般曲面函数通过 Monge 形式转换成参数函数的方式，从而仍会遇到如何确定单位法向量的问题.

为此，以下先说明一般形式的曲面函数转换成 Monge 形式时，相应的定义域的确定方式.

设对 $\boldsymbol{x}\in D\subset R^m \quad f(\boldsymbol{x})=0$ 是二阶以上可微的函数. 由隐函数定理，在 $\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|\neq 0 \quad \boldsymbol{x}\in D$，可设对任选的 $\boldsymbol{x}^0\in D$，

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_m}\neq 0$$

则在 $\boldsymbol{x}^0$ 的某个区域(开集) $V(\boldsymbol{x}^0) \subset D$, 有函数

$$x_m = \tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) \quad \hat{\boldsymbol{x}} \in R^{m-1} \quad (\text{设 } R^{m-1} = \forall (x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}))$$

$\tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}})$ 可微,且在 $\boldsymbol{x} \in V(\boldsymbol{x}^0)$ 区域上是唯一的, $V(\boldsymbol{x}^0) \subset D$, 特别地, $\boldsymbol{x}^0 \in V(\boldsymbol{x}^0)$.

隐函数定理特别指明了, $V(\boldsymbol{x}^0)$ 只能是 R^m 空间上的单连通集合,且 V 可以是由 m 个开区间 $x_i \in (M_i^-, M_i^+)$ 的直积构造的集合. 由此即知以下两点:

(1) $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_m}$ 在 $\boldsymbol{x} \in V(\boldsymbol{x}^0)$ 上是不为 0 的. 故 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_m}$ 在 $\boldsymbol{x} \in V(\boldsymbol{x}^0)$ 上应保持其符号不变.

(2) 对于 $\boldsymbol{x} \in V(\boldsymbol{x}^0)$, 总有 $\hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{D} = V(\boldsymbol{x}^0) \cap R^{m-1}$, 并在 $\hat{D}$ 上存在可微映射 $\tilde{f}: \hat{D} \to R$, 使 $x_m = \tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}})$.

为更具体地描述出 $V(\boldsymbol{x}^0)$、$\hat{D}$ 集合,先利用以上结论,建立以下推论.

推论 2.4.5.1 设 $f(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$ 是二阶(以上)可微函数, D 是 R^m 中的单连通开区域,若有 $\boldsymbol{x}^0 \in D$, $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_m} \neq 0$, 不妨设 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_m} > 0$, 则集合

$$V = \left\{ \boldsymbol{x} \,\middle|\, \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_m} > 0 \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m \right\} \qquad \text{—(2.4.5.1)}$$

一定是(非空)开集[1]. ■

证明: 因为 $\boldsymbol{x}^0 \in V$ 故 V 非空. 对任一 $\boldsymbol{x} \in V$, 记 $N_\delta(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的邻域,

$$N_\delta(\boldsymbol{x}) = \{ \boldsymbol{x}' \mid \| \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x} \| < \delta \quad \delta > 0 \quad \boldsymbol{x}' \in R^m \quad \delta \in R \}$$

则对充分小的正数 $\delta > 0$, 必定要有

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}')}{\partial x_m} > 0 \qquad \forall \boldsymbol{x}' \in N_\delta(\boldsymbol{x})$$

若否,则对任意小的正数 $\dfrac{1}{n} \quad n > 0$, 都有(至少一个) $\boldsymbol{x}^{(n)} \in N_{\frac{1}{n}}(\boldsymbol{x})$ 且成立

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^{(n)})}{\partial x_m} \leqslant 0$$

并可知

---

[1] 应注意,对于具体的曲面, $\dfrac{\partial f}{\partial x_m} \neq 0$ 不一定意味着总能取到 $\dfrac{\partial f}{\partial x_m} > 0$ 也总能取到 $\dfrac{\partial f}{\partial x_m} < 0$ 的点,即也可能只能取到 $\dfrac{\partial f}{\partial x_m} > 0$ 的点(或相反).

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}^{(n)} \to \boldsymbol{x}$$

由连续性定义，必有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^{(n)})}{\partial x_m} \to \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_m} \Rightarrow \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_m} \leqslant 0$$

故与 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_m} > 0$ 矛盾.

由此即知，对任一 $\boldsymbol{x} \in V$，都可以取到充分小的 $\delta > 0$，使

$$N_\delta(\boldsymbol{x}) \subset V$$

所以，V 是开集.

类似以上的证明，在推论 2.4.5.1 的条件下，若还成立以下条件，即有 $\boldsymbol{x}^1 \in D$，使 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^1)}{\partial x_m} = 0$，则容易得到下列推论.

推论 2.4.5.2 设 $V \neq \varnothing$，且有 $\boldsymbol{x}^1 \in D$，$\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^1)}{\partial x_m} = 0$，则

$$\overline{V} = \left\{ \boldsymbol{x} \left| \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_m} \geqslant 0 \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m \right. \right\} \qquad —(2.4.5.2)$$

是闭集，且

$$\partial V = \overline{V} - V = \left\{ \boldsymbol{x} \left| \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_m} = 0 \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m \right. \right\} \qquad —(2.4.5.3)$$

∂V 是 $\overline{V}$ 的边界点集. ■

以上推论 2.4.5.2 中的条件，即有 $\boldsymbol{x}^1 \in D$，$\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^1)}{\partial x_m} = 0$ 成立不能省略，否则，如对所有的 $\boldsymbol{x} \in D$，$\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_m} > 0$，则易知 $D = V = \overline{V}$，且 D 必是开集，故 $\overline{V}$ 必是开集.

附带可知，在推论 2.4.5.1～2 的条件成立时，若 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_m}$ 在 D 上可取到极大值，设 $\boldsymbol{x}_M$ 是使 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_m}$ 取严格极大值的点 $\boldsymbol{x}_M \in D$，则 $\boldsymbol{x}_M$ 必是 $\overline{V}$ 的内点.

注意，这样按(2.4.5.1)式所构建起来的集合 V 不一定是连通集合. 但仍由隐函数定理，还可以得到以下推论.

推论 2.4.5.3 设 $V \neq \varnothing$，对任一 $\boldsymbol{x}^0 \in V$，总可以取到连通的开集 $V(\boldsymbol{x}^0) \subseteq V$，$\boldsymbol{x}^0 \in V(\boldsymbol{x}^0)$，且在 $\boldsymbol{x} \in V(\boldsymbol{x}^0)$ 上，有唯一的可微函数 $\tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}})$，$\hat{\boldsymbol{x}} \in V(\boldsymbol{x}^0) \cap$

R^{m-1}，使

$$x_m = \tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}})$$

■

证明： 由隐函数定理，因为 $\boldsymbol{x}^0 \in V$，故一定存在 $\boldsymbol{x}^0$ 的一个邻域 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0)$，且在 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0)$ 邻域上，有唯一的函数 $\tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}})$，使

$$x_m = \tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) \quad \hat{\boldsymbol{x}} \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap R^{m-1}$$

且易知，总成立对于任一 $\boldsymbol{x} \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \Rightarrow \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_m} > 0$，所以

$$N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \subset V$$

并且 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0)$ 显然是单连通开区域，取 $V(\boldsymbol{x}^0) = N_\delta(\boldsymbol{x}^0)$，即知，连通开集 $V(\boldsymbol{x}^0) \subseteq V$，$\boldsymbol{x}^0 \in V(\boldsymbol{x}^0)$ 总可以取到.

再设 $\boldsymbol{x}^0 \in V(\boldsymbol{x}^0) \subseteq V$ 是 V 中的任一个连通开子集，下证函数

$$x_m = \tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) \quad (\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}, x_m)^{\mathrm{T}} \in V(\boldsymbol{x}^0)$$

是唯一的. 由 R^m 空间上连通集的性质[1]，对任意的 $\boldsymbol{x}^1$、$\boldsymbol{x}^2 \in V(\boldsymbol{x}^0)$，则一定可以用一条由有限条直线段连成的折线 l 连接 $\boldsymbol{x}^1$，$\boldsymbol{x}^2$，且连接 $\boldsymbol{x}^1$、$\boldsymbol{x}^2$ 的折线 $l(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2) \subset V(\boldsymbol{x}^0)$.

由于 $\boldsymbol{x}^0 \in V(\boldsymbol{x}^0)$，则任取 $\boldsymbol{x}^1 \in V(\boldsymbol{x}^0)$，$\boldsymbol{x}^1 \neq \boldsymbol{x}^0$，从隐函数定理中已知在 $\boldsymbol{x}^0$、$\boldsymbol{x}^1$ 点处，存在对应的邻域 $N_{\delta_0}(\boldsymbol{x}^0)$、$N_{\delta_1}(\boldsymbol{x}^1)$，且在 $N_{\delta_0}(\boldsymbol{x}^0)$、$N_{\delta_1}(\boldsymbol{x}^1)$ 上，有唯一的 $\tilde{f}^0$、$\tilde{f}^1$ 函数，使

$$x_m^0 = \tilde{f}^0(\hat{\boldsymbol{x}}^0),\ ((\hat{\boldsymbol{x}}^0)^{\mathrm{T}}, x_m^0)^{\mathrm{T}} \in N_{\delta_0}(\boldsymbol{x}^0) \subset V(\boldsymbol{x}^0)$$

$$x_m^1 = \tilde{f}^1(\hat{\boldsymbol{x}}^1),\ ((\hat{\boldsymbol{x}}^1)^{\mathrm{T}}, x_m^1)^{\mathrm{T}} \in N_{\delta_1}(\boldsymbol{x}^1) \subset V(\boldsymbol{x}^0)$$

以下证必有 $\tilde{f}^0 = \tilde{f}^1$. 设 $N_{\delta_0}(\boldsymbol{x}^0) \cap N_{\delta_1}(\boldsymbol{x}^1) = \varnothing$，否则，任取

$$\boldsymbol{x}^2 \in N_{\delta_0}(\boldsymbol{x}^0) \cap N_{\delta_1}(\boldsymbol{x}^1)$$

则由隐函数定理，有 $\boldsymbol{x}^2$ 的邻域 $N_{\delta_2}(\boldsymbol{x}^2) \subseteq N_{\delta_0}(\boldsymbol{x}^0) \cap N_{\delta_1}(\boldsymbol{x}^1)$，$\delta_2 > 0$ 且在 $\boldsymbol{x} \in N_{\delta_2}(\boldsymbol{x}^2)$ 上，有唯一的函数 $\tilde{f}^2$，使

$$x_m^2 = \tilde{f}^2(\hat{\boldsymbol{x}}^2) \quad ((\hat{\boldsymbol{x}}^2)^{\mathrm{T}}, x_m^2)^{\mathrm{T}} \in N_{\delta_2}(\boldsymbol{x}^2)$$

---

〔1〕 见本书§6.3.2节.

成立，且由 $N_{\delta_2}(\boldsymbol{x}^2) \subseteq N_{\delta_0}(\boldsymbol{x}^0)$，$N_{\delta_2}(\boldsymbol{x}^2) \subseteq N_{\delta_1}(\boldsymbol{x}^1)$，即知，总有

$$\tilde{f}^0 = \tilde{f}^2 = \tilde{f}^1$$

成立.

而在 $N_{\delta_0}(\boldsymbol{x}^0) \cap N_{\delta_1}(\boldsymbol{x}^1) = \varnothing$ 时，由 $V(\boldsymbol{x}^0)$ 的弧连通性质，有连接 $\boldsymbol{x}^0$、$\boldsymbol{x}^1$ 的一条折线 $l(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1) \subset V(\boldsymbol{x}^0)$ 存在，且组成折线的有限条直线段的总长距离 $|l(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1)| < +\infty$. 故可在 l 上取到以下的点，

$$\boldsymbol{x}^2 = (cl\, N_{\delta_0}(\boldsymbol{x}^0)) \cap l(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1) \in V(\boldsymbol{x}^0)$$

这里"cl"是取闭包运算. 显然，有

$$\| \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}^0 \| = \delta_0 > 0$$

所以，l 折线上的直线段度量的距离 $|l(\boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^0)| > 0$，

$$|l(\boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^1)| = |l(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1)| - |l(\boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^0)| < |l(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1)|$$

对于 $\boldsymbol{x}^2$ 点，又可取到 $\boldsymbol{x}^2$ 的开邻域 $N_{\delta_2}(\boldsymbol{x}^2) \subset V(\boldsymbol{x}^0)$，且在 $N_{\delta_2}(\boldsymbol{x}^2)$ 上，有唯一的函数 $\tilde{f}^2$，使

$$x_m^2 = \tilde{f}^2(\hat{\boldsymbol{x}}^2) \quad ((\hat{\boldsymbol{x}}^2)^{\mathrm{T}}, x_m^2)^{\mathrm{T}} \in N_{\delta_2}(\boldsymbol{x}^2)$$

但由于 $\boldsymbol{x}^2$ 的取法及 $N_{\delta_0}(\boldsymbol{x}^0)$ 是 R^m 空间的单连通开区域，则

$$N_{\delta_2}(\boldsymbol{x}^2) \cap N_{\delta_0}(\boldsymbol{x}^0) \neq \varnothing$$

由此即知

$$\tilde{f}^0 = \tilde{f}^2$$

设 $N_{\delta_2}(\boldsymbol{x}^2) \cap N_{\delta_1}(\boldsymbol{x}^1) = \varnothing$，否则即可知必有 $\tilde{f}^0 = \tilde{f}^2 = \tilde{f}^1$ 成立，已证结果. 但这样，又总能取到 $\boldsymbol{x}^3$，

$$\boldsymbol{x}^3 = \max |l(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}^0)| \quad \boldsymbol{x}' \in (cl\, N_{\delta_2}(\boldsymbol{x}^2)) \cap l(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1)$$

且

$$\| \boldsymbol{x}^3 - \boldsymbol{x}^2 \| = \delta_2 > 0 \Rightarrow |l(\boldsymbol{x}^3, \boldsymbol{x}^2)| > 0$$

故

$$|l(\boldsymbol{x}^3, \boldsymbol{x}^0)| = |l(\boldsymbol{x}^3, \boldsymbol{x}^2)| + |l(\boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^0)| > |l(\boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^0)|$$

所以，

$$|l(\boldsymbol{x}^3, \boldsymbol{x}^1)| < |l(\boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^1)| < |l(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1)|$$

而对 $\boldsymbol{x}^3$ 又有开邻域 $N_{\delta_3}(\boldsymbol{x}^3) \subset V(\boldsymbol{x}^0)$，$\delta_3 > 0$

$$N_{\delta_3}(\boldsymbol{x}^3) \cap N_{\delta_2}(\boldsymbol{x}^2) \neq \varnothing$$

并由隐函数定理，在 $\boldsymbol{x} \in N_{\delta_3}(\boldsymbol{x}^3)$ 上，有唯一的 $\tilde{f}^3$ 函数，并可知 $\tilde{f}^0 = \tilde{f}^2 = \tilde{f}^3$ 成立.

如此，递推下去，可有 $\boldsymbol{x}^n$，并可推知在 $N_{\delta_n}(\boldsymbol{x}^n) \subset V(\boldsymbol{x}^0)$ 上，有 $\tilde{f}^0 = \tilde{f}^n$ 成立，并且由 $l(\boldsymbol{x}^n, \boldsymbol{x}^1) \subset l(\boldsymbol{x}^{n-1}, \boldsymbol{x}^1)$

$$|\, l(\boldsymbol{x}^n, \boldsymbol{x}^1)\,| < |\, l(\boldsymbol{x}^{n-1}, \boldsymbol{x}^1)\,|$$

的关系，由区间套定理，当 $n \to +\infty$ 时，

$$|\, l(\boldsymbol{x}^n, \boldsymbol{x}^1)\,| \to 0$$

即知开邻域 $N_{\delta_n}(\boldsymbol{x}^n) \cap N_{\delta_1}(\boldsymbol{x}^1) \neq \varnothing \quad \delta_n > 0$，当 $n \to +\infty$，由此即知必有 $\tilde{f}^0 = \tilde{f}^1$ 成立.

由于这里 $\boldsymbol{x}^1$ 是任选的 $V(\boldsymbol{x}^0)$ 中的元素，故得证.

由于 $\boldsymbol{x}^0$ 实际上也可以是指 $V(\boldsymbol{x}^0)$ 中的任一个元素，故只要 $V(\boldsymbol{x}^0)$ 是 V 中的连通开集，则在 $\boldsymbol{x} \in V(\boldsymbol{x}^0)$ 上，函数 $\tilde{f}$ 是唯一的. 那么，显然在 V 中的任一个最大的连通分支开集上，$\tilde{f}$ 也是唯一的. 但在 V 的不同的连通分支开集上，$\tilde{f}$ 可以是不同的.

注意以上所说的“V 的连通分支开集”是指 V 的连通分支集是 R^m 中的开集. 具体地说，关于(2.4.5.1)式决定的集合 V 的构造，可有以下推论.

推论 2.4.5.3a 设 V 是(2.4.5.1)式决定的集合，则

$$V = \bigcup_i V_i \qquad V_i \cap V_j = \varnothing \qquad i \neq j$$

且 $V_i \subset R^m$ 是 R^m 中连通的开集. ■

证明： 由 V 的定义，设 V 不是连通开集，否则 $V = V_1$ 即证. 在 V 中任取 $\boldsymbol{x}_1 \in V \subset R^m$，取 $A_\alpha \subset V$ 是包含 $\boldsymbol{x}_1$ 的任意的连通开集，记 $\{A_\alpha\}$ 是这样的连通开集全体的集族. 因为 V 是开集，故总有 $\delta > 0$ 决定的 $\boldsymbol{x}_1$ 的开邻域 $N_\delta(\boldsymbol{x}_1) \subset V$，从而 $N_\delta(\boldsymbol{x}_1) \subset \{A_\alpha\}$. 所以 $\{A_\alpha\} \neq \varnothing$. 作

$$V_1 = \bigcup_\alpha A_\alpha \quad A_\alpha \subset \{A_\alpha\} \quad V_1 \subset V$$

则 V_1 是连通开集[1]，且 V_1 显然是 V 中包含 $\boldsymbol{x}_1$ 点的连通开集族中的极大的连

---

〔1〕 设 $C_\alpha \subset R^m$ 是一族连通集，且 $\bigcap_\alpha C_\alpha \neq \varnothing$，则 $C = \bigcup_\alpha C_\alpha$ 是连通集.《曲线与曲面的微分几何》同前注第 342 页 命题 14.

通开集.

因为已设 V 是不连通的,故 $V-V_1\neq\varnothing$. 可证 $V-V_1$ 是 R^m 中的开集. 因为 V 是开的,对任取的 $\boldsymbol{y}\in V-V_1$,总有 $\boldsymbol{y}$ 的开邻域

$$N_\delta(\boldsymbol{y})\subset V$$

但可知,不能同时又有 $N_\delta(\boldsymbol{y})\cap V_1\neq\varnothing$. 否则,作

$$\widetilde{V}=N_\delta(\boldsymbol{y})\cup V_1\subset V \text{ 且 } V_1\subset\widetilde{V}$$

即与 V_1 的极大性矛盾. 所以可知, $N_\delta(\boldsymbol{y})\subset V-V_1$,故 $V-V_1$ 是 R^m 中的开集. 对 $V-V_1$ 中任取 $\boldsymbol{x}_2\in V-V_1$,重复以上的步骤,即可构造出 V_2. V_2 也是 V 中包含 $\boldsymbol{x}_2$ 的极大连通开集,且 $V_1\cap V_2=\varnothing$.

如此构造下去,即知 $V=\bigcup_i V_i \quad V_i\cap V_j=\varnothing$, V_i 都是 V 中的极大连通开集. 再记 $\overline{V}_i$ 是 V_i 的闭包,则可知

$$\overline{V}_i\cap V=V_i$$

故 V_i 是 V 中的闭集[1],即 V_i 是 V 的既开又闭的子集. 所以, V_i 是 V 的连通分支集. 这样的 V_i 就是上文所指的 V 的连通分支开集.

设 $V(\boldsymbol{x}^0)$ 是 V 中包含 $\boldsymbol{x}^0$ 点的一个最大的连通开集,令

$$\hat{D}(\boldsymbol{x}^0)=V(\boldsymbol{x}^0)\cap R^{m-1} \qquad —(2.4.5.4)$$

称 $\hat{D}(\boldsymbol{x}^0)$ 就是 $\tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}})$ 的定义域. 故函数

$$x_m=\tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) \quad \hat{\boldsymbol{x}}\in\hat{D}(\boldsymbol{x}^0)\subset R^{m-1}$$

在 $\hat{D}(\boldsymbol{x}^0)$ 上也具有唯一性. 且由于 $\boldsymbol{x}^0$ 是 $\hat{D}(\boldsymbol{x}^0)$ 中的任一元素,故 $\hat{D}(\boldsymbol{x}^0)$ 可简记为 $D_{\hat{x}}$. 显然 $D_{\hat{x}}\subseteq D\cap R^{m-1}$.

这里还可以指出,将推论 2.4.5.1 中的假设 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_m}>0$ 改成 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_m}<0$,以及将 x_m 的下标改成 i,都不影响以上推论的成立.

以下考虑如何得到一般曲面函数的第一、二基本形式. 先给出 Monge 形式的曲面函数的第一、第二基本形式.

设

$$z=f(\hat{\boldsymbol{x}}) \quad \hat{\boldsymbol{x}}\in D_{\hat{x}}\subset R^{m-1} \quad z\in R$$

是 R^m 空间中的曲面函数. 由上文指出的,将其看成是

---

[1] 参见《实函数论》,陈建功,科学出版社 1957 年,第 83 页.

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ f(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u} \in D_{\hat{x}} \subset R^{m-1} \quad \boldsymbol{r} \in R^m \qquad \text{—(2.4.5.5)}$$

参数形式的曲面函数，则由上一节的分析，直接可得第一基本形式是

$$ds^2 = d\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} d\boldsymbol{u}$$

这里

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \Lambda_F = \begin{bmatrix} I_{m-1} \\ \nabla f^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{x}}) \end{bmatrix} \qquad \text{—(2.4.5.6)}$$

而 Λ_F 就是(2.2.3.15)式给出的基础解系矩阵. 所以 Monge 形式曲面函数的第一基本二次型矩阵是

$$\boldsymbol{I} = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \Lambda_F^{\mathrm{T}} \Lambda_F = I_{m-1} + \nabla f(\hat{\boldsymbol{x}}) \cdot \nabla f^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{x}}) \qquad \text{—(2.4.5.7)}$$

为得到 Monge 形式曲面函数的第二基本形式，先要确定曲面的定向. 以上已指出，利用将 Monge 形式的曲面函数看成是

$$f(\hat{\boldsymbol{x}}) - z = 0 \qquad \text{—(1.2.2a)}$$

或

$$z - f(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0 \qquad \text{—(1.2.2b)}$$

形式的一般函数，再由(1.2.12)式，曲面的单位法向量

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}_F = \pm \frac{(\nabla f^{\mathrm{T}}, -1)^{\mathrm{T}}}{\| 1 + \nabla f^{\mathrm{T}} \cdot \nabla f \|}$$

便可确定. 但 $\widetilde{\boldsymbol{N}}_F$ 存在符号选择问题，这个问题即涉及不同的曲面函数形式与不同的构造单位法向量的方法之间，关于曲面弯曲方向的表述上的一致性问题. 这一问题会在以下分析中逐步给予说明，这里先指出以下一点，即若按多重矢量积方法，则所确定的 Monge 形式曲面函数的单位法向量是

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}_F = -\frac{(\nabla f^{\mathrm{T}}, -1)^{\mathrm{T}}}{\| 1 + \nabla f^{\mathrm{T}} \cdot \nabla f \|} = \frac{(-\nabla f^{\mathrm{T}}, 1)^{\mathrm{T}}}{\| 1 + \nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f \|} \qquad \text{—(2.4.5.8)}$$

即是取

$$z - f(\overset{\wedge}{\boldsymbol{x}}) = 0 \qquad —(1.2.2b)$$

形式的一般曲面函数的梯度向量所决定的曲面定向. 为什么要这样做,理由下面予以说明.

由多重矢量积方法,Monge 形式曲面函数的法向量是 Λ_F 矩阵列空间的正交向量 $\boldsymbol{N}_r$, $\boldsymbol{N}_r$ 的分量 N_r^i 是

$$[\Lambda_F, \boldsymbol{b}]$$

矩阵的第 m 列元素的代数余子式. 所以

$$N_r^i = (-1)^{m+1} \cdot (-1)^{(m-1)+1} \frac{\partial f(\overset{\wedge}{\boldsymbol{x}})}{\partial x_i} = -\frac{\partial f(\overset{\wedge}{\boldsymbol{x}})}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \cdots, m-1$$

$$N_r^m = (-1)^{m+m} \mid I_{m-1} \mid = 1$$

$$\boldsymbol{N}_r = (-\nabla f^{\mathrm{T}}(\overset{\wedge}{\boldsymbol{x}}), 1)^{\mathrm{T}}$$

从而得到(2.4.5.8)式.

则由(2.4.5.6)式,并注意 $u_i = x_i$, $i = 1, 2, \cdots, m-1$,

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_k \partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial \Lambda_F}{\partial u_k} = \begin{bmatrix} 0_{m-1} \\ \dfrac{\partial \nabla f^{\mathrm{T}}(\overset{\wedge}{\boldsymbol{x}})}{\partial u_k} \end{bmatrix} \quad (0_{m-1} \text{ 是}(m-1)\times(m-1) \text{ 阶 } 0 \text{ 矩阵})$$

$$\frac{\partial \nabla f^{\mathrm{T}}(\overset{\wedge}{\boldsymbol{x}})}{\partial u_k} = \left(\frac{\partial^2 f(\overset{\wedge}{\boldsymbol{x}})}{\partial x_k \partial x_1}, \frac{\partial^2 f(\overset{\wedge}{\boldsymbol{x}})}{\partial x_k \partial x_2}, \cdots, \frac{\partial^2 f(\overset{\wedge}{\boldsymbol{x}})}{\partial x_k \partial x_{m-1}}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_k \partial \boldsymbol{u}} \widetilde{\boldsymbol{N}}_F = \frac{\dfrac{\partial \nabla f(\overset{\wedge}{\boldsymbol{x}})}{\partial u_k}}{\| 1 + \nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f \|}$$

所以,Monge 形式的第二基本二次型矩阵是

$$\boldsymbol{I\!I} = \frac{\left[\dfrac{\partial \nabla f(\overset{\wedge}{\boldsymbol{x}})}{\partial u_1}, \dfrac{\partial \nabla f(\overset{\wedge}{\boldsymbol{x}})}{\partial u_2}, \cdots, \dfrac{\partial \nabla f(\overset{\wedge}{\boldsymbol{x}})}{\partial u_{m-1}}\right]}{\| 1 + \nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f \|} = \frac{\nabla^2 f(\overset{\wedge}{\boldsymbol{x}})}{\| 1 + \nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f \|} \qquad —(2.4.5.9)$$

其第一、二基本形式是

$$\begin{cases} \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \Lambda_F^{\mathrm{T}} \Lambda_F \mathrm{d}\boldsymbol{u} \\ \varphi_2 = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(\overset{\wedge}{\boldsymbol{x}}) \mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\| 1 + \nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f \|} \end{cases} \qquad —(2.4.5.10)$$

注意，(2.4.5.9)式的定向是由(2.4.5.8)式给出的.

由于Λ_F矩阵的几何意义在一般形式的曲面函数情形，就等同于(2.2.1.2)式给出的基础解系矩阵Λ，所以，直接得到一般形式的曲面函数时的第一基本二次型矩阵可表示成

$$\boldsymbol{I} = \Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda = I_{m-1} + \left[\frac{f_i f_j}{f_m^2}\right] \quad i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1 \qquad —(2.4.5.11)$$

其中
$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

由(2.2.1.2)式，据Λ矩阵的构造，其意义也可以理解为，令$z = x_m$，且$\dfrac{\partial f}{\partial x_m} \neq 0$，从$f(\boldsymbol{x}) = 0$中可得到

$$z = \tilde{f}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{m-1}) = \tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) \quad \hat{\boldsymbol{x}} \in D_{\hat{f}} \subset R^{m-1} \qquad —(2.4.5.12)$$

并且

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_m}} \quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1 \qquad —(2.4.5.13)$$

则

$$\Lambda_F = \begin{bmatrix} I_{m-1} \\ \nabla z^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \Lambda$$

且

$$\nabla z \cdot \nabla z^{\mathrm{T}} = \left[\frac{f_i f_j}{f_m^2}\right]$$

故(2.4.5.11)式构造一般形式的曲面函数的第一基本二次型矩阵时，实际上隐含地将其转换成了 Monge 形式.

这样，对(2.4.5.13)式等号两边再求$\dfrac{\partial}{\partial x_i}$，$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$的偏导数，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_j}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial f}{\partial x_m} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_m}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\dfrac{\partial f}{\partial x_m} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right)^3}$$

—(2.4.5.14)

上式也可以写成行列式形式，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_m} & \dfrac{\partial f}{\partial x_j} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_m} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i} & \dfrac{\partial f}{\partial x_m} & 0 \end{vmatrix}}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right)^3} \quad \text{—(2.4.5.15)}$$

从而得到(2.4.5.12)式的$\tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}})$的 Hessian 矩阵

$$H_{\tilde{f}} = \nabla^2 \tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \left[\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j}\right] \quad i, j = 1, 2, \cdots, m-1 \quad \text{—(2.4.5.16)}$$

由(2.4.5.9)式，可得一般形式的曲面函数的第二基本二次型矩阵

$$\boldsymbol{I\!I} = \frac{\nabla^2 \tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}})}{\| \nabla f(\boldsymbol{x}) \|} \cdot \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_m} \quad \text{—(2.4.5.17)}$$

这里$\nabla f(\boldsymbol{x})$是 $f(\boldsymbol{x})$的梯度向量.

则一般形式的曲面函数的第一、二基形式可表示成

$$\begin{cases} \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \Lambda^{\mathrm{T}} \Lambda \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}} \\ \varphi_2 = \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \dfrac{\nabla^2 \tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}})}{\| \nabla f(\boldsymbol{x}) \|} \cdot \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_m} \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}} \end{cases} \quad \text{—(2.4.5.18)}$$

由上可见 Monge 形式的曲面函数可承担不同形式的曲面函数相互转换的作用，并且，其第一、二基本形式具有简洁性. 为便于以下分析的需要，这里不加推导，直接给出 Monge 形式的第一、二基本二次型矩阵及 W 映射矩阵的构造关系.

对于形如

$$z = f(\hat{\boldsymbol{x}}) \quad \hat{\boldsymbol{x}} \in D_{\hat{x}} \subset R^{m-1}$$

给出的曲面，记

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

并引用符号

$$\Gamma_k = \sum_{i=1}^{m-1} f_{ki} f_i = \sum_{i=1}^{m-1} \Gamma_{kii} \quad k = 1, 2, \cdots, m-1 \quad \text{—(2.4.5.19)}$$

上式最右边的等式关系可见以下给出的(2.4.5.27)式.

可有[1]

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1+f_1^2 & f_1f_2 & \cdots & f_1f_{m-1}\\ f_2f_1 & 1+f_2^2 & \cdots & f_2f_{m-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{m-1}f_1 & f_{m-1}f_2 & \cdots & 1+f_{m-1}^2\end{bmatrix} \qquad \text{—(2.4.5.20)}$$

$$|\boldsymbol{I}|=1+\sum_{i=1}^{m-1}f_i^2=\|1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f\|^2 \qquad \text{—(2.4.5.21)}$$

$$\boldsymbol{I}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{I}|}\begin{bmatrix}|\boldsymbol{I}|-f_1^2 & -f_1f_2 & \cdots & -f_1f_{m-1}\\ -f_2f_1 & |\boldsymbol{I}|-f_2^2 & \cdots & -f_2f_{m-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -f_{m-1}f_1 & -f_{m-1}f_2 & \cdots & |\boldsymbol{I}|-f_{m-1}^2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{(1+|\boldsymbol{I}|)\,I_{m-1}-\boldsymbol{I}}{|\boldsymbol{I}|} \qquad \text{—(2.4.5.22)}$$

即$\boldsymbol{I}$的伴随矩阵是

$$\boldsymbol{I}^{*}=(1+|\boldsymbol{I}|)\,I_{m-1}-\boldsymbol{I} \qquad \text{—(2.4.5.23)}$$

W 映射矩阵可表示成

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{I\!I}\cdot\boldsymbol{I}^{-1}$$

$$=\frac{1}{|\boldsymbol{I}|^{\frac{1}{2}}}\begin{bmatrix}f_{11}\,|\boldsymbol{I}|-\Gamma_1f_1, & f_{12}\,|\boldsymbol{I}|-\Gamma_1f_2, & \cdots, f_{1(m-1)}\,|\boldsymbol{I}|-\Gamma_1f_{m-1}\\ f_{21}\,|\boldsymbol{I}|-\Gamma_2f_1, & f_{22}\,|\boldsymbol{I}|-\Gamma_2f_2, & \cdots, f_{2(m-1)}\,|\boldsymbol{I}|-\Gamma_2f_{m-1}\\ \cdots, & \cdots, & \cdots, \quad \cdots\\ f_{(m-1)1}\,|\boldsymbol{I}|-\Gamma_{m-1}f_1, & f_{(m-1)2}\,|\boldsymbol{I}|-\Gamma_{m-1}f_2, & \cdots, f_{(m-1)(m-1)}\,|\boldsymbol{I}|-\Gamma_{m-1}f_{m-1}\end{bmatrix} \qquad \text{—(2.4.5.24)}$$

注意(2.4.5.20～24)式只适用于 Monge 形式的曲面函数.

Monge 形式的曲面函数具有以下特殊性质,即若给出的曲面第一基本微分形式是 Monge 形式的,如(2.4.5.20)式,则可以(在不考虑曲面定向时)反演出该曲面的(Monge 形式的)参数函数的 Jacobi 矩阵(及参数函数本身). 具体地说,即是一般地,若第一基本二次型矩阵形式上有

$$\boldsymbol{I}=I_{m-1}+A \qquad A\in R^{(m-1)\times(m-1)}$$

---

[1] 以下的各式可由 Sherman-Morrison 定理导出. 参见《最优化理论与方法》,袁亚湘、孙文瑜,科学出版社 1997 年,第 12 页,定理 1.2.6.

且 A 能表示成 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ 形式的矩阵，$\boldsymbol{a} \in R^{m-1}$ $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$，这种表示是唯一的. 因为若另有 $\boldsymbol{b} \in R^{m-1}$，使 $A = \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$，则必只有 $\boldsymbol{b} = \pm \boldsymbol{a}$. 实际上，由

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \Rightarrow a_i^2 = b_i^2 \Rightarrow b_i = \pm a_i \quad i = 1, \cdots, m-1$$

其次，设 $a_m \neq 0$，

$$b_{m-1} b_m = a_{m-1} a_m$$

若取 $b_m = a_m \Rightarrow b_{m-1} = a_{m-1}$，若取 $b_m = -a_m \Rightarrow b_{m-1} = -a_{m-1}$ 由此递推，即知

$$b_i = a_i \quad i = 1, \cdots, m-1 \text{ or } b_i = -a_i \quad i = 1, \cdots, m-1$$

由于 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$，故若 $a_m = 0$，则 $b_m = 0$，再设 $a_{m-1} \neq 0$，并由

$$b_{m-2} b_{m-1} = a_{m-2} a_{m-1}$$

的关系，可知上式依旧成立. 所以，由此总可以反演出该曲面的参数函数的 Jacobi 矩阵(最多定向相反)，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} I_{m-1} \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

由于已知这个形式的 Jacobi 矩阵具有可积性(见本节附录)，故 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 函数的形式也是可以得到的. 并且既然 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$ 矩阵可以唯一的确定，那么，曲面的法方向和第二基本形式就都可以确定. 故在这个意义上，Monge 形式的第一基本微分式给出了曲面(除定向外的)全部信息.

在给出的第一基本形式不是(2.4.5.20)式表示的 Monge 形式时，一般地尚没有办法反演出曲面参数函数的 Jacobi 矩阵 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$.

对于 Monge 形式的曲面函数，习惯上，常常表示为以下形式

$$z = f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^n \qquad \text{—(2.4.5.25)}$$

则在有些定理的表述上会产生一些差异. 这一点需要注意. 比如定理 2.4.3.1 (广义 Gauss 曲率定理)的结论，可表述为

当 n 为**偶数**时，利用曲面的第一基本形式可完全决定 Gauss 曲率 κ，当 n 为**奇数**时，则只能决定 Gauss 曲率的绝对值 $|\kappa|$.

因为在 Monge 形式的曲面函数下，Gauss 总曲率是

$$\kappa = \frac{|\mathit{II}|}{|I|} = \frac{|H|}{(1+\nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f)^{\frac{n}{2}}} \Bigg/ |I| \quad (H = \nabla^2 f(\boldsymbol{x}))$$

因为(2.4.5.21)式，故

$$\kappa = \frac{|H|}{(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f)^{\frac{n}{2}+1}} \qquad —(2.4.5.26)$$

以下考虑利用第一基本二次型矩阵的元素 g_{ij} 来构造行列式 $|H|$.

由(2.4.5.20)式，

$$g_{ij} = \begin{cases} 1+f_i^2 & \text{当 } i=j \\ f_i f_j & \text{当 } i \neq j \end{cases}$$

则由(2.4.3.10)式，对 $\boldsymbol{\Gamma}_{ij}$ 的分量 Γ_{ijk}，对任意的 $1 \leqslant i,\ j,\ k \leqslant n$，都有

$$\Gamma_{ijk} = f_k \cdot f_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right) \qquad —(2.4.5.27)$$

其中 g_{ij} 是第一基本二次型矩阵的元素. 因此，取一个下标 k，使 $f_k \neq 0$，可构造出任意 i，j 下标的 $f_k \cdot f_{ij}$. 再由行列式的展开式，

$$|H| = \sum_{(j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_n)} (-1)^s f_{1j_1} f_{2j_2} \cdots f_{nj_n} \qquad s = s(j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_n)$$

$s(\cdot)$ 是 j_k 子列的逆序指数.

所以，当 n 是偶数时，由(2.4.5.27)式，总可以选定一个这样的下标 k，并构造出

$$\frac{1}{2^n}(g_{kk}-1)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial g_{kj_i}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{k_i}}{\partial x_{j_i}} - \frac{\partial g_{ij_i}}{\partial x_k}\right] = f_{1j_1} f_{2j_2} \cdot \cdots \cdot f_{nj_n}$$

因此，行列式 $|H|$ 可以完全由第一基本不变量及其偏导数构造出来.

当 n 为奇数时，直接利用(2.4.5.27)式决定的 Γ_{ijk} 因子的乘积构造通项

$$f_{1j_1} f_{2j_2} \cdot \cdots \cdot f_{nj_n}$$

就要包含有奇数个 f_k 因子的乘积. 而奇数个 f_k 因子的乘积就不能用 $(g_{kk}-1)$ 因子的乘积来构造. 所以，只能利用

$$|H^2| = |H| \cdot |H|$$

关系，去构造 $|H^2|$ 行列式的通项因子

$$|H^2| = \sum_{(j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_n k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)} (-1)^{s'} f_{1j_1} f_{2j_2} \cdot \cdots \cdot f_{nj_n} \cdot f_{1k_1} f_{2k_2} \cdot \cdots \cdot f_{nk_n}$$

这时再利用(2.4.5.27)式，可知上式右边的 f_{uj_i}、f_{vk_i} 用(2.4.5.27)式的 Γ_{ijk} 代入，将含有 $2n$ 个 f_k 因子的乘积，且 $2n$ 是偶数，故可表示为 n 个 $(g_{kk}-1)$ 因子的乘积. 所以，当 n 为奇数时，仅利用第一基本不变量及其偏导数，就只能构造出 $|H|^2$，从而，只能得到 Gauss 曲率 κ 的绝对值. 这样，利用 Monge 形式的曲面函数，便对定理 2.4.3.1 给出了又一个说明.

同时利用一般曲面函数的梯度向量$\nabla f(\boldsymbol{x})$、Heissan 矩阵$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$以及该曲面的任一个参数形式 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ $\boldsymbol{u}\in D_u\subset R^{m-1}$，可以更为简洁地构造出第二基本二次型矩阵.

将 $f(\boldsymbol{x})=0$ 一般曲面函数，看成是

$$f(\boldsymbol{x})=0 \quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$$

形式的函数，有

$$\nabla_u f^{\mathrm{T}}=\frac{\partial f^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}=\nabla_x f^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}=\boldsymbol{0}$$

所以

$$\nabla_u^2 f=\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\nabla_x^2 f\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}+\left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_1\partial \boldsymbol{u}}\nabla_x f,\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_2\partial \boldsymbol{u}}\nabla_x f,\ \cdots,\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_{m-1}\partial \boldsymbol{u}}\nabla_x f\right]=0 \tag{2.4.5.28}$$

因为

$$\left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_1\partial \boldsymbol{u}}\nabla_x f,\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_2\partial \boldsymbol{u}}\nabla_x f,\ \cdots,\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_{m-1}\partial \boldsymbol{u}}\nabla_x f\right]\Big/\ \|\nabla_x f\|$$

$$=\left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_1\partial \boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{N}},\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_2\partial \boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{N}},\ \cdots,\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u_{m-1}\partial \boldsymbol{u}}\widetilde{\boldsymbol{N}}\right]=-\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{N}}}{\partial \boldsymbol{u}} \tag{2.4.5.29}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}=\frac{\nabla_x f}{\|\nabla_x f\|}$$

这里 $\widetilde{\boldsymbol{N}}$ 是指由$\nabla_x f(\boldsymbol{x})$决定的单位法向量.

所以，从(2.4.5.28)式可得(将$\nabla_x f$、$\nabla_x^2 f$ 仍简记为∇f、$\nabla^2 f$)

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\nabla^2 f}{\|\nabla f\|}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}=\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{N}}}{\partial \boldsymbol{u}} \tag{2.4.5.30}$$

现在在给定$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$作为切方向的一组基时，由多重矢量积决定的单位法向量是 $\boldsymbol{n}_r$.

并且，若将 $(\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r)=\pm 1$ 理解为常数，将$\widetilde{\boldsymbol{N}}$看成是

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}=(\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r)\cdot \boldsymbol{n}_r \quad \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{N}}}{\partial \boldsymbol{u}}=(\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r)\frac{\partial \boldsymbol{n}_r}{\partial \boldsymbol{u}} \tag{2.4.5.31}$$

所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\nabla^2 f}{\|\nabla f\|}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}=(\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{n}_r}{\partial \boldsymbol{u}}=-(\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r)\,\mathrm{I\!I}$$

即

$$\boldsymbol{I\!I} = -(\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r)\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\nabla^2 f}{\|\nabla f\|}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \qquad —(2.4.5.32)$$

由(2.4.5.32)式，知当

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r = -1$$

则

$$\boldsymbol{I\!I} = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\nabla^2 f}{\|\nabla f\|}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$$

当 $\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r = 1$

$$\boldsymbol{I\!I} = -\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\nabla^2 f}{\|\nabla f\|}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$$

因为在局部总可以取

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \Lambda(\boldsymbol{x})$$

Λ 由(2.2.1.2)式给出[1]. 所以，(2.4.5.32)式还可以表示成

$$\boldsymbol{I\!I} = -(\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r)\Lambda^{\mathrm{T}}\frac{\nabla^2 f}{\|\nabla f\|}\Lambda \qquad —(2.4.5.33)$$

由于

$$\boldsymbol{I} = \Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda \qquad —(2.4.5.11)$$

所以，可得 W 映射矩阵

$$W = -(\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r)\Lambda^{\mathrm{T}}\frac{\nabla^2 f}{\|\nabla f\|}\Lambda \cdot [\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda]^{-1} \qquad —(2.4.5.34)$$

注意 $\Lambda^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\Lambda$ 是 $(m-1)\times(m-1)$ 阶矩阵，一般形式的曲面函数下的 Gauss 曲率 κ 可表示成

$$\kappa = |W| = (-\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r)^{m-1}\frac{|\Lambda^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\Lambda|}{\|\nabla f\|^{m-1}}\cdot|\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda|^{-1} \qquad —(2.4.5.35)$$

例 2.4.5.1 用 R^3 空间上的单位球面说明(2.4.5.32)式

R^3 空间上的单位球面的一般函数形式是

〔1〕 基础解系矩阵 Λ 存在有可积性条件问题. 见本节附录.

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$$

其 Monge 形式的曲面函数，可取为

$$x_3=\pm\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}\qquad x_1^2+x_2^2<1$$

中的一个. 有

$$\Lambda=\Lambda_F=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-\dfrac{x_1}{x_3}&-\dfrac{x_2}{x_3}\end{bmatrix}$$

由 Λ_F 的列向量的矢量积得

$$\boldsymbol{N}_r=\begin{bmatrix}\dfrac{x_1}{x_3}\\\dfrac{x_2}{x_3}\\1\end{bmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{N}_r\|=(\boldsymbol{N}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_r)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{x_3^2}\right)^{\frac{1}{2}}=|x_3|^{-1}\quad(x_3\neq 0)$$

$$\boldsymbol{n}_r=\frac{|x_3|}{x_3}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\operatorname{sign}(x_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

将 Monge 形式的曲面函数看成是

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})\begin{cases}x_1=u_1\\x_2=u_2\\x_3=\tilde{f}(u_1,u_2)\end{cases}$$

的参数函数，以上推导表示 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的由矢量积决定的单位法向量

$$\boldsymbol{n}_r=\operatorname{sign}(x_3)\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})\Rightarrow\frac{\partial\boldsymbol{n}_r}{\partial\boldsymbol{u}}=\operatorname{sign}(x_3)\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{u}}$$

故

$$\boldsymbol{I}=\frac{\partial\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{u}}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{u}}\qquad\boldsymbol{II}=-\frac{\partial\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{u}}\frac{\partial\boldsymbol{n}_r}{\partial\boldsymbol{u}}=-\operatorname{sign}(x_3)\boldsymbol{I}\qquad\text{—(a)}$$

另一方面，

$$\nabla f = (2x_1, 2x_2, 2x_3)^{\mathrm{T}} \qquad \|\nabla f\| = 2 \qquad \widetilde{\boldsymbol{N}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$$

$$\frac{\nabla^2 f}{\|\nabla f\|} = I_3$$

所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\nabla^2 f}{\|\nabla f\|} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$$

且

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}_r = \mathrm{sign}(x_3)$$

故从(2.4.5.32)式得到

$$\boldsymbol{I\!I} = -\,\mathrm{sign}(x_3)\,\boldsymbol{I}$$

这与(a)式刚好一致.

以上给出了构造曲面单位法向量的 3 种方法——利用一般曲面函数的梯度向量、利用多重矢量积以及利用逆矩阵方法.本书规定,一般曲面函数的梯度向量$\nabla f(\boldsymbol{x})$所给出的法方向是曲面的自然定向.

一般曲面函数转换为 Monge 形式曲面函数时的定向问题,按以上的(2.4.5.12)式

$$f(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$$

转换成

$$x_m = \tilde{f}(x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}) = \tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) \quad \hat{\boldsymbol{x}} \in D_{\hat{x}} \subset R^{m-1}$$

并按(1.2.2)及(1.2.2b)式,有

$$F(\hat{\boldsymbol{x}}, x_m) = x_m - \tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0$$

则考虑∇f 与∇F 法向量间的关系,并注意 $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} = -\dfrac{f_i}{f_m} \quad i = 1, 2, \cdots, m-1$,

$$\nabla F = \left(\frac{f_1}{f_m}, \frac{f_2}{f_m}, \cdots, \frac{f_{m-1}}{f_m}, 1\right)$$

即

$$\nabla F = \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot (f_m^{-1}) \qquad \text{—(2.4.5.36)}$$

所以

$$\text{sign}(f_m) = \begin{cases} 1 & \nabla F \text{ 与 } \nabla f \text{ 同方向} \\ -1 & \nabla F \text{ 与 } \nabla f \text{ 反方向} \end{cases} \qquad \text{—(2.4.5.37)}$$

这里 sign(·)是取符号函数.

据推论 2.4.5.1 可知,(2.4.5.37)式也可以表示成以下形式,即用$\tilde{f}(\hat{x})$的定义域 $D_{\hat{f}}$ 的构造来表示∇F 与∇f 的定向关系,

$$\begin{cases} \nabla F \text{ 与 } \nabla f \text{ 同方向} & \text{当 } D_{\hat{f}} = \left\{ x \,\middle|\, \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_m} > 0 \quad x \in D \subset R^m \right\} \cap R^{m-1} \\ \nabla F \text{ 与 } \nabla f \text{ 反方向} & \text{当 } D_{\hat{f}} = \left\{ x \,\middle|\, \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_m} < 0 \quad x \in D \subset R^m \right\} \cap R^{m-1} \end{cases}$$

—(2.4.5.38)

正则参数曲面片上由逆矩阵方法确定的法向量 $\boldsymbol{N}_u$ 与该曲面转换成 Monge 形式曲面函数时的定向∇F 的关系.

由(2.4.4.136)式,将 $\boldsymbol{N}_u$ 法向量写成

$$\boldsymbol{N}_u = \begin{bmatrix} -\dfrac{[G_x^*(\boldsymbol{u})]^T \nabla_u X_m}{|G_x(\boldsymbol{u})|} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{—(2.4.5.39)}$$

这里 G^* 是 G 的伴随矩阵. 由 $\boldsymbol{N}_u$ 可微性的要求,必须有 $|G_x(\boldsymbol{u})| \neq 0$, $\boldsymbol{u} \in D_u$. 所以 D_u 只能由

$$\begin{cases} D_u^+ = \{\boldsymbol{u} \mid |G_x(\boldsymbol{u})| > 0 \quad \boldsymbol{u} \in R^{m-1}\} \\ D_u^- = \{\boldsymbol{u} \mid |G_x(\boldsymbol{u})| < 0 \quad \boldsymbol{u} \in R^{m-1}\} \end{cases} \qquad \text{—(2.4.5.40)}$$

两种方式决定. 这仍是推论 2.4.5.1 的另一种形式. 并且由推论 2.4.5.3 知,在任取的

$$\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}^0)$$

的点处,总有 Monge 形式的曲面函数

$$x_m = \tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) \quad \hat{\boldsymbol{x}} \in D_{\hat{f}}(x^0)$$

并且

$$x_m^0 = \tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}}^0) \quad \boldsymbol{x}^0 = (\hat{\boldsymbol{x}}^0, x_m^0)$$

存在. 且由

$$\nabla F = (-\nabla \tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}}), 1)$$

那么,比较∇F 与(2.4.5.39)式可知,不论 D_u 取(2.4.5.40)式中的 D_u^+ 或

D_u^-，都应有

$$\nabla F 与 \boldsymbol{N}_u 是同方向的向量 \qquad —(2.4.5.41)$$

正则参数曲面片上由多重矢量积方式得到单位法向量 $\boldsymbol{n}_r$ 与逆矩阵方法得到的单位法向量 $\boldsymbol{n}_u$ 的定向关系.

由(2.4.5.39)式，

$$\boldsymbol{n}_u = \frac{\boldsymbol{N}_u}{\|\boldsymbol{N}_u\|} = \operatorname{sign}(|G_x|)\begin{bmatrix} -\dfrac{[G_x^*(\boldsymbol{u})]^{\mathrm{T}}\nabla_u X_m}{M} \\ \dfrac{|G_x(\boldsymbol{u})|}{M} \end{bmatrix} \qquad —(2.4.5.42)$$

其中 $$M = (|G_x|^2 + \nabla_u X_m^{\mathrm{T}}[G_x^*][G_x^*]^{\mathrm{T}}\nabla_u X_m)^{\frac{1}{2}} > 0$$

另由(2.4.2.2)式，在多重矢量积方法构造的单位法向量 $\boldsymbol{n}_r$，其可微性要求的定义域 D_r

$$(\pm)\left[\sum_{\{i_1,i_2,\cdots,i_{m-1}\}}\left\{\frac{\partial(X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_{m-1}})}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_{m-1})}\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}} > 0$$

决定的[1]. 所以，D_r 定义域，在任一给定的 $\boldsymbol{u}^0 \in D_r$ 处，必定有一个下标子列 $j_1, j_2, \cdots, j_{m-1} \in \{i_1, i_2, \cdots, i_{m-1}\}$，且记

$$\frac{\partial(X_{j_1},X_{j_2},\cdots,X_{j_{m-1}})}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_{m-1})} = |G_x(j_1,j_2,\cdots,j_{m-1})| \neq 0$$

故在 $\boldsymbol{u}^0$ 点上，可按逆矩阵法构造(2.4.5.40)式的 $\boldsymbol{n}_u$，但形式上稍有些区别.(2.4.5.42)式中的

$$\frac{|G_x(\boldsymbol{u})|}{M}$$

项，现应是

$$\frac{|G_x(j_1,j_2,\cdots,j_{m-1})|}{M}$$

项，并且，这一项现在应在 $\boldsymbol{n}_u$ 向量的第 i 分量位置上，其中的 i 是 $1, 2, \cdots, m$ 中不属于 $j_1, j_2, \cdots, j_{m-1}$ 子序列的数字.

由多重矢量积的算法，$\boldsymbol{n}_r$ 向量的第 i 分量，应当是

---

[1] 在有些情况下，(±)表示的符号选取不一定是可行的，即上式可能只能取＋号(或－号)，但不失一般性，以下假设这里的符号选择是有意义的.

$$(\pm)\cdot(-1)^{i+m}\mid G_x(j_1, j_2, \cdots, j_{m-1})\mid / \| \boldsymbol{N}_r \|$$

由于 $\| \boldsymbol{N}_r \| > 0$, $M > 0$, 故可知

$$(\pm)(-1)^{i+m}\cdot \operatorname{sign}(\mid G_x(j_1, j_2, \cdots, j_{m-1})\mid) > 0 \quad \boldsymbol{u}^0 \in D_u \cap D_r \qquad —(2.4.5.43)$$

则 $\boldsymbol{n}_u$ 与 $\boldsymbol{n}_r$ 同方向,否则 $\boldsymbol{n}_u$ 与 $\boldsymbol{n}_r$ 反方向. 这里符号(±)的意义同前,且 $D_u \cap D_r$ 不应是空集.

例 2.4.5.2 R^3 空间的单位球面上的法方向取向.

单位球面的一般曲面函数是

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

对应的参数形式,取为

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} \sin u_1 \cos u_2 \\ \sin u_1 \sin u_2 \\ \cos u_1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u} \in D_u \subset R^2$$

球面的自然定向是

$$\nabla f = (2x_1, 2x_2, 2x_3)^{\mathrm{T}}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \cos u_1 \cos u_2 & -\sin u_1 \sin u_2 \\ \cos u_1 \sin u_2 & \sin u_1 \cos u_2 \\ -\sin u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$有 3 个 2 阶 Jacobi 子式

$$\mid G_x(1, 2)\mid = \frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(u_1, u_2)} = \sin u_1 \cos u_1$$

$$\mid G_x(1, 3)\mid = -\sin^2 u_1 \sin u_2$$

$$\mid G_x(2, 3)\mid = \sin^2 u_1 \cos u_2$$

以逆矩阵方法确定法方向. 以取

$$\mid G_x(1, 2)\mid > 0$$

为例,可有

$$\sin u_1 \cos u_1 > 0 \Rightarrow 0 < u_1 < \frac{\pi}{2}$$

而对于 u_2 没有限制,故可直接取 $0 < u_2 < 2\pi$, 得

$$D_u = \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\times(0,\ 2\pi)$$

这里“×”表示直积. 在 $\boldsymbol{u} \in D_u$ 上，对应的 Monge 形式，是

$$x_3 = \cos u_1 > 0$$

故是

$$x_3 = \sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)} \qquad x_1^2+x_2^2<1$$

有

$$F:\ x_3 - \sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)} = 0$$

F 上决定的法方向是

$$\nabla F = \frac{1}{x_3}(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}}$$

因为 $x_3>0$，故∇F 定向与∇f 定向相同(即(2.4.5.37)式). 而在 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$参数曲面片上

$$\boldsymbol{N}_u = \begin{bmatrix} -[G_x^{-1}(1,\ 2)]^{\mathrm{T}}\ \nabla_u X_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$G_x^{-1}(1,\ 2) = \frac{1}{\sin u_1 \cos u_1}\begin{bmatrix} \sin u_1 \cos u_2 & \sin u_1 \sin u_2 \\ -\cos u_1 \sin u_2 & \cos u_1 \cos u_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla_u X_3 = (-\sin u_1,\ 0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{N}_u = \frac{1}{\cos u_1}\begin{bmatrix} \sin u_1 \cos u_2 \\ \sin u_1 \sin u_2 \\ \cos u_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{x_3}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \nabla F \quad \boldsymbol{u} \in D_u$$

这即是(2.4.5.41)式表述的关系.

当然，也可由 $|G_x(1,\ 2)|<0$ 来确定 D_u 定义域. 如可以取

$$D_u = \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)\times(0,\ 2\pi)$$

此时

$$\sin u_1 > 0 \quad \cos u_1 < 0 \Rightarrow x_3 < 0$$

对应的 Monge 形式曲面函数是

$$x_3 = -\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)} \qquad x_1^2+x_2^2<1$$

亦知有 $\boldsymbol{N}_u = \nabla F$ 成立.

由矢量积方法确定法方向.

$$\boldsymbol{N}_r = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} = \begin{bmatrix} |G_x(1, 2)| \\ -|G_x(1, 3)| \\ |G_x(2, 3)| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2 u_1 \cos u_2 \\ \sin^2 u_1 \sin u_2 \\ \sin u_1 \cos u_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{N}_r\| &= [|G_x(1, 2)|^2 + |G_x(1, 3)|^2 + |G_x(2, 3)|^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\sin^2 u_1} = |\sin u_1| \end{aligned}$$

因此,决定 D_r 的条件是

$$\sin u_1 > 0 \quad (\text{or} \quad \sin u_1 < 0)$$

当取 $\sin u_1 > 0$ 可得

$$D_r^+ = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$$

取 $-\sin u_1 > 0$ 可得

$$D_r^- = (-\pi, 0) \times (0, 2\pi)$$

在 $\boldsymbol{u} \in D_r^+$ 上, $\|\boldsymbol{N}_r\| = \sin u_1$,而在 $\boldsymbol{u} \in D_r^-$ 上, $\|\boldsymbol{N}_r\| = -\sin u_1$. 此即

$$\|\boldsymbol{N}_r\| = (\pm) \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \right|^{\frac{1}{2}} > 0 \quad \boldsymbol{u} \in D_r$$

的意义.

以取 $D_r = D_r^+$ 为例. 在 $\boldsymbol{u} \in D_r$ 时,有

$$\boldsymbol{n}_r = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

在 $\boldsymbol{u} \in D_r$ 上,以取 $|G_x(1, 3)| > 0$ 为条件,用逆矩阵方法构造 $\boldsymbol{n}_u$. 此时应有

$$-\sin^2 u_1 \sin u_2 > 0 \Rightarrow \sin u_1 \neq 0 \text{ and } \sin u_2 < 0$$

不妨取

$$D_u = (0, \pi) \times (\pi, 2\pi)$$

故 $D_u \subset D_r$, $D_u \cap D_r \neq \varnothing$. 由(2.4.5.43)式,现在 $i = 2$, 且因为 $D_r = D_r^+ \Rightarrow (\pm)$ 取符号应为$+1$, $\text{sign}(|G_x(1, 3)|) = 1$, 得

$$+1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot +1 = -1 < 0$$

所以,可知 $\boldsymbol{n}_u$ 必是与 $\boldsymbol{n}_r$ 相反的法向量. 事实上在 $\boldsymbol{u} \in D_u \cap D_r$ 时

$$G_x^{-1}(1,\ 3) = -\frac{1}{\sin^2 u_1 \sin u_2}\begin{bmatrix} 0 & \sin u_1 \sin u_2 \\ \sin u_1 & \cos u_1 \cos u_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla_u X_2 = (\cos u_1 \sin u_2,\ \sin u_1 \cos u_2)^{\mathrm{T}}$$

记 $\boldsymbol{N}_u = (N_u^1,\ N_u^2,\ N_u^3)^{\mathrm{T}}$，有

$$\begin{bmatrix} N_u^1 \\ N_u^3 \\ N_u^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[G_x^{-1}(1,\ 3)]^{\mathrm{T}} \nabla_u X_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sin u_1 \cos u_2}{\sin u_1 \sin u_2} \\ \dfrac{\cos u_2}{\sin u_1 \sin u_2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{N}_u = \frac{1}{x_2}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

且在 $\boldsymbol{u} \in D_u$ 上，$x_2 < 0$，故 $\|\boldsymbol{N}_u\| = -\dfrac{1}{x_2}$，即

$$\boldsymbol{n}_u = -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\boldsymbol{n}_r$$

附带指出，在确定 D_u 的 $|G_x(1,\ 3)| > 0$ 条件中，当然也可以取

$$D_u = (-\pi,\ 0) \times (\pi,\ 2\pi)$$

且在 $\boldsymbol{u} \in D_u$ 上，$x_2 > 0$，故由以上推导过程，形式上似乎又可以有

$$\boldsymbol{n}_u = \boldsymbol{n}_r$$

成立. 但这是不对的. 因为现在 $D_u \cap D_r = \varnothing$，故不能再利用(2.4.5.43)式，也就不能对 $\boldsymbol{n}_u$，$\boldsymbol{u} \in D_u$ 与 $\boldsymbol{n}_r$，$\boldsymbol{u} \in D_r$ 作比较.

§2.4.6 附录：一般曲面函数的切超平面方程基础解系矩阵的可积性条件

设 $f(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$ 给出了 R^m 空间上的一个正则曲面 f. Λ 是 $m \times (m-1)$ 阶矩阵，是曲面 f 的切超平面方程

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha} = 0$$

的任取的一个基础解系矩阵. $\Lambda = \Lambda(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的函数矩阵. (2.2.1.2)式给出的是

基础解系矩阵的常见的形式.

在将 $f(\boldsymbol{x})$ 一般曲面函数转换成正则参数曲面函数时，上文给出如(2.4.5.11)式这样的关系. 这一关系的成立，即是表示应有曲面的参数函数 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 存在，并使

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \Lambda(\boldsymbol{x}) \qquad \text{—(2.4.6.1)}$$

成立. 这即意味着矩阵 $\Lambda(\boldsymbol{x})$ 必须关于 $\boldsymbol{u}$ 是可积的.

可积性条件由 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ 形式的函数关于 $\boldsymbol{u}$ 的二阶混合偏导数与求导次序无关的性质表示. 将(2.4.6.1)式看成是 $\boldsymbol{x}$ 关于 $\boldsymbol{u}$ 变元的一阶偏微分方程组，则这一方程组是 Kovalevskaya 型方程组. 它的有解条件由 Cauchy - Kovalevskaya 定理给出[1]. 但这一定理涉及到解析函数问题，不完全针对(2.4.6.1)式. 因此，更为针对性的是以下定理.

考虑一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = f_j^i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad \boldsymbol{x} \in R^m, \boldsymbol{y} \in R^n \quad 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n \qquad \text{—(2.4.6.2)}$$

假设 $f_j^i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 是定义在 $D = \widetilde{D} \times R^n$ 上的连续可微函数，$\widetilde{D} \subset R^m$.

定理 2.4.6.1 对于任意给定的初始值 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0) \in D$，方程(2.4.6.2)在点 $\boldsymbol{x}^0 \in \widetilde{D}$ 的一个邻域 $U \subset \widetilde{D}$ 内有连续可微解

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$$

并满足初值条件

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{y}^0$$

(即该方程组完全可积)的充要条件是，在区域 D 上，下述恒等式

$$\frac{\partial f_j^i}{\partial x_k} + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_j^i}{\partial y_h} f_k^h = \frac{\partial f_k^i}{\partial x_j} + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_k^i}{\partial y_h} f_j^h \quad \forall i, j, k \qquad \text{—(2.4.6.3)}$$

成立. 在此时，方程组(2.4.6.2)式在 $\boldsymbol{x} \in U$ 内满足初始条件的解是唯一的. 如果 $\widetilde{D}$ 是单连通的，则其解能够延拓成整个区域 $\widetilde{D}$ 上的解[2]. ■

这一定理是很重要的. 易知(2.4.6.3)式的意义即在于若解函数 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ 存在，则由二阶混合偏导数的性质即知，必要有

[1] 《现代应用数学手册——分析与方程卷》，清华大学出版社 2006 年，§42.3，第 837～840 页.

[2] 引自《微分几何》，陈维桓，北京大学出版社 2006 年，第 384～388 页，附录，定理 1.3 及其证明. 这里的符号与表述略有改动.

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_j \partial x_k} \quad \forall i, j, k$$

注意到(2.4.6.1)式等号右边并不显含 $\boldsymbol{u}$ 变元，记 $\Lambda(\boldsymbol{x}) = [\alpha_{ij}(\boldsymbol{x})]$ $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, m-1$；则可积性条件是

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_k \partial u_j} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_j \partial u_k} \quad \forall i, j, k$$

将 $\alpha_{ij}(\boldsymbol{x})$ 看成为

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_j} = \alpha_{ij}(\boldsymbol{x})$$

则可积性条件是

$$\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \alpha_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial u_k} = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \alpha_{ik}(\boldsymbol{x})}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial u_j}$$

即

$$\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_h} \alpha_{hk} = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial x_h} \alpha_{hj} \quad \forall i, j, k \qquad —(2.4.6.4)$$

由(2.2.1.2)式给出的 $\Lambda(\boldsymbol{x})$ 矩阵的构造，易知，它的前 $m-1$ 阶顺序主子矩阵是单位阵，故对于 $1 \leqslant i, j, k \leqslant m-1$，(2.4.6.4)式显然满足，只需再考虑 $i = m$ 时的情形.

由

$$\alpha_{mj} = -\frac{f_j}{f_m} \qquad \alpha_{mk} = -\frac{f_k}{f_m}$$

$$\alpha_{hj} = \begin{cases} 0 & h \neq j \\ 1 & h = j \end{cases} \quad 1 \leqslant h, j \leqslant m-1$$

易知(2.4.6.4)式简化为

$$\frac{\partial \alpha_{mj}}{\partial x_k} + \frac{\partial \alpha_{mj}}{\partial x_m} \alpha_{mk} = \frac{\partial \alpha_{mk}}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha_{mk}}{\partial x_m} \alpha_{mj} \quad 1 \leqslant j, k \leqslant m-1 \qquad —(2.4.6.5)$$

由

$$\frac{\partial \alpha_{mj}}{\partial x_k} = -\frac{f_{kj}}{f_m} + \frac{f_j}{f_m^2} f_{km} \qquad \frac{\partial \alpha_{mj}}{\partial x_m} = -\frac{f_{mj}}{f_m} + \frac{f_j}{f_m^2} f_{mm}$$

$$\frac{\partial \alpha_{mk}}{\partial x_j} = -\frac{f_{jk}}{f_m} + \frac{f_k}{f_m^2} f_{jm} \qquad \frac{\partial \alpha_{mk}}{\partial x_m} = -\frac{f_{mk}}{f_m} + \frac{f_k}{f_m^2} f_{mm}$$

其中

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

由 $f_{ij} = f_{ji}$ 的对称性，即可知(2.4.6.5)式是成立的.

所以(2.2.1.2)式给出的 $\Lambda(\boldsymbol{x})$ 矩阵总是可积的. 这一性质其实已由(2.4.5.12～13)式给予过说明. 这里只是再从可积性条件的角度重新检验，由此即知(2.4.5.11)、(2.4.5.33～34)式在数值相等以及数学意义上都是成立的.

但是这当然不是说任取一个曲面 f 的切超平面方程的基础解系矩阵 Λ 都必定满足可积性条件，实际上任取的 Λ 矩阵一般是不满足可积性条件的. 但由于一般曲面函数 $f(\boldsymbol{x}) = 0$，总可以通过 Monge 形式函数的转换而成为参数形式的曲面函数，因此，从(2.4.6.1)式的意义上讲，其切超平面方程的基础解矩阵(全体)中，一定存在可积的形式. 设这个可积的基础解系矩阵是 $\widetilde{\Lambda}(\boldsymbol{x})$，那么，由于任取的基础解系矩阵 $\Lambda(\boldsymbol{x})$(不一定可积)给出了切超平面的一组基向量，故 $\widetilde{\Lambda}(\boldsymbol{x})$与 $\Lambda(\boldsymbol{x})$之间一定存在过渡矩阵 $T(\boldsymbol{x})$，使

$$\widetilde{\Lambda}(\boldsymbol{x}) = \Lambda(\boldsymbol{x})T(\boldsymbol{x}) \qquad |T(\boldsymbol{x})| \neq 0 \qquad —(2.4.6.6)$$

这即是说，任取的基础解系矩阵 $\Lambda(\boldsymbol{x})$，或者是可积的，或者存在 $T(\boldsymbol{x})$ 变换矩阵，使 $\Lambda(\boldsymbol{x})T(\boldsymbol{x})$ 是可积的. 因此，在(2.4.6.6)式的意义上，本书以下会使用“任取的基础解系矩阵 $\Lambda(\boldsymbol{x})$”. 这个表述的意思即在于将 $\Lambda(\boldsymbol{x})$理解为函数矩阵时，均视之为 Λ(或 ΛT 乘积矩阵)满足可积性条件.

其次，还应说明，在以下(包括以上)的一些分析中，本质上，关注的仅仅是曲面 f 的一些数值特征，比如主法曲率，那么，在曲面 f 的一给定点 $\boldsymbol{x}^0$ 处($\boldsymbol{x}^0$ 可以是任取的)，在分析中，就可将曲面的第一、二基本矩阵、W 映射矩阵以及 Hessian 矩阵，均理解为是在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处取值的数值矩阵. 在这个意义上，就可以不用考虑曲面切超平面的基础解系矩阵 Λ 的可积性条件，Λ 矩阵允许是任取的. 例如可将 Λ 取为是列正交且归一的(数值)矩阵.

本书以下的分析中，不再就上述内容一一予以指出. 由分析所指的情形即可理解“任取的 Λ 矩阵”的含义.

§ 3　加边实对称矩阵的拟特征值及拟特征向量

§ 3.1　曲面的主法曲率与拟特征值

§ 3.1.1　曲面的主法曲率与拟特征值——Debreu 定理的证明

由(2.2.1.9)式，已给出了 R^m 空间曲面 f 上 $\boldsymbol{x}^0$ 点处沿$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$切方向的法曲率 $\kappa_f(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})$，

$$\kappa_f(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = -\frac{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} H \tilde{\boldsymbol{\alpha}}}{\|\nabla f\|} \qquad \text{—(2.2.1.9)}$$

由$\boldsymbol{x}^0$ 点处主法曲率的定义，主法曲率(用记号 κ_f 或 κ_f^i 表示)，是当单位$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$切向量在过$\boldsymbol{x}^0$ 点处的曲面 f 的切平面 L_f 上连续变动时，$\kappa_f(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})$取极值的$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$所决定的那个法曲率. 由(2.2.1.9)式的结构，法曲率 $\kappa_f(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})$取极值等价于$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} H \tilde{\boldsymbol{\alpha}}$取极值[1]. 故可以通过研究$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} H \tilde{\boldsymbol{\alpha}}$二次型的极值来确定主法曲率.

一般地，设 $A = [a_{ij}] \in R^{m\times m}$ 是 $m \times m$ 阶实对称矩阵，考虑

$$\begin{cases} \text{极值：} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\alpha} \in R^m \\ \text{s. t.} \quad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} = 1 \end{cases} \qquad \text{—(3.1.1.1)}$$

决定的极值问题. 作矩阵 A 的 **RayLiegh 商** $R(\boldsymbol{\alpha})$，

$$R(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}} \quad \boldsymbol{\alpha} \in R^m \qquad \text{—(3.1.1.2)}$$

从而(3.1.1.1)式的极值等价于求取 $R(\boldsymbol{\alpha})$的极值.

$R(\boldsymbol{\alpha})$取极值的条件是

---

〔1〕 注意，由(2.2.1.3)式，这里的 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = 1$.

$$\frac{\partial R(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} = \frac{2\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\,\alpha_k}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}} - \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A\,\boldsymbol{\alpha} \cdot 2\alpha_i}{(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^2} = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m \qquad \text{—(3.1.1.3)}$$

记

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{\alpha_k}{(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{\frac{1}{2}}} \qquad \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|} \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\,\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = 1$$

从(3.1.1.3)式中便可得到

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\,\tilde{\alpha}_k - \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} A\,\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \tilde{\alpha}_i = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

写成矩阵形式，即

$$A\,\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = R(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \qquad \text{—(3.1.1.4)}$$

记满足(3.1.1.4)式的 $R(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \tilde{R}$. 则以上 $R(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})$取极值的必要条件是

$$(A - \tilde{R} \cdot I_m)\,\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0} \qquad \text{—(3.1.1.5)}$$

(3.1.1.5)式表明 $R(\boldsymbol{\alpha})$的极值$\tilde{R}$必为实对称矩阵 A 的特征值，等价地，使 $R(\boldsymbol{\alpha})$取极值的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 即为实对称矩阵 A 的(归一化的)特征向量. 故对于 $m\times m$ 阶实对称矩阵 A，RayLiegh 商的极值应有 m 个，并且这 m 个极值 $\tilde{R}_i$ $i = 1, 2, \cdots, m$ 应均为实数，因为实对称矩阵 A 一定有 m 个实特征值(包含重根在内).

现回到考虑$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} H\,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$极值的问题上. 由(2.2.1.3)式关于$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$的规定，对于$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} H\,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$取极值的问题，应可表示成

$$\left.\begin{aligned} &\text{极值}: \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} H\,\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \\ &\text{s. t.} \begin{cases} \nabla f^{\mathrm{T}}\,\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = 0 \\ \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\,\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = 1 \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad \text{—(3.1.1.6)}$$

即$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$向量应是曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处切平面上的归一化方向向量. 由(2.2.1.3)式，将$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$表示成

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \tilde{\Lambda}\,\frac{\boldsymbol{t}}{\|\boldsymbol{t}\|}, \ \boldsymbol{t} \in R^{m-1} \quad \boldsymbol{t} \neq \mathbf{0} \qquad \text{—(3.1.1.7)}$$

且$\tilde{\Lambda}$是归一化的正交矩阵(即 $\nabla f^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\alpha} = 0$ 的基础解系矩阵，$\tilde{\Lambda}$ 是 $m \times (m-1)$ 阶矩阵)，

$$\tilde{\Lambda}^{\mathrm{T}}\,\tilde{\Lambda} = I_{m-1}$$

则(3.1.1.6)式表示的极值等价于以下 RayLiegh 商的极值，

$$R(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{t}\|}\widetilde{\Lambda}H\widetilde{\Lambda}\frac{\boldsymbol{t}}{\|\boldsymbol{t}\|} = \frac{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\widetilde{\Lambda}^{\mathrm{T}}H\widetilde{\Lambda}\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}}$$

记

$$H_{\widetilde{\Lambda}} = \widetilde{\Lambda}^{\mathrm{T}}H\widetilde{\Lambda} \qquad —(3.1.1.8)$$

$H_{\widetilde{\Lambda}}$是 $(m-1)\times(m-1)$ 阶实对称矩阵，

则

$$R(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}H_{\widetilde{\Lambda}}\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}} \qquad —(3.1.1.9)$$

(3.1.1.9)式给出的 RayLiegh 商 $R(\boldsymbol{t})$的极值等价于(3.1.1.6)式的极值.由于 $H_{\widetilde{\Lambda}}$依旧是对称实矩阵，且是 $(m-1)\times(m-1)$ 矩阵，故马上可知，$R(\boldsymbol{t})$取极值的 R_i 有 $m-1$ 个，并且，R_i 满足(3.1.1.5)式，即 R_i 应是 $H_{\widetilde{\Lambda}}$矩阵的特征值λ_i.

推论 3.1.1.1 设 $A\in R^{m\times m}$ $D\in R^{m\times n}$ 都是实矩阵，且

$$D^{\mathrm{T}}D = I_n$$

则矩阵

$$B = D^{\mathrm{T}}AD$$

的特征值、特征向量与 D 的选取无关. ■

证明：另取 $Q\in R^{m\times n}$ $Q^{\mathrm{T}}Q=I_n$ 作

$$B' = Q^{\mathrm{T}}AQ$$

因为 Q、D 均是列向量正交的矩阵，故存在 $n\times n$ 阶矩阵 T，使

$$Q = DT$$

因此

$$Q^{\mathrm{T}}Q = T^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}DT = T^{\mathrm{T}}T = I_n$$

并有

$$B' = T^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}ADT = T^{\mathrm{T}}BT$$

即知 B'与 B 是相似矩阵，故 B'、B 有完全相同的特征值、特征向量.

由此可知(3.1.1.9)式表示的 $R(\boldsymbol{t})$的极值 R_i 作为是 $H_{\widetilde{\Lambda}}$矩阵的特征值λ_i，就是与基础解系矩阵$\widetilde{\Lambda}$的选取方式无关的. 所以(2.2.1.9)式决定的法截曲率$\kappa_f(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$的极值，完全由 $H_{\widetilde{\Lambda}}$矩阵的 $m-1$ 个特征值决定.

$$\text{极值 } \kappa_f(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = -\frac{\lambda_i}{\|\nabla f\|} = \kappa_f^i \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 \qquad —(3.1.1.10)$$

这 $m-1$ 个特征值决定的 $H_{\tilde{\Lambda}}$矩阵的特征向量记为 $\boldsymbol{t}_i^*$，则通过

$$\boldsymbol{\alpha}_i^* = \tilde{\Lambda}\boldsymbol{t}_i^* \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 \qquad —(3.1.1.11)$$

给出了曲面 f 上从 $\boldsymbol{x}^0$ 点出发的 $m-1$ 个特征方向. 并且由矩阵特征向量的性质即知，若 $\boldsymbol{a}$ 是矩阵 A 的特征向量，则 $-\boldsymbol{a}$ 也一定也是 A 的特征向量（对应于同一个特征值）. 所以，由 $-\boldsymbol{t}_i^*$ 按(3.1.1.11)式构造的 $-\boldsymbol{\alpha}_i^*$ 也是曲面 f 的法截曲率的极值方向，且 $\boldsymbol{\alpha}_i^*$、$-\boldsymbol{\alpha}_i^*$ 方向上曲面 f 的法截曲率是相同的极值法截曲率. 故 $\boldsymbol{\alpha}_i^*$ 与 $-\boldsymbol{\alpha}_i^*$ 是共轭的方向.

由(3.1.1.6)式给出的极值规划，并设 Λ 是曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切平面方程 $\nabla f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0$ 的任取的、非归一化、且列向量不正交的基础解系矩阵，则由

$$\boldsymbol{\alpha} = \Lambda\boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-1} \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\Lambda\boldsymbol{t}}{(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda\boldsymbol{t})^{\frac{1}{2}}}$$

也可将这一极值规划表示成广义 RayLiegh 商的形式

$$\tilde{R}(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}H\Lambda\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda\boldsymbol{t}} \qquad —(3.1.1.12)$$

由于已知(3.1.1.12)式应等价于(3.1.1.9)式. 故，(3.1.1.12)式的极值也就是(3.1.1.9)式的极值. 所以，(3.1.1.12)式的极值与 Λ 基础解系矩阵的取法无关. 当取 Λ 为列向量正交的矩阵，(3.1.1.12)式就成为(3.1.1.9)式.

前面的分析应用于广义 RayLiegh 商$\tilde{R}(\boldsymbol{t})$，可得到以下定理[1].

定理 3.1.1.2 设 A、$B \in R^{n\times n}$是对称矩阵，且 B 是正定的，则

(1) 广义 RayLiegh 商$\tilde{R}(\boldsymbol{t})$的极小值问题

$$\min \frac{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{t}} = \min \tilde{R}(\boldsymbol{t}) \quad \boldsymbol{t} \in R^n \quad \boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{0}$$

有解$\tilde{\boldsymbol{t}}$.

(2) $\tilde{\boldsymbol{t}}$ 满足方程

$$A\tilde{\boldsymbol{t}} = \tilde{\lambda}B\tilde{\boldsymbol{t}} \quad \tilde{\lambda} = R(\tilde{\boldsymbol{t}})$$

(3) 带约束条件的极小值问题

$$\min \tilde{R}(\boldsymbol{t}) \quad \tilde{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{T}}M\boldsymbol{t} = 0 \quad \tilde{\boldsymbol{t}}、\boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{0}$$

---

[1] 《特殊矩阵》，陈景良、陈向晖，清华大学出版社 2001 年，第 205 页，定理 3.9.2～3.

有解$\hat{t}$.

(4) $\hat{t}$满足方程

$$A\hat{t} = \hat{\lambda}B\hat{t} \quad \hat{\lambda} = R(\hat{t})$$

(5) 存在R^n空间的一组基向量组$\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \cdots, \tilde{t}_n$,满足

$$A\tilde{t}_i = \lambda_i B\tilde{t}_i \quad i = 1, \cdots, n$$

λ_i 均为实数,同时,

$$\tilde{t}_i^{\mathrm{T}} B\tilde{t}_j = 0 \quad 当 i \neq j$$

■

以下的分析中,为方便起见,一般不使用广义 RayLiegh 商的形式,即直接取基础解系矩阵 Λ 为归一化且列向量正交的形式. 但利用广义 RayLiegh 商的形式,可以清楚地看到这里所使用的方法与经典的第一、二基本二次型矩阵及 W 映射方法间的相互关系.

显然,(3.1.1.12)式的广义 RayLiegh 商形式就是利用曲面 f 的第一、二基本二次型矩阵$\boldsymbol{I}$、$\boldsymbol{II}$决定其法截曲率的形式. 由(3.1.1.12)式的$\widetilde{R}(\boldsymbol{t})$商的意义,

$$\kappa_f(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{-\widetilde{R}(\boldsymbol{t})}{\|\nabla f\|} = -\frac{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}H\Lambda\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda\boldsymbol{t}} \cdot \frac{1}{\|\nabla f\|} \qquad \text{—(3.1.1.13)}$$

就是沿 $\boldsymbol{t} \in R^{m-1}$ 决定的 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \in R^m$ $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = 1$ 方向上曲面 f 的法截曲率. 与(2.4.5.33)式相比较,可知

$$-\kappa_f(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{\widetilde{R}(\boldsymbol{t})}{\|\nabla f\|} = -(\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r)\frac{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{II}\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{t}} \qquad \text{—(3.1.1.14)}$$

因此,如果所选取的基础解系矩阵 Λ 的列向量在多重矢量积算法中所决定的 $\boldsymbol{n}_r$ 单位法向量与∇f 梯度向量是相同方向的,$\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r = 1$ 就有

$$\kappa_f(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{II}\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{t}} \quad (当\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r = 1) \qquad \text{—(3.1.1.15)}$$

再由(2.4.5.34)式,并记

$$H_\Lambda = \Lambda^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\Lambda \qquad \text{—(3.1.1.16)}$$

则

$$W = -(\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r)\frac{H_\Lambda}{\|\nabla f\|} \cdot [\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda]^{-1} \qquad \text{—(3.1.1.17)}$$

另一方面,对(3.1.1.12)式的$\widetilde{R}(\boldsymbol{t})$商求极值,可得到$\widetilde{R}(\boldsymbol{t})$的极值 R_i 应使

$$[R_i\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda - \Lambda^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\Lambda]\boldsymbol{t} = 0 \qquad —(3.1.1.18)$$

即必应有

$$| R_i I_{m-1} - H_\Lambda[\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda]^{-1} | = 0 \qquad —(3.1.1.19)$$

相比较,(3.1.1.17)式表明,W 映射矩阵的特征值(记为 λ_i),应是

$$\left|\lambda_i I_{m-1} - \left[-(\widetilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r)\frac{H_\Lambda}{\|\nabla f\|}\cdot[\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda]^{-1}\right]\right| = 0 \qquad —(3.1.1.20)$$

的根.所以

$$\kappa_f^i = \frac{-R_i}{\|\nabla f\|} = (\widetilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r)\lambda_i \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 \qquad —(3.1.1.21)$$

以及由第一、二基本形式决定的高斯曲率 κ 与 $R(\boldsymbol{t})$商的关系,

$$\kappa = | W | = \lambda_1\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_{m-1} = (\widetilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r)^{m-1}\frac{(-R_1)(-R_2)\cdot\cdots\cdot(-R_{m-1})}{\|\nabla f\|^{m-1}}$$

$$—(3.1.1.22)$$

再由(3.1.1.10)式,并注意 $\lambda_i = R_i$,且规定

$$\kappa_f = \kappa_f^1\kappa_f^2\cdot\cdots\cdot\kappa_f^{m-1} \qquad —(3.1.1.23)$$

κ_f 是在$\nabla f(\boldsymbol{x})$给出的定向下,利用(2.2.1.9)式定义的曲面法截曲率的极值乘积.它也是一种 Gauss 曲率的形式.

可知

$$\kappa = (\widetilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r)^{m-1}\kappa_f \qquad —(3.1.1.24)$$

所以,

$$\begin{cases}(1)\ 当\ m\ 是奇数时 \quad \kappa \equiv \kappa_f \quad (不论\widetilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r = \pm 1) \\ (2)\ 当\ m\ 是偶数时 \quad \kappa = \begin{cases}\kappa_f & 当\widetilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r = 1 \\ -\kappa_f & 当\widetilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r = -1\end{cases}\end{cases} \qquad —(3.1.1.25)$$

这里可以再次看到在 m 是奇(偶)维数时 R^m 空间上的曲面某一点处的 Gauss 曲率 κ、κ_f 之间的关系上是有差异的.

利用以上的分析,这里再需说明以下二个问题.

第 1 个问题.虽然 κ、κ_f 都具有 Gauss 曲率的意义,但 κ、κ_f 在属性上仍有些差异.由(3.1.1.23)式,构造 κ_f 的 κ_f^i 即(2.2.1.9)式的 $\kappa_f(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$(取极值),因为就是(3.1.1.8)式的矩阵 $H_{\widetilde{\Lambda}}$的特征值除以梯度向量$\nabla f(\boldsymbol{x})$的范数的商,所以,由推

论 3.1.1.1,任取切平面方程

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha} = 0$$

的不同的基础解系矩阵 Λ, κ_f^i, $i=1, 2, \cdots, m-1$ 均是不变的. 而不同的基础解系矩阵 Λ 相当于在曲面 f 的点 $\boldsymbol{x}$ 处的切超平面中确定不同的一组基,并就此组基又总可对应地表示为是曲面 f 的某个正则参数曲面函数的 Jacobi 矩阵的意义上讲,这一性质表示 κ_f^i、κ_f 形式表示的曲面 f 的主法曲率、Gauss 曲率与参数曲面函数的参数变换无关. 从几何上讲,这是因为 κ_f^i、κ_f 曲率是由(2.2.1.9)式中得到的,而(2.2.1.9)式仅仅利用了曲面 f 的自然定向,即梯度向量$\nabla f(\boldsymbol{x})$. 显然,曲面 f 切空间中不论取什么样的一组基,都不影响$\nabla f(\boldsymbol{x})$给出的定向,故 κ_f^i、κ_f 与切空间中基向量的取法无关. 但由多重矢量积的性质即知,由某个正则参数曲面函数决定的 W 映射矩阵的特征值 λ_i 构造的 Gauss 曲率 κ,因为参数变换可能改变 λ_i 的符号,故,是与参数变换相关的量.

第 2 个问题,是需要说明 R^m 空间上的 $m-1$ 维曲面,一定有 $m-1$ 个主法曲率、主法方向. 这一结论在上面的分析中已多次提到,这里则给予说明. 首先应注意,第一、二基本二次型矩阵$\boldsymbol{I}$、$\boldsymbol{II}$都是实对称矩阵,但由于 W 映射矩阵

$$W = \boldsymbol{II} \cdot \boldsymbol{I}^{-1}$$

是 2 个实对称矩阵积,而 2 个(一般)的实对称矩阵的乘却不一定是实对称矩阵. 但 W 矩阵也一定可以取到实对称矩阵的形式(对角矩阵). 利用定理 3.1.1.2 即可知这一点. 或者,利用 κ_f^i 与 λ_i 的关系. 这可由 κ_f^i 由 $H_{\widetilde{\Lambda}}$的特征值 λ_i 决定即可知道. 因为,若记

$$\widetilde{\Lambda} = [\boldsymbol{\alpha}^1, \boldsymbol{\alpha}^2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}^{m-1}] \quad \widetilde{\Lambda}^{\mathrm{T}}\widetilde{\Lambda} = I_{m-1}$$

$\boldsymbol{\alpha}^j$ 是$\widetilde{\Lambda}$是第 j 列向量,那么,

$$H_{\widetilde{\Lambda}} = [(\boldsymbol{\alpha}^i)^{\mathrm{T}} \nabla^2 f \boldsymbol{\alpha}^j] \quad i, j = 1, 2, \cdots, m-1 \qquad —(3.1.1.26)$$

由$\nabla^2 f$ 的对称性质即知 $H_{\widetilde{\Lambda}}$必是对称矩阵,故 $H_{\widetilde{\Lambda}}$有 $m-1$ 个实特征值,从而 κ_f^i 的个数也有 $m-1$ 个(重根计重数). 且由于(3.1.1.12)式的广义 RayLiegh 商;可以取 Λ 矩阵为归一化的列向量正交矩阵(并因这样的取法不影响到 κ_f^i 的值的性质)而仍转换成(3.1.1.9)式. 从而由(3.1.1.19)式和(3.1.1.20)式即知(3.1.1.21)式成立. 故 W 映射矩阵 W,不论它在形式上是否是对称的,都一定有 $m-1$ 个实特征值.

由(3.1.1.21, 23)式,以及 R_i 就是 $H_{\widetilde{\Lambda}}$矩阵的特征值 λ_i,所以

$$\kappa_f = (-1)^{m-1} \frac{|H_{\widetilde{\Lambda}}|}{\|\nabla f\|^{m-1}} \qquad —(3.1.1.27)$$

可以证明，有

$$|H_{\tilde{\lambda}}| = -\frac{|H_\partial|}{\|\nabla f\|^2} \qquad \text{—(3.1.1.28)}$$

其中 H_∂ 是(1.2.4)式规定的加边 Hessian 矩阵. 为此，先证明以下引理.

引理 3.1.1.3　设 $A = [a_{ij}] \in R^{m\times m}$　$\boldsymbol{b} \in R^m$，且 A 是实对称矩阵. $C = [c_{ij}] \in R^{m\times(m-1)}$，$C$ 是满足以下条件的任一个矩阵，

$$\begin{cases} C^{\mathrm{T}}C = I_{m-1} \\ C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = 1 \end{cases} \qquad \text{—(3.1.1.29)}$$

则必有

$$|C^{\mathrm{T}}AC| = -\begin{vmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{—(3.1.1.30)}$$

成立. ■

注意，(3.1.1.29)式是一组约束条件. 故 $\boldsymbol{b}$ 向量具有“约束向量”的意义.

这一引理的证明，以下将会给出. 在 $m=2$ 时，可以利用行列式展开直接得到以上结果. 此时 C 为 2 维向量. 记

$$C = (c_1,\ c_2)^{\mathrm{T}}$$

在引理 3.1.1.3 给出的条件下

$$|C^{\mathrm{T}}AC| = \left|\frac{C^{\mathrm{T}}AC}{C^{\mathrm{T}}C}\right| = \frac{a_{11}c_1^2 + a_{12}c_1c_2 + a_{21}c_1c_2 + a_{22}c_2^2}{c_1^2 + c_2^2}$$

由条件，有向量 $\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2)^{\mathrm{T}}$，使

$$b_1c_1 + b_2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{b_1}{b_2}c_1 \quad (\text{设 } b_2 \neq 0\text{，可知 } c_1 \neq 0)$$

代入得

$$|C^{\mathrm{T}}AC| = \frac{a_{11}c_1^2 - a_{12}\dfrac{b_1}{b_2}c_1^2 - a_{21}\dfrac{b_1}{b_2}c_1^2 + a_{22}\dfrac{b_1^2}{b_2^2}c_1^2}{c_1^2 + \dfrac{b_1^2}{b_2^2}c_1^2}$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix}$$

由以上示例可见，$C = (c_1, c_2)^T$ 的具体取值对此结果没有影响，只要引理3.1.1.3的条件得以满足即可.

应说明，引理3.1.1.3利用行列式展开去证明，对于高维空间 R^m 而言，仍是困难的. 这由乘积 C^TAC 矩阵元素的通项，记为$\widetilde{C}_{ij}$，

$$\widetilde{C}_{ij} = \sum_{s=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{m-1}\left(a_{sk} - a_{sm}\frac{b_s}{b_m} - a_{mk}\frac{b_k}{b_m} + a_{mm}\frac{b_s b_k}{b_m^2}\right)c_{is}c_{jk}$$

的复杂程度即知.

注意以上在极值规划(3.1.1.6)式的讨论中，才推导出 C^TAC 形式的矩阵，并指出，C^TAC 形式的矩阵的特征值是(3.1.1.6)式给出的规划的极值. 将(3.1.1.6)式中的 H 用 A 代替，∇f 用 $\boldsymbol{b}$ 代替，并省略$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$的顶标号"～"，将(3.1.1.6)式写成以下形式

$$\left.\begin{array}{l} \text{极值}\quad \boldsymbol{\alpha}^T A\boldsymbol{\alpha} \\ \text{s.t.}\ \begin{cases}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\alpha} = 0\\ \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} = 1\end{cases}\end{array}\right\} \qquad —(3.1.1.31)$$

并设 $C \in R^{m\times(m-1)}$ 是 $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\alpha} = 0$ 的任一个基础解系矩阵，即

$$\boldsymbol{\alpha} = C\boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-1}$$

且设

$$C^TC = I_{m-1}$$

则显然地知

$$\text{极值：}\boldsymbol{\alpha}^T A\boldsymbol{\alpha} \Leftrightarrow \text{极值：}\frac{\boldsymbol{t}^T C^T AC\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{t}C^T C\boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{t}^T C^T AC\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{t}} \qquad —(3.1.1.32)$$

而(3.1.1.32)式等价号⇔右边的极值，由以上分析，已知就是乘积矩阵 C^TAC 的 $m-1$ 个特征值 λ_i，且这 $m-1$ 个特征值的乘积应当就是行列式$|C^TAC|$的值. 注意，这里 C^TAC 是 $(m-1)\times(m-1)$ 阶实对称矩阵(当 $A^T = A$).

下面利用 Lagrange 乘子方法给出(3.1.1.32)式左边的极值(即(3.1.1.31)式的极值). 构造 Lagrange 函数

$$L = \boldsymbol{\alpha}^T A\boldsymbol{\alpha} + \mu(1 - \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}) + \gamma 2\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\alpha} \qquad —(3.1.1.33)$$

其中 μ、γ 为乘子，$\mu, \gamma \in R$. 由极值条件

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = 2\cdot\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\alpha_k - \mu\alpha_i + \gamma b_i\right) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m \qquad —(3.1.1.34)$$

将以上条件写成矩阵形式，有

$$(A - \mu I_m)\hat{\boldsymbol{\alpha}} = -\gamma\cdot\boldsymbol{b} \qquad —(3.1.1.35)$$

其中$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$是满足(3.1.1.32)式的$\boldsymbol{\alpha}$向量.

所以,

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}(A-\mu I_m)\hat{\boldsymbol{\alpha}}=-\gamma\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=0$$

即知(3.1.1.31)式规划取极值处,总有

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}A\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\mu \quad (\text{设}\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}=1) \qquad —(3.1.1.36)$$

由于(3.1.1.32)式表示的等价性,故可知,满足(3.1.1.32)式的μ、$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$应当也有$m-1$个(对).由(3.1.1.35)式可知,$\gamma$乘子可以是非0的,故满足(3.1.1.36)式的$\mu$一般不是$A$的特征值,与$\mu$对应的$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$一般地也不是$A$的特征向量.

在明确这一点后,将极值条件(3.1.1.35)式加上约束条件$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$,一同写成以下形式

$$\begin{cases}(A-\mu I_m)\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{b}\cdot\gamma=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+0\cdot\gamma=0\end{cases} \qquad —(3.1.1.37)$$

便知应有

$$\begin{bmatrix}A-\mu I_m & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ \gamma\end{bmatrix}=0 \qquad —(3.1.1.38)$$

所以,必要有行列式

$$\begin{vmatrix}A-\mu I_m & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0\end{vmatrix}=0 \qquad —(3.1.1.39)$$

由此即知(3.1.1.31)式的极值(即(3.1.1.36)式中的)的乘子μ,必是(3.1.1.39)式所给出的μ多项式的根.

将(3.1.1.39)式具体地写出来.首先可注意到

$$\begin{vmatrix}A-\mu I_m & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\mu I_m-A & -\boldsymbol{b}\\ -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mu I_m-A & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0\end{vmatrix}=0$$

记

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}\mu I_m-A & -\boldsymbol{b}\\ -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}=[\tilde{a}_{ij}]_{(m+1)\times(m+1)}$$

则

$$|\widetilde{A}|=\begin{vmatrix}\mu-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1m} & -b_1\\ -a_{21} & \mu-a_{22} & \cdots & -a_{2m} & -b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & \mu-a_{mm} & -b_m\\ -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_m & 0\end{vmatrix}=0 \qquad —(3.1.1.40)$$

(3.1.1.40)式中行列式展开后是一个 μ 的多项式. 其中行列式主对角元素的乘积是

$$\prod_{i}^{m+1} \tilde{a}_{ii} = \prod_{i}^{m} (\mu - a_{ii}) \cdot 0 = 0$$

故这个 μ 的多项式中 μ 的最高次幂只能是 $m-1$ 次. 可知,在(3.1.1.40)式中的行列式展开式中,包含有 $m-1$ 个诸如 $(\mu - a_{ii})$ 因子的项,只能是

$$(-1)^s \cdot \tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22} \cdots \tilde{a}_{(k-1)(k-1)} \cdot \tilde{a}_{k(m+1)} \cdot \tilde{a}_{(k+1)(k+1)} \cdots \tilde{a}_{mm} \tilde{a}_{(m+1)k} \quad —(3.1.1.41)$$

且

$$\tilde{a}_{k(m+1)} = \tilde{a}_{(m+1)k} = -b_k$$

$$\tilde{a}_{ii} = (\mu - a_{ii}) \quad i = 1, 2, \cdots, k-1, k+1, \cdots, m$$

$$k = 1, 2, \cdots, m$$

而 s 是行列式展开式中(3.1.1.41)式给出的项第 2 下标排列的逆序指数.

在(3.1.1.41)式表示的项中,$\tilde{a}_{ij}$ 的第 2 下标 j 中,只有 $\tilde{a}_{k(m+1)}$、$\tilde{a}_{(m+1)k}$ 是逆序,故 $s=1$. 所以,对(3.1.1.41)式中的 k 取和,有

$$-\sum_{k=1}^{m} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} (\mu - a_{ii}) \cdot b_k^2$$

由此知(3.1.1.40)式展开后,按 μ 的幂次数降阶排列,其首项为

$$-(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_m^2)\mu^{m-1} = -\mu^{m-1} \quad (\because \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = 1)$$

而(3.1.1.40)式展开后的常数项,可令(3.1.1.40)式行列式中的 $\mu = 0$ 得到,可知应为

$$\begin{vmatrix} -A & -\boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{m+1} \begin{vmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix}$$

所以

$$|\tilde{A}| = -\mu^{m-1} + \cdots + (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad —(3.1.1.42)$$

写成标准形式,即

$$\mu^{m-1} + \cdots + (-1)^m \cdot \begin{vmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad —(3.1.1.43)$$

现在再将(3.1.1.32)式"⇔"号右边二次型矩阵 $C^{\mathrm{T}}AC$ 的特征值 λ 多项式展

开，有

$$|\lambda I_{m-1} - C^{\mathrm{T}}AC| = \lambda^{m-1} + \cdots + (-1)^{m-1}|C^{\mathrm{T}}AC| = 0$$

—(3.1.1.44)

由以上的分析已知，(3.1.1.43)式的 $m-1$ 个根 μ_i，等同于(3.1.1.44)式的 $m-1$ 个根 λ_i，故(3.1.1.43)式与(3.1.1.44)式两式等价. 记(3.1.1.43)式的 $m-1$ 个根是 μ_i，其下标编号按 $\mu_i \leqslant \mu_{i+1}$ 给定，从而由多项式代数方程的根与系数的关系得

$$\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \cdots \cdot \mu_{m-1} = (-1)^{m-1} \cdot (-1)^m \begin{vmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix}$$

—(3.1.1.45)

类似地，记(3.1.1.44)式的 $m-1$ 个根是 λ_i，排列顺序同上，有

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_{m-1} = (-1)^{m-1} \cdot (-1)^{m-1}|C^{\mathrm{T}}AC| = |C^{\mathrm{T}}AC|$$

且由于(3.1.1.44、45)两式相等，$\lambda_i = \mu_i$，$i = 1, 2, \cdots, m-1$，所以

$$|C^{\mathrm{T}}AC| = -\begin{vmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{—(3.1.1.30)}$$

这就是引理 3.1.1.3 的结论.

利用引理 3.1.1.3，并且由各符号的意义知，(3.1.1.28)式中的矩阵 $H_{\widetilde{\Lambda}}$ 相当于引理 3.1.1.3 中的 $C^{\mathrm{T}}AC$ 矩阵，矩阵 H_∂ 等价于 $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$ 矩阵，则知

$$\mu_1\mu_2 \cdot \cdots \cdot \mu_{m-1} = |H_{\widetilde{\Lambda}}| = -\begin{vmatrix} H & \dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \\ \dfrac{\nabla f^{\mathrm{T}}}{\|\nabla f\|} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} H & \nabla f \\ \nabla f^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix}}{\|\nabla f\|^2} = -\frac{|H_\partial|}{\|\nabla f\|^2} \qquad \text{—(3.1.1.28)}$$

成立.

将此结果代入(3.1.1.27)式，有

$$\kappa_f = (-1)^m \frac{|H_\partial|}{\|\nabla f\|^{m+1}} \qquad \text{—(3.1.1.46)}$$

再由(3.1.1.24)式，得到

$$\kappa = -(-\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r)^{m-1}\frac{|H_\partial|}{\|\nabla f\|^{m+1}} \qquad \text{—(3.1.1.47)}$$

因此，若取 $\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r=-1$，就可有

$$\kappa=-\frac{|H_\partial|}{\|\nabla f\|^{m+1}}=\frac{\mu_1\cdot\mu_2\cdot\cdots\cdot\mu_{m-1}}{\|\nabla f\|^{m-1}} \qquad —(3.1.1.48)$$

这就是 Debreu 定理的结论. 更完整地将(3.1.1.47)式可表示成以下形式

$$\begin{cases}\kappa=-\dfrac{|H_\partial|}{\|\nabla f\|^{m+1}} & \text{当 } m \text{ 是奇数，不论} \widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r=\pm 1\\ \kappa=-\dfrac{|H_\partial|}{\|\nabla f\|^{m+1}} & \text{当 } m \text{ 是偶数，且} \widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r=-1\\ \kappa=\dfrac{|H_\partial|}{\|\nabla f\|^{m+1}} & \text{当 } m \text{ 是偶数，且} \widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r=1\end{cases} \qquad —(3.1.1.49)$$

这样，经过了迂回(且冗长)的论证，在(3.1.1.49)式的意义上，可知 Debreu 定理是正确的. 但在这样的迂回论证中，由于得到了许多中间结论，利用这些结论，还可以将 Debreu 定理与微分几何的诸定理完全协调起来.

定义 3.1.1.1 设 $A\in R^{m\times m}$ $\boldsymbol{b}\in R^m$ 且 $\boldsymbol{b}\neq 0$，
则以下 μ 多项式的根

$$\begin{vmatrix}\mu I_m-A & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0\end{vmatrix}=0 \qquad —(3.1.1.50)$$

是加边矩阵

$$A_b=\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}$$

的**拟特征值**，并称以上多项式是 A_b(或 A)矩阵的**拟特征多项式**. ■

不加区别，本书也称 A_b 的拟特征值是 A(在 $\boldsymbol{b}$ 约束下的)拟特征值[1].

由拟特征值的定义可知，加边向量 $\boldsymbol{b}$ 不能是 0 向量，否则，(3.1.1.50)式中的行列式对任意的 μ 都成立，就没有意义了. 其次，由行列式的性质即知，用 $-\boldsymbol{b}$ 代替(3.1.1.50)式中的 $\boldsymbol{b}$ 是不影响解的.

更一般地，任取 $a\in R$，$a\neq 0$，用 $a\boldsymbol{b}$ 代替(3.1.1.50)式中的 $\boldsymbol{b}$，也不影响拟特征值.

因为

$$\begin{vmatrix}\mu I_m-A & a\cdot\boldsymbol{b}\\ a\cdot\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0\end{vmatrix}=a^2\cdot\begin{vmatrix}\mu I_m-A & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\mu I_m-A & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0\end{vmatrix}=0 \qquad —(3.1.1.51)$$

[1] 本书用 μ 或 μ_i 表示 A 矩阵的拟特征值，以区别于 A 的特征值 λ(或 λ_i).

但应注意,由(3.1.1.45)式,对于一般地,并非单位向量的 $\boldsymbol{b}$,应当有

$$\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \cdots \cdot \mu_{m-1} = -\frac{\begin{vmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix}}{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}} \qquad \text{—(3.1.1.52)}$$

由于拟特征值 μ_i 等价于乘积(对称)矩阵 $C^{\mathrm{T}}AC$ 的特征值 λ_i,其中 C 矩阵是 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$ 方程的任一正交基础解系矩阵. 由于当 A 是对称矩阵时,$C^{\mathrm{T}}AC$ 也是对称矩阵且有 $m-1$ 个实数特征值,所以,有以下定理.

定理 3.1.1.4 设 $A\in R^{m\times m}$ $\boldsymbol{b}\in R^m$ $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 且 A 是对称矩阵,则加边矩阵 A_b,有 $m-1$ 个拟特征值,且拟特征值均为实数. ■

定理 3.1.1.4 表明可以对 R^m 空间上任一正则 $m-1$ 维曲面上的点,确定 $m-1$个主法曲率,

$$\kappa_f^i = -\frac{\mu_i}{\|\nabla f\|} \quad i=1,2,\cdots,m-1 \qquad \text{—(3.1.1.10)}$$

因为曲面函数 $f(\boldsymbol{x})$的 Hessian 矩阵 H 是实对称矩阵,且 $\|\nabla f\|\neq 0$,故拟特征多项式

$$\begin{vmatrix} \mu I_m - H & \nabla f \\ \nabla f^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{—(3.1.1.53)}$$

由以上定理,一定有 $m-1$ 个实根(重根计重数).

由于加边矩阵 A_b 的拟特征值 μ_i 总等同于 $C^{\mathrm{T}}AC$ 矩阵的特征值 λ_i,所以,对于拟特征值的分析可以利用矩阵特征值理论的丰富成果.

对应于拟特征值 μ_i,定义拟特征向量.

定义 3.1.1.2 设 $A\in R^{m\times m}$ $\boldsymbol{b}\in R^m$ $\boldsymbol{b}\neq 0$ A_b 是 A 的加边矩阵,μ_i 是 A_b 的一个拟特征值,称由方程组

$$\begin{cases} (A-\mu_i I_m)\boldsymbol{\alpha}+\gamma_i\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0 \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1 \end{cases} \qquad \text{—(3.1.1.54)}$$

决定的向量 $\boldsymbol{\alpha}$,就是 μ_i 的**拟特征向量**,其中 γ_i 是辅助变量. ■

注意(3.1.1.54)式等价于(3.1.1.37)式,故 γ_i 就是(3.1.1.33)式中的 L-乘子. 仍设 C 是 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$ 的任一列向量正交的基础解系矩阵,则拟特征向量(记为$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$),总可表示为

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i = C\boldsymbol{t}_i \quad \boldsymbol{t}_i\neq\boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{t}_i\in R^{m-1}$$

并由 $\mu_i = \lambda_i$，及

$$(C^{\mathrm{T}}AC - \lambda_i I_{m-1})\boldsymbol{t} = 0 \qquad —(3.1.1.55)$$

可得到与 λ_i 对应的 $C^{\mathrm{T}}AC$ 矩阵的特征向量 $\hat{\boldsymbol{t}}_i$. 以下证明 $C\hat{\boldsymbol{t}}_i$ 就是 μ_i 对应的 A_b 矩阵的拟特征向量. 实际上，因为(3.1.1.55)式可写成

$$C^{\mathrm{T}}(A - \lambda_i I_m)C\hat{\boldsymbol{t}}_i = \boldsymbol{0} \qquad —(3.1.1.56)$$

注意到 C 是 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0$ 的基础解系矩阵，故若记

应有
$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta} = (A - \lambda_i I_m)C\hat{\boldsymbol{t}}_i \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}C = 0\end{cases} \qquad —(3.1.1.57)$$

成立. 但这即说明 $\boldsymbol{\beta}$ 只有两种可能，$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{\beta} = c \cdot \boldsymbol{b}$（$c$ 为某非 0 常数). 那么，由于 γ_i 是 L -乘子，故可以令

$$\boldsymbol{\beta} = -\gamma_i \cdot \boldsymbol{b}$$

即若 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$，就取 $\gamma_i = 0$，若 $\boldsymbol{\beta} = c \cdot \boldsymbol{b}$，就取 $\gamma_i = -c$. 所以知，可成立

$$(A - \lambda_i I_m)C\hat{\boldsymbol{t}}_i = -\gamma_i \boldsymbol{b}$$

令
$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i = C\hat{\boldsymbol{t}}_i \qquad —(3.1.1.58)$$

由上一式即知，$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 就是(3.1.1.54)式的解. 所以，当 $\hat{\boldsymbol{t}}_i$ 是对应于 $C^{\mathrm{T}}AC$ 矩阵特征值 λ_i 的特征向量时，则 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i = C\hat{\boldsymbol{t}}_i$ 就是对应于 A_b 加边矩阵的 μ_i 拟特征值的拟特征向量. 这里 $\mu_i = \lambda_i$　$\hat{\boldsymbol{t}}_i \in R^{m-1}$，$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i \in R^m$. 由此可得以下定理，

定理 3.1.1.5　设 $A \in R^{m\times m}$　$\boldsymbol{b} \in R^m$　$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ 且 A 是对称矩阵，则加边矩阵

$$A_b = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

的 $m-1$ 个拟特征值 μ_i，对应于 $m-1$ 个拟特征向量，且这 $m-1$ 个拟特征向量是两两正交的. ■

这里只证明实对称矩阵 A 的拟特征向量两两正交即可. 设 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$，$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_j$ 是 A_b 的任两个拟特征向量，则由以上分析，任取 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0$ 的列向量正交基础解系矩阵 C，一定有 $C^{\mathrm{T}}AC$(实对称)矩阵的特征向量 $\hat{\boldsymbol{t}}_i$、$\hat{\boldsymbol{t}}_j$，使

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i = C\hat{\boldsymbol{t}}_i \quad \hat{\boldsymbol{\alpha}}_j = C\hat{\boldsymbol{t}}_j$$

故
$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}_j = \boldsymbol{t}_i^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}C\boldsymbol{t}_j = \boldsymbol{t}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}_j = \begin{cases}1 & i = j \\ 0 & i \neq j\end{cases}$$

因为实对称矩阵的特征向量均是正交的,故$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$、$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_j$ 也是正交的[1].

以上的分析中指出了 L-乘子 γ 可能取为 0 的情形,对此可以给出一个具体说明. 设 λ_i 是 A 的特征值,$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$ 是由 λ_i 决定的矩阵 A 的特征向量. 若$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$ 刚好位于 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$ 决定的超平面上,那么,对于用 $\boldsymbol{b}$ 作加边所得到的 A_b 矩阵,λ_i 就是 A_b 的拟特征值,且$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$ 就是 A_b 的拟特征向量. 由以上的(3.1.1.57)式,这时便有 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\gamma_i=0$.

系 3.1.1.6 $A\in R^{m\times m}$ $\boldsymbol{b}\in R^m$ $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ $A^{\mathrm{T}}=A$. 当 A 的特征值λ_i 同时就是加边矩阵 A_b 的拟特征值μ_j,当λ_i 是单重特征根则λ_i 对应的A 的特征向量$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$ 一定是 A_b 矩阵的特征向量. 当 λ_i 是 p 重特征根,则总可以在 λ_i 对应的 A 的特征向量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ik}$, $k=1,\cdots,p$ 中取到$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ij}$, $j=k_1,k_2,\cdots,k_{p'}$, $p'\leqslant p$, $p>1$,且$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ij}$ 是 A_b 矩阵的拟特征向量. 反之亦然. ■

证明: 先设 λ_i 是 A 的单重根特征值,且 λ_i 同时又是 A_b 加边矩阵的拟特征值 μ_j. 并设 λ_i 对应的 A 的特征向量是$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$,因此成立

$$(\lambda_i I_m-A)\hat{\boldsymbol{\beta}}_i=\boldsymbol{0}$$

现证 $\boldsymbol{b}$ 一定与矩阵$[\lambda_i I_m-A]$的列向量组线性相关.

反证法. 设 $\boldsymbol{b}$ 与$[\lambda_i I_m-A]$的列向量组是线性无关的. 因为 λ_i 现在是单重根特征值,故必有

$$\operatorname{rank}[\lambda_i I_m-A]=m-1$$

从而,由以上假设,应又有增广矩阵的秩

$$\operatorname{rank}[\lambda_i I_m-A:\boldsymbol{b}]=m \qquad \text{—(a)}$$

因为$[\lambda_i I_m-A]$是对称矩阵,故

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\lambda_i I_m-A\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=m \qquad \text{—(b)}$$

记

$$[\lambda_i I_m-A]=[\tilde{\boldsymbol{a}}^1,\tilde{\boldsymbol{a}}^2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{a}}^m]=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}\\ \tilde{\boldsymbol{a}}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \tilde{\boldsymbol{a}}_m^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

---

[1] 这里隐含规定实对称矩阵的多重特征值决定的(且是线性无关的)特征向量组应经正交化处理.

这里$\tilde{\boldsymbol{a}}^j$、$\tilde{\boldsymbol{a}}_k^{\mathrm{T}}$ 分别是$[\lambda_i I_m - A]$的列、行向量. 经适当的下标顺序排列，总可以设有一组不全为 0 的实数 t_j，使

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^m = \sum_{j=1}^{m-1} t_j \tilde{\boldsymbol{a}}^j + t_m \boldsymbol{b}$$

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_m^{\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^{m-1} t_j \tilde{\boldsymbol{a}}_j^{\mathrm{T}} + t_m \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$$

即使$[\lambda_i I_m - A]$的前 $m-1$ 列(行)向量组是线性无关的.

故在以下等式最左边的行列式中，

$$\begin{vmatrix} \lambda_i I_m - A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_i I_{m-1} - A' & 0 & \boldsymbol{b}' \\ 0 & 0 & c \\ (\boldsymbol{b}')^{\mathrm{T}} & c & 0 \end{vmatrix} = -c^2 \mid \lambda_i I_{m-1} - A' \mid \neq 0 \quad —(\mathrm{c})$$

用$-t_j$ 乘其第 j 列元素再加到第 m 列元素上，再用$-t_m$ 乘第 $m+1$ 列元素再加到第 m 列，$j=1, 2, \cdots, m-1$；对各行也作类似处理，即得到上式第 1 个"="右边的行列式. 其中 A'是 A 的前 $(m-1)\times(m-1)$ 阶顺序主子矩阵，$\boldsymbol{b}'$是 $\boldsymbol{b}$ 的前 $m-1$ 个分量组成的向量.

$$c = b_m - \sum_{j=1}^{m-1} t_j b_j$$

注意，由(a)、(b)式，c 必不为 0，所以就有(c)式成立.

但由(c)式，λ_i 就不可能是 A_b 矩阵的拟特征值，即得出矛盾. 所以，$\boldsymbol{b}$ 一定是与$[\lambda_i I_m - A]$矩阵的列向量组线性相关的. 从而有非 0 的 m 维向量 $\boldsymbol{S}$，使

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}[\lambda_i I_m - A]$$

所以

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{\beta}}_i = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}[\lambda_i I_m - A] \hat{\boldsymbol{\beta}}_i = 0$$

即知$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$ 同时就是 A_b 矩阵的拟特征向量.

再设 λ_i 是 A 矩阵的 p 重根特征值 $p>1$，λ_i(必然)同时又是 A_b 矩阵的拟特征值. 那么

$$\mathrm{rank}[\lambda_i I_m - A] < m-1$$

所以

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \lambda_i I_m - A \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < m$$

因此，由(3.1.1.54)式中，有

$$\begin{bmatrix} A-\lambda_i I_m \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\boldsymbol{\beta}+\gamma_i\begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ 0 \end{bmatrix}=0 \quad \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1$$

令 $\gamma_i=0$，齐次方程

$$\begin{bmatrix} A-\lambda_i I_m \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$$

有非 0 解$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$. 任取上式解中的最大线性无关解系 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ik}$，$k=1,2,\cdots,p'$，就是 A_b 矩阵的拟特征向量. 这里 p'在

$$\mathrm{rank}[\lambda_i I_m - A : \boldsymbol{b}] = \mathrm{rank}[\lambda_i I_m - A]$$

时，$p'=p$；在

$$\mathrm{rank}[\lambda_i I_m - A : \boldsymbol{b}] > \mathrm{rank}[\lambda_i I_m - A]$$

时，$p'=p-1$.

并且，不论 p'取何值，这样确定的$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ik}$显然同时就是 A 的特征向量. 即证.

关于矩阵 A 的特征值与 A_b 的拟特征值之间关系的更多内容，在以下还会有论述. 这里仅再指出这样几点.

对于矩阵 A 的特征值 λ_i、特征向量$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$ 之间，有以下关系，

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i^{\mathrm{T}} A \hat{\boldsymbol{\beta}}_j = \begin{cases} \lambda_i & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \quad (\hat{\boldsymbol{\beta}}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}_i=1)$$

类似地，拟特征值 μ_i、拟特征向量$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 之间亦有

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i^{\mathrm{T}} A \hat{\boldsymbol{\alpha}}_j = \begin{cases} \mu_i & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \qquad \text{—(3.1.1.59)}$$

以及(3.1.1.54)式中的 γ_i 乘子与$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 之间有关系

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} A \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i = -\gamma_i \qquad \text{—(3.1.1.60)}$$

以上两式从(3.1.1.54)式中可直接得到.

例 3.1.1.1 R^3 空间上的椭球，曲面参数函数是

$$\boldsymbol{r}(u_1, u_2) = (\cos u_1 \cos u_2,\ \cos u_1 \sin u_2,\ 3\sin u_1)^{\mathrm{T}}$$

$$-\frac{\pi}{2} < u_1 < \frac{\pi}{2} \quad 0 < u_2 < 2\pi$$

对应的一般曲面函数是

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{x_3^2}{9} = 1$$

求取 $x^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ 处的主法曲率与主法方向.

解： x^0 对应的参数 $(u_1, u_2) = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. 先利用参数方程由第一、二基本二次型矩阵求取主法曲率与主法方向，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_1 \partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_2 \partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{n}_r = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad W = \boldsymbol{II} \cdot \boldsymbol{I}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

由此得 x^0 点处的主法曲率 $\kappa_1 = \frac{1}{9}$, $\kappa_2 = 1$.

对于 $\kappa_1 = \frac{1}{9}$,可得 W 矩阵的特征向量是 $\hat{\boldsymbol{t}}_1 = (1, 0)^{\mathrm{T}}$,所以

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \hat{\boldsymbol{t}}_1 \Leftrightarrow (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$$

对于 $\kappa_2 = 1$,可得 $\hat{\boldsymbol{t}}_2 = (0, 1)^{\mathrm{T}}$,所以

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \hat{\boldsymbol{t}}_2 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^{\mathrm{T}}$$

这里 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{1,2}$ 已作归一化处理.

以下再利用拟特征值方法. 在 x^0 点处，

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla^2 f = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \quad \|\nabla f\| = 2$$

由 $\nabla^2 f$ 矩阵的拟特征值多项式的规定

$$\begin{vmatrix} \mu-2 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \mu-2 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \mu-\dfrac{2}{9} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4\left(\mu-\frac{2}{9}\right)(\mu-2)=0$$

得拟特征值是

$$\mu_1=\frac{2}{9} \quad \mu_2=2$$

所以，主法曲率是

$$\kappa_f^1=-\frac{\dfrac{2}{9}}{2}=-\frac{1}{9} \quad \kappa_f^2=-1$$

由于∇f与$\boldsymbol{n}_r$刚好是方向相反的，所以$\kappa_f^{1,2}=-\kappa_{1,2}$. 由上可见，拟特征值方法要相对简便一些.

由(3.1.1.54)式，拟特征向量，在$\mu_1=\dfrac{2}{9}$时，有

$$\begin{cases} \left(2-\dfrac{2}{9}\right)\alpha_1 & & & +\sqrt{2}\gamma=0 \\ & \left(2-\dfrac{2}{9}\right)\alpha_2 & & +\sqrt{2}\gamma=0 \\ & & \left(\dfrac{2}{9}-\dfrac{2}{9}\right)\alpha_3 & =0 \\ \sqrt{2}\alpha_1 & +\sqrt{2}\alpha_2 & & =0 \\ & & & \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1 \end{cases}$$

即知 $\alpha_{1,2}=-\dfrac{9\sqrt{2}}{16}\gamma \Rightarrow -\dfrac{9}{8}\gamma=0 \Rightarrow \gamma=0 \Rightarrow \alpha_{1,2}=0,\ \alpha_3=\pm 1$

得 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1=\pm(0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$

同理，可得 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2=\pm\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right]^{\mathrm{T}}$

这里给出的拟特征向量$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{1,2}$是以共轭对的形式表示. 可以选定符号任取其中的2个作为拟特征向量.

可以将以上的分析归结为推广的 Debreu 定理.

定理 3.1.1.7 设 $f(\boldsymbol{x})=0 \quad \boldsymbol{x}\in D\subset R^m$ 决定了R^m空间上的一个正则曲

面 f. 对 $\boldsymbol{x}^0 \in D$, $\nabla f(\boldsymbol{x}^0) \neq 0$. 则曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切平面

$$L_f:\ \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0$$

上,有 $m-1$ 个正交的主法方向. 曲面 f 在这些主法方向上的法截曲率 κ_f^i,由 $f(\boldsymbol{x})$的加边 Hessian 矩阵

$$H_\partial = \begin{bmatrix} \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) & \nabla f(\boldsymbol{x}^0) \\ \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) & 0 \end{bmatrix}$$

的 $m-1$ 个拟特征值 μ_i 决定,

$$\kappa_f^i = -\frac{\mu_i}{\|\nabla f\|} \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 \qquad —(3.1.1.10)$$

而主法方向由 μ_i 对应的 H_∂矩阵的拟特征向量$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 给出. ■

定义 3.1.1.3 设 $f(x) = 0 \quad x \in D \subset R^m$ 是正则曲面 f,则在$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$ $\boldsymbol{x}^0 \in D$ 给出的定向下,曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的 **Gauss 曲率**是

$$\kappa_f = (-1)^m \frac{|H_\partial|}{\|\nabla f\|^{m+1}} \qquad —(3.1.1.46)$$

平均曲率是

$$h = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{m-1}}{\|\nabla f\|} = \frac{1}{m-1} \frac{\sum\limits_{\substack{\{i,j\} \\ i<j}} \begin{vmatrix} f_{ii} & f_{ij} & f_i \\ f_{ji} & f_{jj} & f_j \\ f_i & f_j & 0 \end{vmatrix}}{\|\nabla f\|^3}$$

—(3.1.1.61)

这里求和号 $\sum\limits_{\substack{\{i,j\} \\ i<j}}$ 是指对满足 $i<j$ 的全部数对$\{i, j\}$求和. ■

其中 $f_{ij} = \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_i \partial x_j}$, $f_i = \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_i}$. (3.1.1.61) 式的推导在下面会给出的. 注意当 $m = 2$ 时,(3.1.1.46)、(3.1.1.61) 式给出的就是平面曲线的曲率.

在以上的分析中,已经指出对于 $H_{\tilde{\Lambda}}$(即 $C^{\mathrm{T}}AC$ 类型的)矩阵,Λ 基础解系矩阵的取法,对于拟特征值是没有影响的. 以下,更一般地考虑对 $\boldsymbol{x}$ 的坐标变换问题.

在矩阵特征值理论中,对于 A、$Q \in R^{m\times m}$,且 Q 可逆,则

$$A \sim Q^{-1}AQ$$

二者相似. 相似的矩阵具有相同的特征值、行列式值,具有相同的特征多项式. 对于拟特征值,也有这一类似的性质.

设 $Q \in R^{m\times m}$　$\boldsymbol{B} \in R^m$ 决定了 R^m 空间上的一个坐标变换

$$\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{y} + \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in R^m \qquad \text{—(3.1.1.62)}$$

如果这一变换使 Euclid 范数 $\|\cdot\|$ 保持不变，即称为保范变换. 全体保范变换构成 R^m 空间上的运动群. 且以上坐标变换成为保范变换的充要条件是矩阵 Q 是正交矩阵[1],

$$Q^{\mathrm{T}}Q = QQ^{\mathrm{T}} = I_m \Rightarrow Q^{\mathrm{T}} = Q^{-1} \qquad |Q| = \pm 1$$

同时亦可知，当(3.1.1.62)式给出的变换是保范的，则它必定是保角的. 因为，若设 $\boldsymbol{a}^1 - \boldsymbol{a}^2$、$\boldsymbol{b}^1 - \boldsymbol{b}^2$ 是原坐标系下的两向量，由

$$\boldsymbol{a}^{1,2} = Q\boldsymbol{y}_a^{1,2} + \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{b}^{1,2} = Q\boldsymbol{y}_b^{1,2} + \boldsymbol{B}$$

则

$$\frac{(\boldsymbol{a}^1 - \boldsymbol{a}^2)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}^1 - \boldsymbol{b}^2)}{\|\boldsymbol{a}^1 - \boldsymbol{a}^2\| \cdot \|\boldsymbol{b}^1 - \boldsymbol{b}^2\|} = \frac{(\boldsymbol{y}_a^1 - \boldsymbol{y}_a^2)^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}Q(\boldsymbol{y}_b^1 - \boldsymbol{y}_b^2)}{\|Q(\boldsymbol{y}_a^1 - \boldsymbol{y}_a^2)\| \cdot \|Q(\boldsymbol{y}_b^1 - \boldsymbol{y}_b^2)\|}$$

$$= \frac{(\boldsymbol{y}_a^1 - \boldsymbol{y}_a^2)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}_b^1 - \boldsymbol{y}_b^2)}{\|\boldsymbol{y}_a^1 - \boldsymbol{y}_a^2\| \cdot \|\boldsymbol{y}_b^1 - \boldsymbol{y}_a^2\|}$$

所以，若 $(\boldsymbol{a}^1 - \boldsymbol{a}^2) \perp (\boldsymbol{b}^1 - \boldsymbol{b}^2)$ 则 $(\boldsymbol{y}_a^1 - \boldsymbol{y}_a^2) \perp (\boldsymbol{y}_b^1 - \boldsymbol{y}_b^2)$.

而由以上关于法曲率的分析可见，法曲率定义完全依赖于曲面 f 上 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切平面与法方向向量正交的前提，所以，只有当保持这一正交关系存在的条件下，对于 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ 的变量 $\boldsymbol{x}$ 施加变换后，仍可讨论法曲率是否受到影响的问题. 否则，这一问题是否具有意义就会成为疑问. 反之既可知道，如果对 $\boldsymbol{x}$ 变量施加的变换是保角的，从而曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切平面与法方向的正交关系不变，那么，$\boldsymbol{x}^0$ 处的法曲率也一定不会变化.

事实上，当(3.1.1.62)式的变换是保范的，则记

$$\nabla f_y = \nabla f_y(\boldsymbol{x}^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1},\ \frac{\partial f}{\partial y_2},\ \cdots,\ \frac{\partial f}{\partial y_m}\right)^{\mathrm{T}}\Bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0}$$

$$\nabla^2 f_y = \nabla^2 f_y(\boldsymbol{x}^0) = \left[\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial y_i \partial y_j}\right]_{m\times m}$$

那么，应有

$$\nabla f_y = Q^{\mathrm{T}}\,\nabla f$$

$$\nabla^2 f_y = Q^{\mathrm{T}}\,\nabla^2 f Q$$

---

[1] 《微分几何》，孟道骥等著，同前第 1.2 节.

且在 $\boldsymbol{y}$ 坐标下，$\boldsymbol{x}^0$ 点处的切平面，是

$$\nabla f_y^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta} = 0 \Rightarrow \nabla f^{\mathrm{T}} Q \boldsymbol{\beta} = 0$$

故设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\nabla f^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} = 0$ 切平面方程的解向量，那么，有

$$\boldsymbol{\alpha} = Q\boldsymbol{\beta} \quad \boldsymbol{\beta} = Q^{-1}\boldsymbol{\alpha}$$

成立. 且由

$$\| \nabla f_y \| = (\nabla f^{\mathrm{T}} Q Q^{\mathrm{T}} \nabla f)^{\frac{1}{2}} = \| \nabla f \|$$

得，

$$\kappa_f(\boldsymbol{\beta}) = -\frac{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \nabla^2 f_y \boldsymbol{\beta}}{\| \nabla f_y \|} = -\frac{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} \nabla^2 f Q \boldsymbol{\beta}}{\| \nabla f \|} = -\frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} H \boldsymbol{\alpha}}{\| \nabla f \|} = \kappa_f(\boldsymbol{\alpha})$$

从而在 1 - 1 对应的 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 方向上，曲面 f 的法曲率的值在保范变换下不变.

在 $\boldsymbol{y}$ 坐标下，$\nabla^2 f_y$ 矩阵的拟特征多项式是

$$\begin{vmatrix} \mu I_m - \nabla^2 f_y & \nabla f_y \\ \nabla f_y^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu I_m - Q^{\mathrm{T}} \nabla^2 f Q & Q^{\mathrm{T}} \nabla f \\ \nabla f^{\mathrm{T}} Q & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left| \begin{bmatrix} Q^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu I_m - \nabla^2 f & \nabla f \\ \nabla f^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

注意，

$$\begin{bmatrix} Q^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{m+1}$$

故

$$\begin{vmatrix} \mu I_m - \nabla^2 f_y & \nabla f_y \\ \nabla f_y^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu I_m - \nabla^2 f & \nabla f \\ \nabla f^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

所以，拟特征多项式在保范变换下不变，故拟特征值也不变，拟特征向量之间存在 1 - 1 对应的变换

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i = Q^{-1} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 \qquad —(3.1.1.63)$$

一般地，有以下定理，

定理 3.1.1.8 设 $A \in R^{m\times m}$ $\boldsymbol{b} \in R^m$ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$，设 Q 是任取的正交矩阵，$Q \in R^{m\times m}$，则

$$\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \quad (a \neq 0)$$

即二者是相似的. 相似的加边矩阵具有相同的特征值、行列式值，特别，它们具有

相同的拟特征值. 但上式右边的乘积矩阵的拟特征向量是 $Q^{-1}\hat{\boldsymbol{\alpha}}$,其中$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$是上式左边的 A_b 矩阵的拟特征向量. ■

由以上的分析即知此定理成立.

但应指出,以下两加边矩阵

$$\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Q^{-1}AQ & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \qquad Q^{\mathrm{T}}Q = I$$

一般具有不同的拟特征值,故二者不是相似矩阵.

设 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ 是曲面 f 的函数. 在经济学中还经常要用到另一个变换,即对 $f(\cdot)$作单调增变换.

设 $F: R \to R$ 是单调增变换,如果 F 二阶可微,且

$$F' > 0$$

则在 F 变换下,曲面 f 的函数被变换成为

$$F(x) = F(f(\boldsymbol{x})) = c \quad (c - \text{const}) \qquad \text{—(3.1.1.64)}$$

以下证明曲面 f 在单调增变换下的主法曲率 κ_f^i 不变.

由(3.1.1.64)式,

$$\nabla F(\boldsymbol{x}^0) = F' \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}^0) \quad F' = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}f}$$

$$\nabla^2 F(\boldsymbol{x}^0) = F'' \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}^0) \cdot \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) + F' \cdot \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) \quad F'' = \frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}f^2}$$

$$H_\partial^F = \begin{bmatrix} \nabla^2 F & \nabla F \\ \nabla F^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

则 $F(\boldsymbol{x})$的加边 Hessian 矩阵 H_∂^F的拟特征值(记为 μ_F)多项式是

$$\begin{vmatrix} \mu_F I_m - \nabla^2 F & \nabla F \\ \nabla F^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_F I_m - F'' \nabla f \nabla f^{\mathrm{T}} - F' \nabla^2 f & F' \nabla f \\ F' \nabla f^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{—(3.1.1.65)}$$

因为已设 $F' > 0$, 故用因子

$$\frac{F''}{F'} \cdot \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j} \quad j = 1, 2, \cdots, m$$

分别乘(3.1.1.65)式行列式的第 $m+1$ 行再加到第 j 行,(3.1.1.65)式可化简为下式

$$\begin{vmatrix} \mu_F I_m - F' \cdot \nabla^2 f & F' \nabla f \\ F' \nabla f^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

将 μ_F 表示成 $\mu_F = F' \cdot \tilde{\mu}$ 这总是可以的，所以，从上一式中便有

$$(F')^{m+1} \cdot \begin{vmatrix} \tilde{\mu} I_m - \nabla^2 f & \nabla f \\ \nabla f^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

即知，$\tilde{\mu}$就是 $H_\partial = \begin{bmatrix} \nabla^2 f & \nabla f \\ \nabla f^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$ 加边矩阵的拟特征值 μ

所以，$m-1$ 个拟特征值之间有关系

$$\mu_F^i = F' \cdot \mu_i \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 \qquad —(3.1.1.66)$$

(3.1.1.66)式表明拟特征值在对 $f(\cdot)$ 作单调增变换时，只是一个半不变量，即拟特征值不改变符号，并同时扩大 F'倍.

因此，对于曲面 f 的主法曲率 κ_f^i，有

$$\kappa_F^i = -\frac{\mu_F^i}{\| \nabla F \|} = -\frac{F' \cdot \mu_i}{F' \cdot \| \nabla f \|} = \kappa_f^i \quad i = 1, 2, \cdots, m-1$$

所以，主法曲率 κ_f^i 是在对 $f(\cdot)$ 作单调增变换下的不变量.

可证曲面 f 的主法方向也是在 $f(\cdot)$ 作单调增变换下的不变量. 事实上，记 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_F$ 是 $F(f(\boldsymbol{x})) = 0$ 决定曲面的拟特征向量，则 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_F$ 应满足以下方程组

$$\begin{cases} (\nabla^2 F - \mu_F I_m)\, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_F + \gamma \nabla F = \mathbf{0} \\ \nabla F^{\mathrm{T}}\, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_F = 0 \\ \hat{\boldsymbol{\alpha}}_F^{\mathrm{T}}\, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_F = 1 \end{cases}$$

由以上分析，这一方程组又可表成

$$\begin{cases} F'' \cdot \nabla f \nabla f^{\mathrm{T}}\, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_F + F'[(\nabla^2 f - \mu I_m)\, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_F + \gamma \nabla f] = \mathbf{0} \\ F' \cdot \nabla f^{\mathrm{T}}\, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_F = 0 \\ \boldsymbol{\alpha}_F^{\mathrm{T}}\, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_F = 1 \end{cases}$$

其中 $\quad F' \cdot \mu = \mu_F \quad$ 且因为 $\nabla f \nabla f^{\mathrm{T}}\, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_F = 0$

所以，$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_F$ 就是 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ 决定的曲面上，由拟特征值 μ 决定的拟特征向量$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$. 即知拟特征向量在单调增变换 $F \circ f$ 下保持不变.

对于 Monge 形式的曲面函数

$$z = f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in D_x \subset R^m \qquad —(1.2.2)$$

上文已指出，将它看成是以下形式的参数函数

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ f(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix}$$

时，由$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$的列向量组的多重矢量积得到的定向，等价于将(1.2.2)式转换成

$$F(\bar{\boldsymbol{x}}) = z - f(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \bar{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\ z)^{\mathrm{T}} \in R^{m+1} \qquad —(3.1.1.67)$$

形式的一般函数的梯度向量

$$\nabla F(\bar{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} -\nabla f(\boldsymbol{x}) \\ 1 \end{bmatrix}$$

所给出的定向[1].

但这一定向下的 $F(\bar{\boldsymbol{x}})$函数的拟特征值、拟特征多项式在形式上会带来一些推导上的不便之处. 所以，在推导 Monge 形式的曲面函数求取拟特征值时，采用以下形式

$$F(\bar{\boldsymbol{x}}) = f(\boldsymbol{x}) - z = 0 \quad \bar{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\ z)^{\mathrm{T}} \in R^{m+1} \qquad —(3.1.1.68)$$

这时 $H_F = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2.2.3.18)式的右边会改变符号. 法截曲率可表示成

$$\kappa_F(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) = -\frac{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} H \boldsymbol{t}}{(1 + \nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f)^{\frac{1}{2}}} \quad \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{t} + (\nabla f^{\mathrm{T}} \boldsymbol{t})^2 = 1 \qquad —(3.1.1.69)$$

从而曲面的法方向向量是

$$\nabla F(\bar{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} \nabla f(\boldsymbol{x}) \\ -1 \end{bmatrix} \qquad —(3.1.1.70)$$

$F(\bar{x})$的 Hessian 矩阵是

$$H_F = \begin{bmatrix} H & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \qquad —(3.1.1.71)$$

其中 H 是 $F(\boldsymbol{x})$的 Hessian 矩阵. 则 $F(\bar{\boldsymbol{x}})$的加边 Hessian 矩阵用 H_∂^F表示

$$H_\partial^F = \begin{bmatrix} H_F & \nabla F \\ \nabla F^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & \boldsymbol{0} & \nabla f \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 & -1 \\ \nabla f^{\mathrm{T}} & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad —(3.1.1.72)$$

---

[1] §2.4.5 章节，(2.4.5.8)式.

H_a^F是$(m+2)\times(m+2)$阶矩阵. 所以,H_a^F的拟特征行列式是

$$\begin{vmatrix} \mu I_{m+1}-H_F & \nabla F \\ \nabla F^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu I_m - H & \mathbf{0} & \nabla f \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mu & -1 \\ \nabla f^{\mathrm{T}} & -1 & 0 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} \mu I_m - H & \nabla f \\ \nabla f^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} - |\mu I_m - H| \qquad —(3.1.1.73)$$

即拟特征多项式可写成为

$$\mu \begin{vmatrix} \mu I_m - H & \nabla f \\ \nabla f^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} - |\mu I_m - H| = 0 \qquad —(3.1.1.74)$$

易知

$$|H_F| = -|H| \qquad —(3.1.1.75)$$

所以,由(3.1.1.74)式决定的多项式,可表示成

$$-(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f)\mu^m + \cdots + (-1)^m \quad (-|H|) = 0$$

从而拟特征多项式的标准形式是

$$\mu^m + \cdots + (-1)^m \cdot \frac{|H|}{(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f)} = 0 \qquad —(3.1.1.76)$$

则 Monge 形式曲面 F 上某$(\boldsymbol{x}^0, z^0)$点处的拟特征值 μ_i 有 m 个,且均为实数,并有

$$\mu_1\mu_2 \cdot \cdots \cdot \mu_m = \frac{|H|}{(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f)} \qquad —(3.1.1.77)$$

曲面 F 的主法曲率 κ_F^i 也就有 m 个,是

$$\kappa_F^i = -\frac{\mu_i}{(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f)^{\frac{1}{2}}} \qquad —(3.1.1.78)$$

Monge 形式曲面$(\boldsymbol{x}^0, z^0)$处的 Gauss 曲率 κ_F,是

$$\kappa_F = (-1)^m \frac{\mu_1\mu_2 \cdot \cdots \cdot \mu_m}{(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f)^{\frac{m}{2}}} = (-1)^m \frac{|H|}{(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f)^{\frac{m}{2}+1}} \qquad —(3.1.1.79)$$

平均曲率 h_F,是

$$h_F = -\frac{1}{m} \cdot \frac{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_m}{(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{m} \frac{\sum\limits_{\substack{(i,j)\\ i<j}} \begin{vmatrix} f_{ii} & f_{ij} & f_i \\ f_{ji} & f_{jj} & f_j \\ f_i & f_j & 0 \end{vmatrix} - \mathrm{tr}H}{(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f)^{\frac{3}{2}}} \qquad —(3.1.1.80)$$

其中 $\mathrm{tr}H$ 是 H 矩阵的迹

$$\mathrm{tr}H = \sum_{i}^{m} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_i^2} \qquad —(3.1.1.81)$$

(3.1.1.80)式的符号意义与(3.1.1.61)式同，其推导过程以下会予给出.

如果在(3.1.1.68)式中的 $\boldsymbol{x}\in R^2$，则若 $z = f(x_1, x_2)$ 函数决定的图像曲面的 Gauss 曲率处处为 0，其充要条件，由(3.1.1.79)式即得 $|H| = 0$，或表成

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 0$$

由于在应用过程中，习惯上，对于 Monge 形式的曲面函数，曲面定向规定为其法向量的正向，总以法向量 $\boldsymbol{n}_F$ 对应于 z 轴的分量(按本书规定是 $\boldsymbol{n}_F$ 的第 $m+1$ 个分量)的正方向就是 z 轴的正方向. 即是取

$$F(\bar{\boldsymbol{x}}) = z - f(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \bar{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, z)^{\mathrm{T}} \in R^{m+1} \qquad —(3.1.1.67)$$

为定向的. 故在此定向下，以上各式中将改变符号，即

(3.1.1.69)将成为

$$\kappa_F(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} H \boldsymbol{t}}{(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f)^{\frac{1}{2}}} \quad \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t} + (\nabla f t)^2 = 1 \qquad —(3.1.1.82)$$

并在拟特征多项式(3.1.1.74～77)保持不变的条件下，

(3.1.1.78)式应为

$$\kappa_F^i = \frac{\mu_i}{(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f)^{\frac{1}{2}}} \qquad —(3.1.1.83)$$

(3.1.1.79)式应改变为

$$\kappa_F = \frac{\mu_1\mu_2\cdot\cdots\cdot\mu_m}{(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f)^{\frac{m}{2}}} = \frac{|H|}{(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f)^{\frac{m}{2}+1}} \qquad —(3.1.1.84)$$

(3.1.1.80)式应改变为

$$h_F = \frac{1}{m}\cdot\frac{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_m}{(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{m}\,\frac{\sum\limits_{\substack{(i,j)\\ i<j}}\begin{vmatrix} f_{ii} & f_{ij} & f_i \\ f_{ji} & f_{jj} & f_j \\ f_i & f_j & 0 \end{vmatrix} - \mathrm{tr}H}{(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f)^{\frac{3}{2}}} \qquad —(3.1.1.85)$$

对于 Monge 形式曲面的拟特征值 μ_i，由以下方程可解出其对应的拟特征向

量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i \in R^{m+1}$.

$$\begin{cases}(H_F - \mu_i I_{m+1})\boldsymbol{\alpha} + \nabla F \cdot \gamma & = 0 \\ \nabla F^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\alpha} & = 0 \quad (\boldsymbol{\alpha} \in R^{m+1}) \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} & = 1\end{cases} \qquad —(3.1.1.86)$$

引进记号，

$$\boldsymbol{\alpha}(m) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)^{\mathrm{T}}$$

将以上方程中的 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示成

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}(m) \\ \alpha_{m+1}\end{bmatrix}$$

可将以上方程表示为

$$\begin{cases}(H - \mu_i I_m)\boldsymbol{\alpha}(m) + \nabla f \cdot \gamma & = 0 \\ -\mu\alpha_{m+1} \qquad - \gamma & = 0 \\ \nabla f^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\alpha}(m) - \alpha_{m+1} & = 0 \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(m)\boldsymbol{\alpha}(m) + \alpha_{m+1}^2 & = 1\end{cases}$$

从这一方程组中可消去 α_{m+1}、γ 因子，得到 $\boldsymbol{\alpha}(m)$ 应满足的方程是

$$\begin{cases}(H - \mu_i(I_m + \nabla f \cdot \nabla f^{\mathrm{T}}))\boldsymbol{\alpha}(m) & = 0 \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(m)\boldsymbol{\alpha}(m) + (\nabla f^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}(m))^2 & = 1\end{cases} \qquad —(3.1.1.87)$$

由(3.1.1.87)式可解出 $\boldsymbol{\alpha}(m)$，再由 $\alpha_{m+1} = \nabla f^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}(m)$ 可决定拟特征向量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$.

例 3.1.1.2 求取 Monge 形式的曲面方程

$$z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

上

$$\overline{\boldsymbol{x}}^0 = (\boldsymbol{x}^0, z^0) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$$

处的拟特征值、拟特征向量.

解：

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix}2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix} \quad \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

拟特征多项式是

$$\begin{vmatrix} \mu-2 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \mu-2 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \mu-2 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & -1 & 0 \end{vmatrix} = (\mu-2)^2(5\mu-2) = 0$$

故拟特征值是

$$\mu_1 = \frac{2}{5} \quad \mu_2 = \mu_3 = 2$$

再由

$$\| \nabla F \| = \sqrt{5}$$

主法曲率是

$$\kappa_F^1 = -\frac{2}{5\sqrt{5}} \quad \kappa_F^2 = \kappa_F^3 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

得

$$\text{Gauss 曲率} \quad \kappa_F = -\frac{8}{5^{\frac{5}{2}}} \qquad \text{平均曲率} \quad h_F = -\frac{22}{15\sqrt{5}}$$

利用以上结果,可以验证(3.1.1.79～80)式.由

$$| H | = | \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) | = 8 \quad (1+\nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f) = \| \nabla f \|^2 = 5 \quad m = 3$$

$$\kappa_F = (-1)^3 \frac{8}{5^{\frac{3}{2}+1}} = -\frac{8}{5^{\frac{5}{2}}}$$

而

$$\begin{vmatrix} f_{ii} & f_{ij} & f_i \\ f_{ji} & f_{jj} & f_j \\ f_i & f_j & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 2 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{16}{3}$$

$$i, j = 1, 2, 3 \quad \{i, j\} \quad i < j$$

且这样的数对(i, j)共有 3 个,所以

$$\sum_{\substack{(i,j)\\ i<j}} \begin{vmatrix} f_{ii} & f_{ij} & f_i \\ f_{ii} & f_{jj} & f_j \\ f_i & f_j & 0 \end{vmatrix} = 3 \times -\frac{16}{3} = -16$$

$$\mathrm{tr} H = 6$$

得

$$h_F = \frac{1}{3}\,\frac{-16-6}{5^{\frac{3}{2}}} = -\frac{22}{15\sqrt{5}}$$

可以利用 Monge 形式曲面函数的第一、二基本二次矩阵来解出主法曲率.

$$\boldsymbol{I} = I_m + \nabla f \cdot \nabla f^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{I\!I} = \frac{H}{(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\,\nabla f)^{\frac{1}{2}}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

故主法曲率 κ_i 是以下多项式的根

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{I\!I}| = 0$$

可得

$$\lambda^3 - \frac{22}{5\sqrt{5}}\lambda^2 + \frac{28}{25}\lambda - \frac{8}{25\sqrt{5}} = \left(\lambda - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 \left(\lambda - \frac{2}{5\sqrt{5}}\right) = 0$$

得

$$\kappa_1 = \frac{2}{5\sqrt{5}} \quad \kappa_2 = \kappa_3 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

由于 $\nabla F = (\nabla f^{\mathrm{T}}, -1)^{\mathrm{T}}$ 的定向与参数化的 Monge 形式曲面函数的多重矢量积给出的定向相反,故 κ_i 与 κ_F^i 的符号刚好相反.

拟特征向量.

$\mu_1 = \frac{2}{5}$，由(3.1.1.87)式

$$\left(\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix} - \frac{2}{5}\begin{bmatrix}\frac{7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{4}{3} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{7}{3}\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{\alpha}(3) = 0 \quad \boldsymbol{\alpha}(3) = \begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}$$

化简后是

$$\begin{cases}2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0\\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0\end{cases}$$

得

$$\boldsymbol{\alpha}(3) = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}t \quad t \in R$$

再从

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(3)\boldsymbol{\alpha}(3) + (\nabla f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}(3))^2 = 15t^2 = 1$$

可得

$$t = \pm\frac{1}{\sqrt{15}} \Rightarrow \alpha_{1,2,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{15}}$$

由此可得

$$\alpha_4 = \nabla f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}(3) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

所以

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1 = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}}$$

$\mu_2 = \mu_3 = 2$. 由

$$\left(\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}\frac{7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{4}{3} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{7}{3}\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{\alpha}(3) = 0$$

化简后是

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$$

得

$$\boldsymbol{\alpha}(3)=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\ t_2\end{bmatrix}\quad t_{1,2}\in R$$

注意，上式给出的 $\boldsymbol{\alpha}(3)$ 向量与 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1$ 中的 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1(3)=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{15}},\frac{1}{\sqrt{15}},\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^{\mathrm{T}}$ 是正交的（不论 t_1, t_2 取何值），但上式等号右边矩阵的 2 个列向量本身不是正交的. 由于任何基础解矩阵均是等价的，故可以将上式再正交化，得到

$$\boldsymbol{\alpha}(3)=\begin{bmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\ t_2\end{bmatrix}$$

再由

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(3)\boldsymbol{\alpha}(3)+(\nabla f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}(3))^2=2t_1^2+\frac{3}{2}t_2^2=1$$

现可以任取 $(t_1, t_2)_1$, $(t_1, t_2)_2$ 只要它们满足以上条件，且 $(t_1, t_2)_1$, $(t_1, t_2)_2$ 向量同时是线性无关的. 比如

$$t_2=0\Rightarrow t_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow(t_1, t_2)_1=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

$$t_1=0\Rightarrow t_2=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\Rightarrow(t_1, t_2)_2=\pm\left(0,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

将 $(t_1, t_2)_1$、$(t_1, t_2)_2$ 分别代入 $\boldsymbol{\alpha}(3)$ 的等号右边，得

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(3)_1=\pm\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}}\quad\hat{\boldsymbol{\alpha}}(3)_2=\pm\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{\mathrm{T}}$$

再由

$$\alpha_4=\nabla f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}(3)_{1,2}\equiv 0$$

即得 $\mu_{2,3}=2$ 对应的 2 个特征向量（共轭对）

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \pm\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ 0\right)^{\mathrm{T}} \quad \hat{\boldsymbol{\alpha}}_3 = \pm\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\sqrt{\frac{2}{3}},\ 0\right)^{\mathrm{T}}$$

可验证，拟特征向量$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{1,2,3}$是正交的.

有意思的是本例任取 $z^0 \geqslant 0$，则

$$z^0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

是 R^3 空间上的球面.所以，本例中的 R^4 空间上的曲面，在 $z = z^0$ 决定的超平面的交曲面，都是 R^3 空间上的球面.但本例曲面在 R^4 空间上却不是球面.比如，在上述 $\boldsymbol{x}^0$ 点处，以拟特征向量$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1$ 为切方向的法截曲线

$$\begin{cases} x_{1,2,3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{15}}t + \dfrac{2}{\sqrt{15}}s \\ z = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}t - \dfrac{1}{\sqrt{5}}s \end{cases}$$

由

$$1 + \frac{2}{\sqrt{5}}t - \frac{1}{\sqrt{5}}s = 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{15}}t + \frac{2}{\sqrt{15}}s\right)^2$$

经整理可得

$$s = -\frac{1}{2}t + \frac{5}{8}\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}t + 5\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{5\sqrt{5}}{8} \quad \left(t \geqslant -\frac{5\sqrt{5}}{8}\right)$$

是法截曲线在 Ots 坐标系上的表示.这条曲线近似于顶点在原点，开口向下的抛物线[1].

这里应再次指出，(3.1.1.79)式决定的 Gauss 曲率 κ_F 与(3.1.1.46)式决定的 Gauss 曲率 κ_f 在几何意义上的区别.当 κ_F、κ_f 是指的同一个曲面上的曲率时，切不可混淆.

如有

$$F:\ z = f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$$

是 R^{m+1}空间上的 m 维曲面 F.则在 R^{m+1}空间上的曲面 F 的$(\boldsymbol{x}^0,\ z^0)$点处的 Gauss 曲率，是 κ_F(见(3.1.1.79)式).而以

$$z = z^0$$

[1] 当 $t < -\dfrac{5\sqrt{5}}{8}$ 时，曲面与上述法截平面不相交.

超平面与曲面 F 的交曲面上，有

$$f: z^0 = f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$$

决定的曲面 f 函数. 则在曲面 f 上的 $(\boldsymbol{x}^0, z^0)$ 点处，曲面 f 的 Gauss 曲率是 κ_f（见(3.1.1.46)式）. 此时曲面 f 是 R^m 空间上的 $m-1$ 维曲面.

这可以参见图 2.1.2. 这里的 κ_F 曲率相当于图 2.1.2 中的法截曲线 f_a 在 A 点的曲率，而 κ_f 曲率相当于图 2.1.2 中的 f_0 曲线在 A 点的曲率，且这 2 条曲线处于同一个曲面上.

例 3.1.1.3 R^3 空间中的线性齐次曲面函数

$$z = x_1^a x_2^b \quad a, b > 0 \quad a + b = 1 \quad x_1, x_2, z > 0$$

是经济学中常用的函数形式. 任取 $(x_1, x_2, z) > 0$ 的点，

$$\nabla f = z \begin{bmatrix} \dfrac{a}{x_1} \\ \dfrac{b}{x_2} \end{bmatrix} \qquad \nabla^2 f = abz \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{x_1^2} & \dfrac{1}{x_1 x_2} \\ \dfrac{1}{x_1 x_2} & -\dfrac{1}{x_2^2} \end{bmatrix}$$

取 R^3 上的定向为 $\left(-\dfrac{az}{x_1}, -\dfrac{bz}{x_2}, 1\right)^{\mathrm{T}}$.

可知

$$|H| = a^2 b^2 z^2 \left(\frac{1}{x_1^2 x_2^2} - \frac{1}{x_1^2 x_2^2}\right) = 0$$

$$|H_J| = z^3 \cdot \begin{vmatrix} -\dfrac{ab}{x_1^2} & \dfrac{ab}{x_1 x_2} & \dfrac{a}{x_1} \\ \dfrac{ab}{x_1 x_2} & -\dfrac{ab}{x_2^2} & \dfrac{b}{x_2} \\ \dfrac{a}{x_1} & \dfrac{b}{x_2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{abz^3}{x_1^2 x_2^2} > 0$$

所以，这一线性齐次曲面上，总有

$$\kappa_F \equiv 0 \quad \kappa_f > 0$$

成立. 其中 $\kappa_F \equiv 0$ 表示这一曲面的任一点上，都有一个主法方向上的法截曲线是直线. 这可以令

$$x_2 = c \cdot x_1 \quad c > 0$$

得到

$$z = c^b \cdot x_1$$

即知.但可以验证,按(3.1.1.74)式,得到构成 κ_F 的 2 个拟特征值分别是

$$\mu_1^F = 0,\ \mu_2^F = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + z^2)\,\dfrac{abz}{x_1^2 x_2^2}}{1 + \dfrac{a^2 z^2}{x_1^2} + \dfrac{b^2 z^2}{x_2^2}} > 0$$

所以,这表示它仍是 R^3 上的一个曲面而非平面.而构成 κ_f 的则只有 1 个拟特征值,按(3.1.1.53)式,应为

$$\mu_1^f = -\frac{\dfrac{abz}{x_1^2 x_2^2}}{\dfrac{a^2}{x_1} + \dfrac{b^2}{x_2^2}} < 0$$

这即表示 $\kappa_f = -\dfrac{\mu_1^f}{\|\nabla f\|} > 0$,说明对任一 $z^0 > 0$,

$$z^0 = x_1^a x_2^b \quad (z^0 - \text{const})$$

决定的曲线(可将它看成是 Ox_1x_2 平面上的曲线),总是凸向 Ox_1x_2 坐标系原点的(因∇f 给出的定向恒指向 Ox_1x_2 坐标系正象限的右上方向).

由此例可见 κ_F, κ_f 意义的区别.

这里还应指出 Monge 形式的曲面函数,在作定理 3.1.1.8 所指的相似变换时,应是指

$$\begin{bmatrix} H_F & \nabla F \\ \nabla F^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} Q_F & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_F & \nabla F \\ \nabla F^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_F & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

其中 $Q_F \in R^{(m+1)\times(m+1)}$　$Q_F^{\mathrm{T}} Q_F = I_{m+1}$.而以下相似关系

$$\begin{bmatrix} H & \nabla f \\ \nabla f^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H & \nabla f \\ \nabla f^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

其中 $Q \in R^{m\times m}$　$Q^{\mathrm{T}} Q = I_m$,是基于一般形式的曲面函数

$$z^0 = f(\boldsymbol{x})$$

而言的,二者不应混淆.

同样,对于单调增变换,也类似.设 $T(\cdot)$是单调增变换,则

$$T(\bar{\boldsymbol{x}}) = T(f(\boldsymbol{x}) - z) = c \quad (c - \text{const})$$

是不会改变主法曲率 κ_F^i 的,但若作

$$s = T(f(\boldsymbol{x}))$$

则这一曲面函数的所有主法曲率 κ_F^i 不能保证是不变的. 然而,对一般形式的曲面函数,

$$z^0 = f(\boldsymbol{x}) \text{ 与 } s^0 = T(f(\boldsymbol{x})) \quad s^0 = T(z^0)$$

主法曲率一定是不变的. 这也是不应混淆的.

§3.1.2 多重约束下的拟特征值、拟特征向量

利用以上关于拟特征值、拟特征向量的分析,可推广到 A 矩阵在多重约束(加边)下的拟特征值(向量)的分析上.

设 $A \in R^{m\times m}$, $\boldsymbol{b}_i \in R^m$ $\boldsymbol{b}_i \neq \boldsymbol{0}$ $i = 1, 2, \cdots, n$, $1 \leqslant n < m$.

构造

$$A_{bb} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} & \\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \\ \boldsymbol{b}_n^{\mathrm{T}} & \end{bmatrix} \qquad —(3.1.2.1)$$

其中 $\boldsymbol{0}$ 是 $n\times n$ 阶 0 矩阵,A_{bb} 是 $(m+n)\times(m+n)$ 阶矩阵. 称 A_{bb} 是 **n 重加边矩阵.**

以下问题是导出 n 重加边矩阵的几何背景. 设

$$f_i:\ f_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \boldsymbol{x} \in D_i \subset R^m \quad i = 1, 2, \cdots, n \quad 1 \leqslant n < m \qquad —(2.2.2.19)$$

则(2.2.2.19)式决定了一条曲面 f_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ 的交曲线(曲面)f. 显然,这条交曲线 f 同时又是各个曲面 f_i 上的曲线(设所有 f_i 的交集非空). 这样,记 H_i 是 $f_i(\boldsymbol{x})$的 Hessian 矩阵,∇f_i 是梯度向量,则若要求曲线 f 在曲面 f_i 上的法截曲率的主法曲率及主法方向,那么,应当是求取曲线 f 上的 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切超平面上的任取的单位方向向量$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$,并构造曲线 f 作为曲面 f_i 的曲线的法截曲率

$$\kappa_{f_i}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = -\frac{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} H_i \tilde{\boldsymbol{\alpha}}}{\|\nabla f_i\|} \qquad —(3.1.2.2)$$

并对$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$,求取 κ_{f_i} 的极值. 由于$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$是曲线 f 的切向量,故它一定是以下方程组的解,

$$\begin{cases} \nabla f_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0 & j = 1, 2, \cdots, n \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 1 & \end{cases} \qquad —(3.1.2.3)$$

设 Λ_n 是(3.1.2.3)式的列向量正交、归一化的基础解系矩阵(任取),则 Λ_n 是 $m\times(m-n)$ 阶矩阵. 这里设$\nabla f_j(\boldsymbol{x}^0)$是线性无关的,否则可以剔除线性相关的曲面函数. 有

$$\boldsymbol{\alpha}=\Lambda_n\boldsymbol{t}\quad \boldsymbol{t}\in R^{m-n}\quad \boldsymbol{t}\neq 0 \qquad —(3.1.2.4)$$

这样,(3.1.2.2)式的极值,等价于 RalyLiagh 商 $R_n(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})$

$$\text{极值}\quad R_n(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})=\frac{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Lambda_n^{\mathrm{T}}H_i\Lambda_n\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}}\quad \left[\tilde{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{\Lambda_n\boldsymbol{t}}{(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t})^{\frac{1}{2}}}\right] \qquad —(3.1.2.5)$$

由这一极值规划,即可得到,极值 $R_n(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})=R_n^i$,一定是以下特征多项式的根,

$$|\Lambda_n^{\mathrm{T}}H_i\Lambda_n-R_n^iI_{(m-n)}|=0 \qquad —(3.1.2.6)$$

且由于 $\Lambda_n^{\mathrm{T}}H_i\Lambda_n$ 是实对称矩阵,故 R_n^i 有$(m-n)$个实数根.

但(3.1.2.5)式的无约束极值规划又等价于以下约束极值规划

$$\left.\begin{array}{l}\text{极值}\quad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}H_i\boldsymbol{\alpha}\\ \text{s.t.}\begin{cases}\nabla f_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0 & j=1,2,\cdots,n\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1\end{cases}\end{array}\right\} \qquad —(3.1.2.7)$$

构造 Lagrange 函数

$$L=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}H_i\boldsymbol{\alpha}+\mu(1-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})+2\sum_j^n\gamma_j\nabla f_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} \qquad —(3.1.2.8)$$

由极值条件

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha_s}=2\cdot\left(\sum_{k=1}^m f_{sk}^i\alpha_k-\mu\alpha_s+\sum_{j=1}^n\gamma_jf_j^s\right)=0\quad s=1,2,\cdots,m \qquad —(3.1.2.9)$$

其中

$$f_{sk}^i=\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_s\partial x_k}\quad f_j^s=\frac{\partial f_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_s}$$

(3.1.2.9)式与约束条件合并写成矩阵形式

$$\begin{cases}(H_i-\mu I_m)\boldsymbol{\alpha}+\sum_{j=1}^n\gamma_j\nabla f_j=\boldsymbol{0}\\ \sum_{j=1}^n\nabla f_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0\end{cases} \qquad —(3.1.2.10)$$

即知 $\boldsymbol{\alpha}$ 是以下方程组的解

$$\begin{bmatrix} H_i-\mu I_m & \nabla f_1, \nabla f_2, \cdots, \nabla f_n \\ \nabla f_1^{\mathrm{T}} & \\ \nabla f_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \vdots & \\ \nabla f_n^{\mathrm{T}} & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}=\mathbf{0} \quad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1 \qquad —(3.1.2.11)$$

故知 μ 应是以下拟特征多项式的根

$$\begin{vmatrix} \mu I_m-H_i & \nabla f_1 & \nabla f_2 & \cdots & \nabla f_n \\ \nabla f_1^{\mathrm{T}} & & & & \\ \nabla f_2^{\mathrm{T}} & & \mathbf{0} & & \\ \vdots & & & & \\ \nabla f_n^{\mathrm{T}} & & & & \end{vmatrix}=0 \qquad —(3.1.2.12)$$

并且,若设$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$是(3.1.2.10)式的解,则总有

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} H_i \hat{\boldsymbol{\alpha}}=\mu$$

故知(3.1.2.12)式的根 μ,就是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} H_i \boldsymbol{\alpha}$ 的极值.这样的$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$就是对应于 μ 的拟特征向量.曲线 f 在曲面 f_i 上的主法曲率就是

$$\kappa_{f_i}^j=-\frac{\mu_j}{\|\nabla f_i\|} \quad j=1,2,\cdots,m-n \qquad —(3.1.2.13)$$

由 μ_j 决定的(3.1.2.11)式的解$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_j$ 就是主法方向.

多重约束的拟特征值的几何背景还可以由 Riemann 曲率予以解释(见§4 章).

一般地,就有以下定义与定理

定义 3.1.2.1 设 $A\in R^{m\times m}$ $\boldsymbol{b}_i\in R^m$ $\boldsymbol{b}_i\neq\mathbf{0}$ $i=1,2,\cdots,n$, $1\leqslant n<m$. $\boldsymbol{b}_i$ 是线性无关的,$A_{bb}\in R^{(m+n)\times(m+n)}$ 是 A、$\boldsymbol{b}_i$ 构造的 n 重加边矩阵.则称多项式

$$\begin{vmatrix} \mu I_m-A & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} & & & & \\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} & & \mathbf{0} & & \\ \vdots & & & & \\ \boldsymbol{b}_n^{\mathrm{T}} & & & & \end{vmatrix}=0 \qquad —(3.1.2.14)$$

的根 μ_j, $j=1,2,\cdots,m-n$ 是A_{bb} 的**n 重约束拟特征值**,称(3.1.2.14)式是 A_{bb} 的**n 重约束拟特征多项式**.

并称以下方程组的解$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_j$是**$n$重约束拟特征向量**.

$$\begin{cases}(\Lambda-\mu_j I_m)\boldsymbol{\alpha}+\gamma_1\boldsymbol{b}_1+\gamma_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+\gamma_n\boldsymbol{b}_n=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0\\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1\end{cases}\quad —(3.1.2.15)$$

■

定理 3.1.2.1　$A_{bb}\in R^{(m+n)\times(m+n)}$是$A\in R^{m\times m}$，$\boldsymbol{b}_i\in R^m$　$i=1,2,\cdots,n$　$1\leqslant n<m$，$\boldsymbol{b}_i$是线性无关的构造的n重加边矩阵，则A_{bb}有$m-n$个n重拟特征值μ_j，且当$A^{\mathrm{T}}=A$，μ_j均为实数. 并有

$$\mu_1\mu_2\cdot\cdots\cdot\mu_{m-n}=(-1)^n\frac{|A_{bb}|}{|B^{\mathrm{T}}B|}\quad —(3.1.2.16)$$

$$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{m-n}=\mathrm{tr}(C_n^{\mathrm{T}}AC_n)\quad —(3.1.2.17)$$

其中

$$\begin{cases}B=[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n]\quad B\in R^{m\times n}\\ B^{\mathrm{T}}C_n=0\quad C_n^{\mathrm{T}}C_n=I_{(m-n)}\quad C_n\in R^{m\times(m-n)}\end{cases}\quad —(3.1.2.18)$$

C_n是符合以上要求的任一矩阵.

A_{bb}矩阵每个单根的n重约束拟特征值μ_j可决定一个拟特征向量$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_j$，且各$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_j$线性无关，而每个$k$重根的$n$重约束拟特征值$\mu_i$可决定不超过$k$个的线性无关拟特征向量$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{i_s}$，$s=1,2,\cdots,h$，$h\leqslant k$. 当$A^{\mathrm{T}}=A$，则$A_{bb}$有$m-n$个正交的拟特征向量. ■

这里，$\boldsymbol{b}_i$向量组必须是线性无关的，否则，(3.1.2.14)式对任意的μ都成立即是不定的，并且$|B^{\mathrm{T}}B|=0$；其次$n\geqslant m$时，(3.1.2.14)式将恒为0，即与μ无关，故也是不定的. 所以，n重约束拟特征多项式要求$\boldsymbol{b}_i$向量组线性无关和$1\leqslant n<m$这2个条件.

当$n=1$，(3.1.2.16)式就是(3.1.1.52)式.(3.1.2.17)式的具体形式，将在以下推出(见(3.2.3.13)式).

定理 3.1.2.2　设

$$f_i:f_i(\boldsymbol{x})=0\quad \boldsymbol{x}\in D_i\subset R^m\quad i=1,2,\cdots,n\quad 1\leqslant n<m$$

且

$$\nabla f_i(\boldsymbol{x}^0)\neq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}^0\in\bigcap_i D_i$$

线性无关. 则以上方程组决定的交曲面f，在$\boldsymbol{x}^0$点处，作为曲面f_j上的$(m-n)$

维曲线，相对于曲面 f_j 的主法曲率有 $m-n$ 个，

$$\kappa_{f_j}^i = -\frac{\mu_i}{\|\nabla f_j\|} \quad i=1,2,\cdots,m-n$$

且 μ_i 是多项式

$$\begin{vmatrix} \mu I_m - H_j & \nabla f_1 & \nabla f_2 & \cdots & \nabla f_n \\ \nabla f_1^{\mathrm T} & & & & \\ \nabla f_2^{\mathrm T} & & & & \\ \vdots & & 0 & & \\ \nabla f_n^{\mathrm T} & & & & \end{vmatrix} = 0 \quad H_j = \nabla^2 f_j(\boldsymbol{x}^0)$$

的根，且都是实数. $m-n$ 个主法方向是方程组

$$\begin{cases} (H_j - \mu_i I_m)\boldsymbol{\alpha} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \nabla f_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} \nabla f_k^{\mathrm T} \boldsymbol{\alpha} = 0 \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha} = 1 \end{cases} \quad i=1,2,\cdots,m-n$$

的解 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$，且各个 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 是正交的，γ_k 是辅助变量. ■

交曲面 f 作为曲面 f_j 上的一个 $m-n$ 维曲面的总曲率 κ_{f_j}，规定为

$$\kappa_{f_j} = \kappa_{f_j}^1 \cdot \kappa_{f_j}^2 \cdot \cdots \cdot \kappa_{f_j}^{m-n} = (-1)^m \frac{|H_{\partial\partial}^j|}{|B^{\mathrm T}B|} \cdot \frac{1}{\|\nabla f_j\|^{m-n}} \qquad \text{—(3.1.2.19)}$$

其中

$$H_{\partial\partial}^j = \begin{bmatrix} H_j & \nabla f_1 & \nabla f_2 & \cdots & \nabla f_n \\ \nabla f_1^{\mathrm T} & & & & \\ \nabla f_2^{\mathrm T} & & & & \\ \vdots & & 0 & & \\ \nabla f_n^{\mathrm T} & & & & \end{bmatrix} \qquad \text{—(3.1.2.20)}$$

平均曲率 h_{f_j}，规定为

$$h_{f_j} = \frac{\kappa_{f_j}^1 + \kappa_{f_j}^2 + \cdots + \kappa_{f_j}^{m-n}}{m-n} = -\frac{\mathrm{tr}(\Lambda_n^{\mathrm T} H_j \Lambda_n)}{m-n} \qquad \text{—(3.1.2.21)}$$

其具体形式可见(3.2.3.16)式.

拓展以上关于多重约束加边 Hessian 矩阵拟特征值的几何背景也是有意义的. 根据§2.4.4 节关于 R^m 空间上 n 维曲面的主法方向和 Gauss 曲率的分析，可将这一内容与多重约束加边 Hessian 矩阵的拟特征值结合起来.

设 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) \in R^m \quad \boldsymbol{u} \in D_u \subset R^n$ 是 R^m 空间上的正则参数曲面片. 取 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的函数形式是多重 Mogne 形式的，设 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x} \in R^n$，$\boldsymbol{z} \in R^{m-n}$，且

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}):\begin{cases}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) \qquad \boldsymbol{f} = (f_1,\ \cdots,\ f_{m-n})^{\mathrm{T}}\end{cases}$$

有

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} I_n \\ \nabla \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}_{m\times n} \qquad \nabla \boldsymbol{f} = [\nabla f_1,\ \cdots,\ \nabla f_{m-n}]_{n\times(m-n)}$$

对$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$的列向量作多重矢量积，可得其法空间的基向量组为

$$\Pi_r(\boldsymbol{u}) = \Pi_r = \begin{bmatrix} -\nabla \boldsymbol{f} \\ I_{m-n} \end{bmatrix}_{m\times(m-n)}$$

任取 $\boldsymbol{t}\in R^{m-n}$，可构造$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$的法方向向量

$$\boldsymbol{n} = \frac{\Pi_r \boldsymbol{t}}{(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \Pi_r^{\mathrm{T}} \Pi_r \boldsymbol{t})^{1/2}} \qquad \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \Pi_r^{\mathrm{T}} \Pi_r \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{t} + \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\ \nabla \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\ \nabla \boldsymbol{f} \boldsymbol{t}$$

便有

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\begin{bmatrix} -\sum\limits_{i=1}^{m-n} \nabla^2 f_i t_i \\ 0_{m-n} \end{bmatrix}}{(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \Pi_r^{\mathrm{T}} \Pi_r \boldsymbol{t})^{1/2}} - \frac{\boldsymbol{n}}{2} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \Pi_r^{\mathrm{T}} \Pi_r \boldsymbol{t})/\partial \boldsymbol{u}}{(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \Pi_r^{\mathrm{T}} \Pi_r \boldsymbol{t})^{1/2}}$$

0_{m-n}是 $m-n$ 阶 0 矩阵. 于是在 $\boldsymbol{n}$ 法方向下，$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的第二基本二次型矩阵是

$$\mathit{II} = -\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-n} \nabla^2 f_i t_i}{(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \Pi_r^{\mathrm{T}} \Pi_r \boldsymbol{t})^{1/2}}$$

第一基本不变量矩阵是

$$\boldsymbol{I} = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$$

故在 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面上，在 $\boldsymbol{n}$ 法方向下，曲面的法曲率 $\kappa_n(\boldsymbol{t})$是

$$\kappa_n(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I\!I}\, \mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I}\, \mathrm{d}\boldsymbol{u}} \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{u} \in R^n \quad \mathrm{d}\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$$

记

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \mathrm{d}\boldsymbol{u} \in R^m$$

$$H_r = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m-n} \nabla^2 f_i t_i & 0_{n\times(m-n)} \\ 0_{(m-n)\times n} & 0_{(m-n)\times(m-n)} \end{bmatrix} \qquad —(3.1.2.22)$$

从而将法曲率 $\kappa_n(\boldsymbol{t})$ 写成 $\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{t})$，

$$\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} H_r \boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}} \cdot \frac{1}{(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \Pi_r^{\mathrm{T}} \Pi_r \boldsymbol{t})^{1/2}} \qquad —(3.1.2.23)$$

由拟特征值方法，$\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{t})$ 关于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的极值，等价于以下条件极值规划

$$\begin{cases} \text{极值：} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} H_r \boldsymbol{\alpha} \\ \text{s. t.} \begin{cases} \Pi_r^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} = 1 \end{cases} \end{cases} \qquad —(3.1.2.24)$$

于是，以上极值规划决定的 κ_n 极值，是

$$\kappa_n^i(\boldsymbol{t}) = -\frac{\mu_i(\boldsymbol{t})}{(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \Pi_r^{\mathrm{T}} \Pi_r \boldsymbol{t})^{1/2}} \qquad (3.1.2.25)$$

其中的 $\mu_i(\boldsymbol{t})$ 是多重约束拟特征值多项式

$$\begin{vmatrix} H_r - \mu I_m & \Pi_r \\ \Pi_r^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad —(3.1.2.26)$$

的根. 当 $n=m-1$，则在以上诸式中取 $\boldsymbol{t} = t_1 = 1$，(3.1.2.25)式就是(3.1.1.10)式.

将 Π 矩阵看成是 $m-n$ 个 Mogne 形式的曲面函数

$$z_i = f_i(\boldsymbol{u}) \quad i = 1, \cdots, m-n \quad \boldsymbol{u} \in R^n$$

给出的梯度向量

$$\nabla F_i = (-\nabla f_i^{\mathrm{T}}, 1)^{\mathrm{T}} \qquad F_i(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}) = z_i - f_i(\boldsymbol{u}) = 0 \quad \boldsymbol{z} \in R^{m-n}$$

为列向量组成矩阵. 从而将(3.1.2.22)式看成是

$$H_r = \sum_{i=1}^{m-n} \nabla^2 F_i t_i \qquad —(3.1.2.27)$$

也是完全可以的.

因此,取 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{z})\in R^m$ 可以将其用一般的曲面函数形式重新表述如下:设

$$f_i(\boldsymbol{x})=0 \quad \boldsymbol{x}\in D_x^i\subset R^m \quad i=1,\cdots,m-n$$

给出了 R^m 空间上的 $m-n$ 个正则曲面. 若 $D_x=\bigcap_i D_x^i$ 非空,且是单连通开集,Jacobi 矩阵

$$G=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] \quad i=1,\cdots,m-n,\ j=1,\cdots,m$$

的秩

$$\operatorname{rank} G(\boldsymbol{x})=m-n \quad \boldsymbol{x}\in D_x$$

那么, $f_i(\boldsymbol{x})=0\ \forall i$ 在 $\boldsymbol{x}\in D_x$ 总可以决定一个 n 维的交曲面.

取 $\boldsymbol{t}\in R^n \quad \boldsymbol{t}\neq\boldsymbol{0}$, 则

$$\boldsymbol{n}=\frac{\nabla\boldsymbol{f}\boldsymbol{t}}{(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{f}\boldsymbol{t})^{1/2}} \qquad \nabla\boldsymbol{f}=\Pi$$

给出了由 $\boldsymbol{t}$ 决定的该交曲面上的一个单位法方向 $\boldsymbol{n}$. 在这个 $\boldsymbol{n}$ 下,交曲面具有的 n 个主法曲率是(3.1.2.25)式给出的 κ_n^i,其中拟特征值 $\mu_i(\boldsymbol{t})$ 是以下拟特征多项式的根

$$\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{m-n}\nabla^2 f_i t_i-\mu I_m & \nabla\boldsymbol{f}\\ \nabla\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} & 0\end{vmatrix}=0 \qquad \text{—(3.1.2.28)}$$

由此即知交曲面在 $\boldsymbol{n}$ 法方向下的 Gauss 曲率 $\kappa(\boldsymbol{t})$ 是

$$\kappa(\boldsymbol{t})=(-1)^m\frac{\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{m-n}\nabla^2 f_i t_i & \nabla\boldsymbol{f}\\ \nabla\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} & 0\end{vmatrix}}{(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{f}\boldsymbol{t})^{\frac{n}{2}}\ |\nabla\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{f}|} \qquad \text{—(3.1.2.29)}$$

$|\nabla\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{f}|$ 是 $\nabla\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{f}$ 矩阵的行列式.

当 $n=m-1$, $\boldsymbol{t}=t_1=1$, (3.1.2.29)式就是(3.1.1.46)式. 这里的(3.1.2.29)式也可以从(3.2.3.10)式中导出.

如同§2.4.4节的方法,对(3.1.2.29)式再构造极值规划

$$\begin{cases}\text{极值: } \kappa(\boldsymbol{t})\\ \text{s.t.} \quad \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{f}\boldsymbol{t}=1\end{cases} \qquad \text{—(3.1.2.30)}$$

显然，这就等价于以下形式的极值规划

$$\begin{cases} \text{极值：} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{m-n} \nabla^2 f_i t_i & \nabla \boldsymbol{f} \\ \nabla \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} \\ \text{s. t.} \quad \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{f} \boldsymbol{t} = 1 \end{cases} \qquad \text{—(3. 1. 2. 31)}$$

求解这个极值规划的方法，在§2.4.4节中已作过一般性的说明. 只不过以上规划中目标函数现在是一个多重加边广义的 Hessian 矩阵. 在方法上没有什么特别之处. 记

$$H_{\partial\partial}(\boldsymbol{t}) = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{m-n} \nabla^2 f_i t_i & \nabla \boldsymbol{f} \\ \nabla \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{—(3. 1. 2. 32)}$$

(3.1.2.31)式的极值条件是

$$\frac{\partial H_{\partial\partial}(\boldsymbol{t})}{\partial \boldsymbol{t}} - 2\zeta \nabla \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{t} = \boldsymbol{0} \qquad \text{—(3. 1. 2. 33)}$$

其中 ζ 是 L—乘子. 在极值条件(3.1.2.33)式给出的 $\boldsymbol{t}^*$ 下，即有

$$\kappa(\boldsymbol{t}^*) = (-1)^m \frac{H_{\partial\partial}(\boldsymbol{t}^*)}{|\nabla \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{f}|} \qquad \text{—(3. 1. 2. 34)}$$

其中 $\boldsymbol{t}^*$ 是(3.1.2.31)式的极值解、$\kappa(\boldsymbol{t}^*)$是(3.1.2.23)式关于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的极值解 κ_n^i 全体的积再除以$|\nabla \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{f}|$.

在已得到 $\boldsymbol{t}^*$ 的条件下，亦可以决定对应的拟特征值 $\mu(\boldsymbol{t}^*)$. $\mu(\boldsymbol{t}^*)$是以下拟特征多项式的根

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{m-n} \nabla^2 f_i t_i^* - \mu I_m & \nabla \boldsymbol{f} \\ \nabla \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{—(3. 1. 2. 35)}$$

得$\mu_j(\boldsymbol{t}^*)$　$j = 1, 2, \cdots, n$ 后，便能对应地得拟特征向量 $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t}^*)$. $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t}^*)$是以下方程组的解

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{m-n} \nabla^2 f_i t_i^* - \mu_j(\boldsymbol{t}^*) \cdot I_m\right) \cdot \boldsymbol{\alpha} + \nabla \boldsymbol{f} \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{0} \\ \nabla \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} = 1 \end{cases} \qquad \text{—(3. 1. 2. 36)}$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 $m-n$ 辅助变量.

由§2.4.4节的分析，(3.1.2.35)式总可表成 $t_1^{k_1}t_2^{k_2}\cdot\cdots\cdot t_{m-n}^{k_{m-n}}$ 因子的齐次多项式(在§2.4.4节用 $F(\boldsymbol{t})$ 表示)．这里

$$k_1+k_2+\cdots+k_{m-n}=n \quad k_i\geqslant 0$$

经由适当的重排，形式上，(3.1.2.33)式总可以表成

$$[A(\boldsymbol{t})-\xi\nabla\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{f}]\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0} \qquad (\xi=2\zeta) \qquad —(3.1.2.37)$$

在§2.4.4节已说明，当 $n=2$，$A(\boldsymbol{t})=\nabla^2F$，成为与 $\boldsymbol{t}$ 无关的矩阵，则(3.1.2.37)式就可看成是类似于Weigarten映射特征多项式(关于 ξ 乘子)的情形．但在 $n\geqslant 3$ 时，$A(\boldsymbol{t})$ 与 $\boldsymbol{t}$ 有关，从而(3.1.2.37)式具有非线性特征，不再能利用矩阵特征值方式求解．

以下结合示例给予进一步的说明．

例 3.1.2.1　R^3 空间上

$$\begin{cases}f_1: x^2+y^2=1\\ f_2: x^2+z^2=2\end{cases}$$

以下先给出 $f_{1,2}$ 交曲线在 f_1、f_2 曲面上的法截曲率

由

$$\nabla f_1=\begin{bmatrix}2x\\2y\\0\end{bmatrix}\quad \nabla^2 f_1=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\nabla f_2=\begin{bmatrix}2x\\0\\2z\end{bmatrix}\quad \nabla^2 f_2=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$$\nabla\boldsymbol{f}=[\nabla f_1,\nabla f_2]$$

应要求

$$|\nabla\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{f}|>0\Rightarrow 2-x^4>0$$

故取该交曲线的定义域是 $-1<x,\ y<1,\ -2<z<2$

这一条件在 f_1、f_2 曲面上可以成立．故 $f_{1,2}$ 有交曲线存在．此即表示 ∇f_1、∇f_2 是线性无关的向量．

在 f_1 曲面上交曲线的法曲率．由2重约束拟特征值多项式

$$\begin{vmatrix}\mu-2&0&0&2x&2x\\0&\mu-2&0&2y&0\\0&0&\mu&0&2z\\2x&2y&0&0&0\\2x&0&2z&0&0\end{vmatrix}=0$$

可解得

$$\mu_1 = \frac{2z^2}{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2} = \frac{2z^2}{2-x^4}$$

故法曲率是

$$\kappa_{f_1} = -\frac{z^2}{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2} = -\frac{z^2}{2-x^4}$$

在 f_2 曲面上交曲线的法曲率.

$$\begin{vmatrix} \mu-2 & 0 & 0 & 2x & 2x \\ 0 & \mu & 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & \mu-2 & 0 & 2z \\ 2x & 2y & 0 & 0 & 0 \\ 2x & 0 & 2z & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

解得

$$\mu_2 = \frac{4y^2}{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2} = \frac{4y^2}{2-x^4}$$

法曲率是

$$\kappa_{f_2} = -\frac{\sqrt{2}y^2}{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2} = -\frac{\sqrt{2}y^2}{2-x^4}$$

作为验证,可以求出 f_1、f_2 的交曲线参数函数.例如取

$$\boldsymbol{x}(t):\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=t \\ z=\sqrt{1+t^2} \end{cases} \qquad -1<t<1$$

可得 $\boldsymbol{x}(t)$ 的主法方向是

$$\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)^{3/2}}\begin{bmatrix} \dfrac{x^2y^2-y^2z^2-z^4}{xz^2} \\ -\dfrac{x^4y+yz^4}{x^2z^2} \\ \dfrac{x^4+x^2y^2-y^2z^2}{x^2z} \end{bmatrix} \qquad \text{—(a)}$$

在 $\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}$ 主法方向上 $\boldsymbol{x}(t)$ 的(绝对)曲率,

$$\kappa_x = \frac{(x^6+z^6+y^2(x^2-z^2)^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{—(b)}$$

容易验证 κ_x、$\kappa_{f_{1,2}}$ 符合定理 2.1.1，即

$$\kappa_{f_1} = \kappa_x \cdot \cos < (\nabla f_1, \nabla^2 \tilde{x})$$

$$\kappa_{f_2} = \kappa_x \cdot \cos < (\nabla f_2, \nabla^2 \tilde{x})$$

但可以想见，对于一般的由(2.2.2.19)式中的 n 个曲面($1<n<m-1$)决定的交曲面上，由于这样的交曲面不是严格意义上的曲线，是不能成立定理 2.2.3.1(或说是推广应用这一定理)的.

以下，选取 $x^0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$ 为例，验证(3.1.2.31) 式的极值规划.

由

$$H_{\partial\partial}(t) = \begin{vmatrix} 2t_1 + 2t_2 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 2t_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2t_2 & 0 & \sqrt{5} \\ \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 40t_1 + 16t_2$$

$$\nabla \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \qquad |\nabla \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{f}| = 23$$

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{f} \boldsymbol{t} = 4t_1^2 + 6t_1 t_2 + 8t_2^2$$

得极值规划

$$\begin{cases} \text{极值}: 40t_1 + 16t_2 \\ \text{s.t.} \quad 4t_1^2 + 6t_1 t_2 + 8t_2^2 = 1 \end{cases}$$

极值条件是

$$\zeta \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix}$$

显然 $\zeta \neq 0$. 于是有解

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{23\zeta} \begin{bmatrix} 136 \\ -28 \end{bmatrix}$$

并由约束条件得到

$$\zeta = \pm 8\left(\frac{39}{23}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \pm \frac{1}{2\sqrt{897}} \begin{bmatrix} 34 \\ -7 \end{bmatrix}$$

以及极值法方向

$$\boldsymbol{n} = \pm \frac{1}{2\sqrt{897}} \begin{bmatrix} 27\sqrt{3} \\ 34 \\ -7\sqrt{5} \end{bmatrix} = \nabla f_1 t_1 + \nabla f_2 t_2 \qquad \text{—(c)}$$

现将 $\boldsymbol{x}^0$ 代入上面的(a)式,所得到的按 R^3 空间上的1维参数曲线函数形式决定的主法方向$\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}$向量就是与这里的 $\boldsymbol{n}$ 共线的向量.当取以上交曲面的定向为自然定向,即在以上(c)式的右边取"+",那么,$\boldsymbol{n}$ 的方向与$\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}$相反,反之,则与$\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}$同向.

将 $\boldsymbol{x}^0$ 代入(b)式,便可验证

$$\kappa_x = \frac{|H_{\partial\partial}(\boldsymbol{t})|}{|\nabla \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{f}|}$$

之所以以上等号右边分子中取绝对值,是因为这里的 κ_x 是参数曲线上的绝对曲率.相比较而言,在(3.1.2.34)式中则是按交曲面上的Gauss曲率 $\kappa(\boldsymbol{t})$的概念给出的关系.而曲面的Gauss曲率具有符号,并由曲面定向决定.故(3.1.2.34)式中,$H_{\partial\partial}(\boldsymbol{t})$不能取绝对值.但由(3.1.2.34~35)式即知,利用多重约束的拟特征值方法,曲线上的绝对曲率实则可理解为若干曲面的交曲面上的Gauss曲率的绝对值.或者说,曲线、曲面的界限不再是不可逾越的.

例 3.1.2.2 对例2.4.4.6中的交曲面求其在 f_1 曲面上的主法曲率

$$\begin{cases} f_1: x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = a^2 - b^2 \\ f_2: x_1 x_2 + x_3 x_4 = ab \end{cases}$$

由

$$\nabla f_1 = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -2x_2 \\ 2x_3 \\ -2x_4 \end{bmatrix} \quad \nabla f_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

在 f_1 曲面上的2重约束拟特征值多项式是

$$\begin{vmatrix} \mu-2 & 0 & 0 & 0 & 2x_1 & x_2 \\ 0 & \mu+2 & 0 & 0 & -2x_2 & x_1 \\ 0 & 0 & \mu-2 & 0 & 2x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & \mu+2 & -2x_4 & x_3 \\ 2x_1 & -2x_2 & 2x_3 & -2x_4 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & x_4 & x_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

得

$$\mu = \pm \frac{2((x_1^2 - x_4^2)^2 + (x_2^2 - x_3^2)^2 + 2(x_1x_3 + x_2x_4)^2 + 2a^2b^2)^{\frac{1}{2}}}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

主法曲率则是

$$\kappa_{f_1} = \pm \frac{((x_1^2 - x_4^2)^2 + (x_2^2 - x_3^2)^2 + 2(x_1x_3 + x_2x_4)^2 + 2a^2b^2)^{\frac{1}{2}}}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{\frac{3}{2}}}$$

由例 2.4.4.6 的说明，$f_{1,2}$曲面的交曲面(2 维曲面)的法空间中的任一方向向量均是主法方向. 即主法方向是不确定的. 显然，不能推广定理 2.2.3.1 应用于此例. 但可以想见，若再任取这个 2 维交曲面上的严格意义上的曲线(由单参数表示)，则仍可应用定理 2.2.3.1. 这即说明虽然本书有时不加区别称 R^m 空间上的 n 维曲面($1<n<m-1$)为 n 维曲线(或相反)，但 n 维曲线与严格意义上的 1 维曲线(单参数曲线)仍具有性质上的差异[1].

再利用(3.1.2.31)式规划来验证本例交曲面具有的法向迷向性质. 由

$$\nabla f_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

得

$$H_{\partial\partial}(\boldsymbol{t}) = \begin{vmatrix} 2t_1 & t_2 & 0 & 0 & 2x_1 & x_2 \\ t_2 & -2t_1 & 0 & 0 & -2x_2 & x_1 \\ 0 & 0 & 2t_1 & t_2 & 2x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & t_2 & -2t_2 & -2x_4 & x_3 \\ 2x_1 & -2x_2 & 2x_3 & -2x_4 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & x_4 & x_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a(\boldsymbol{x})(4t_1^2 + t_2^2)$$

[1] R^m 空间上的 n 维曲面的“维数”n 总指该曲面可以由 n 维参变向量函数表示.

其中

$$a(\boldsymbol{x}) = -4\left[(x_1^2+x_2^2)^2+(x_3^2+x_4^2)^2+(x_1x_3+x_2x_4)^2-(x_2x_3-x_1x_4)^2+\right.$$
$$\left.+(x_1^2-x_2^2)(x_3^2-x_4^2)+4x_1x_2x_3x_4\right]$$

由

$$\nabla \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\nabla \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

知在 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$ 时,交曲面是存在的.而由此即得

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\nabla \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\nabla \boldsymbol{f}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\cdot(4t_1^2+t_2^2) = 1$$

故由(3.1.2.31)式的约束条件知

$$4t_1^2+t_2^2 \equiv \frac{1}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$$

此即表示交曲面上的任一法方向下的 Gauss 曲率是

$$\kappa = (-1)^4\frac{a(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\cdot 4(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^2} = \frac{a(\boldsymbol{x})}{4(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^3}$$

与 t_1、t_2 的取法无关.这就是法向迷向的几何性质.

例 3.1.2.3 利用拟特征值分析的方法验证例 2.4.4.5 中的 2 维曲面上的主法曲率与主法方向.

由例 2.4.4.5,R^4 空间中的 2 维曲面由以下方程组给出

$$\begin{cases} f_1:\ x_1^2+x_2^2=1\\ f_2:\ x_3^2+x_4^2=1\end{cases}$$

$$\nabla f_1 = \begin{bmatrix}2x_1\\2x_2\\0\\0\end{bmatrix}\qquad \nabla f_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\2x_3\\2x_4\end{bmatrix}$$

$$\nabla \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\nabla \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\qquad |\nabla \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\nabla \boldsymbol{f}| = 16$$

$$\nabla^2 f_1 = \begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad \nabla^2 f_2 = \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

$$H_{\partial\partial}(\boldsymbol{t})=\begin{vmatrix}2t_1 & 0 & 0 & 0 & 2x_1 & 0\\ 0 & 2t_1 & 0 & 0 & 2x_2 & 0\\ 0 & 0 & 2t_2 & 0 & 0 & 2x_3\\ 0 & 0 & 0 & 2t_2 & 0 & 2x_4\\ 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2x_3 & 2x_4 & 0 & 0\end{vmatrix}=64t_1t_2$$

易知

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{f}\boldsymbol{t}=4(t_1^2+t_2^2)$$

故得极值规划

$$\begin{cases}\text{极值：}t_1t_2\\ \text{s. t.}\quad t_1^2+t_2^2=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

极值条件是

$$\begin{bmatrix}-2\zeta & 1\\ 1 & -2\zeta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\ t_2\end{bmatrix}=0$$

得 $\zeta=\pm\dfrac{1}{2}$ 对于 $\zeta=\dfrac{1}{2}$，有

$$t_1=t_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Gauss 曲率

$$\kappa=(-1)^4\,\frac{H_{\partial\partial}(\boldsymbol{t})}{|\,\nabla\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{f}\,|}=\frac{1}{2}$$

主法方向

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)^{\mathrm{T}}$$

$$\zeta=-\frac{1}{2}，\text{有}\ t_1=-t_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\quad \kappa=-\frac{1}{2}$$

主法方向

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1,\ x_2,\ -x_3,\ -x_4)^{\mathrm{T}}$$

所得结果与例 2.4.4.5 一致.

相比较而言，确定 R^m 空间上的 n 维曲面的主法方向、Gauss 曲率的方法上，利用拟特征值的方法与利用第一、二基本二次型矩阵的方法，在计算工作量上，当 $H_{\partial\partial}(\boldsymbol{t})$ 矩阵较简单时，拟特征值方法具有优势.

在定理 3.1.2.2 中，用

$$H = \sum_{i=1}^{m-n} \nabla^2 f_i(\boldsymbol{x}) t_i$$

代替 H_j，便可以得到关于交曲面 f 上，在$\nabla \boldsymbol{f} \boldsymbol{t}$ 决定的主法方向下的主法曲率切方向及 Gauss 曲率 $\kappa(\boldsymbol{t})$.

当 $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{e}_j$ 时，就记

$$H_{\partial\partial}^j = \begin{bmatrix} \nabla^2 f_j & \nabla \boldsymbol{f} \\ \nabla \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{—(3.1.2.38)}$$

由 $H_{\partial\partial}^j$ 得到的拟特征值便可决定交曲面 f 作为 f_j 曲面上的曲线的主法曲率及其切方向.

类似于单重加边矩阵的情形. 在保范坐标变换下，(3.1.2.14)式给出的拟特征值决定的主法曲率 $\kappa_{f_i}^j$ 是不变的，而主法方向$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_j$ 在形式上会有一个对应的变换(见(3.1.1.62～63)式). 而对于多重拟特征值，则有以下定理.

定理 3.1.2.3 设 $A_{bb} \in R^{(m+n)\times(m+n)}$ 是 $A \in R^{m\times m}$ $\boldsymbol{b}_i \in R^m$，$\boldsymbol{b}_i$ 线性无关，$i = 1, 2, \cdots, n$，$1 \leqslant n < m$ 构造的 n 重加边矩阵. 再设 $Q \in R^{m\times m}$，$Z \in R^{n\times n}$ 且 Q、Z 均为任取的正交矩阵，则

$$A_{bb} \sim \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}^{-1} A_{bb} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}$$

即二者相似. 二者具有相同的特征值、行列式和多重约束拟特征值. 但上式右边乘积矩阵的拟特向量是 $Q^{-1}\hat{\boldsymbol{\alpha}}$，其中$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$是 A_{bb} 矩阵的拟特征向量. ■

证明：记 $A_{bb} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$ $B = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n]$,

$$A'_{bb} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}^{-1} A_{bb} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{-1}AQ & Q^{-1}BZ \\ Z^{-1}B^{\mathrm{T}}Q & 0 \end{bmatrix}$$

因为 Q、Z 均为正交矩阵，所以

$$Z^{-1}B^{\mathrm{T}}Q = (Q^{-1}BZ)^{\mathrm{T}}$$

故 A'_{bb} 也是 n 重加边矩阵. A'_{bb} 矩阵的拟特征值多项式是

$$\begin{vmatrix} \mu' I_m - Q^{-1}AQ & Q^{-1}BZ \\ Z^{-1}B^{\mathrm{T}}Q & 0 \end{vmatrix} = 0$$

但由

$$\begin{vmatrix} \mu' I_m - Q^{-1}AQ & Q^{-1}BZ \\ Z^{-1}B^{\mathrm{T}}Q & 0 \end{vmatrix} = \left| \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mu' I_m - A & B \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} \mu' I_m - A & B \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

知 μ' 就是 A_{bb} 矩阵的拟特征值 μ.

对于拟特征向量，设 A'_{bb} 矩阵的拟特征向量是 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}'_i$，则应有

$$\begin{cases} (Q^{-1}AQ - \mu_i I_m)\,\hat{\boldsymbol{\alpha}}'_i + Q^{-1}BZ \cdot \boldsymbol{\gamma}' = \mathbf{0} \\ Z^{-1}B^{\mathrm{T}}Q\hat{\boldsymbol{\alpha}}'_i = \mathbf{0} \\ (\hat{\boldsymbol{\alpha}}')^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{\alpha}}'_i = 1 \end{cases} \qquad \text{—(a)}$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}' = [\gamma'_1, \gamma'_2, \cdots, \gamma'_n]$ 是 L-乘子向量. 由以上第一组方程式，可表示成

$$Q^{-1}((A - \mu_i I_m)Q\hat{\boldsymbol{\alpha}}'_i + BZ \cdot \boldsymbol{\gamma}') = \mathbf{0}$$

故必有
$$(A - \mu_i I_m)Q\hat{\boldsymbol{\alpha}}'_i + BZ \cdot \boldsymbol{\gamma}' = \mathbf{0} \qquad \text{—(b)}$$

现取

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}'_i = Q^{-1}\,\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 是 A_{bb} 矩阵的拟特征向量，则上式又可表示成

$$(A - \mu_i I_m)\,\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i + BZ\boldsymbol{\gamma}' = -B\boldsymbol{\gamma} + BZ\boldsymbol{\gamma}' = \mathbf{0}$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 A_{bb} 矩阵拟特征向量对应的 L-乘子向量. 所以，应成立

$$BZ\boldsymbol{\gamma}' = B\boldsymbol{\gamma}$$

可解出 $\boldsymbol{\gamma}'$

$$\boldsymbol{\gamma}' = (Z^{-1}B^{\mathrm{T}}BZ)^{-1} \cdot Z^{-1}B^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{\gamma}$$

由于 $Z^{-1}B^{\mathrm{T}}BZ$ 一定可逆，故(b)式在取 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}'_i = Q^{-1}\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 一定有解，且这样选取的 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}'_i$ 同时满足(a)式的后 2 个方程，即证.

而对于将(2.2.2.19)式中的 f_i 函数组中的任一个，如 $f_k(\boldsymbol{x})$，作单调增变换，

$$F_k: F(f_k(\boldsymbol{x})) = c \quad (c - \text{const})$$

且 $F' > 0$, F'' 存在. 考虑 f_i 的交曲线 f 在 f_j 曲面上的主法曲率 $\kappa^s_{f_j}$, $s = 1, 2, \cdots, m-n$;则不论 j 是否就是 k, $\kappa^s_{f_j}$ 均保持不变. 但对于多重加边 Hessian 矩阵 $H^j_{\partial\partial}$(见(3.1.2.38)式),当 $j \neq k$ 时, $H^j_{\partial\partial}$ 的多重拟特征值保持不变,当 $j = k$ 时, $H^j_{\partial\partial}$ 的多重拟特征值从原先的 μ^i_j, $i = 1, 2, \cdots, m-n$;变成为 $F' \cdot \mu^i_j$.

由(2.2.3.21～26)式表示的关系,当已确定 $z = f(\boldsymbol{x})$ 给出曲面上的某一点 $(\boldsymbol{x}^0, z^0)$ 处

$$z^0 = f(\boldsymbol{x})$$

交曲面的主法曲率 κ^i_f $\quad i = 1, 2, \cdots, m-1$,那么, $z = f(\boldsymbol{x})$ 曲面上 $(\boldsymbol{x}^0, z^0)$ 处,作

$$Z = \{(\boldsymbol{x}, z) \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \tilde{\boldsymbol{\alpha}} t, \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = 0 \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = 1 \quad t, z \in R\} \qquad —(3.1.2.39)$$

空间,则 Z 空间是上面所指的 $(\boldsymbol{x}^0, z^0)$ 处的 Otz 坐标平面族全体的集合, $Z \subset R^{m+1}$. 那么,在 $z = f(\boldsymbol{x}^0, z^0)$ 与 Z 的交曲面上,由(2.2.3.21)式

$$\text{极值:}\ \kappa_z(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \in Z \qquad —(3.1.2.40)$$

决定的主法曲率 κ^i_z,由(2.2.3.26)式,显然应是

$$\kappa^i_z = -\|\nabla f\|\kappa^i_f \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 \qquad —(3.1.2.41)$$

因为(3.1.2.40)式的极值规划中,由 Z 集合的构造, $\boldsymbol{x} \in Z$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^0$ $\quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \dfrac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\|}$ 已遍取了 $z^0 = f(\boldsymbol{x})$ 曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的全体切方向向量. 附带指出,可以理解,不能从(2.2.3.25)式推出主法曲率间一般地成立以下关系.

$$\kappa^i_F = -\frac{\|\nabla f\|}{\|1 + \nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f\|}\kappa^i_f$$

这个等式一般是不成立的. 注意 κ^j_F 有 $j = 1, 2, \cdots, m$ 个而 κ^i_f,只有 $i = 1, 2, \cdots, m-1$ 个,其次,由(2.2.3.25)式, $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$、$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$是 2 个意义不同的方向向量,在取极值的规划中, $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$全体集合(见(2.2.1.3)式)只是$\bar{\boldsymbol{\alpha}}$全体集合(见(2.2.3.16)式)的一个真子集.

最后,可以指出, κ^i_f、κ^i_z 主法曲率与非线性规划中的条件极值二阶判别条件有密切关系. 如仍以图 2.1.2 为例. Ox_1x_2 是商品空间, z 是效用,可将 f 曲面理解为经济学中的消费者效用曲面, L_0 平面是效用为 z^0 时的水平面, f_0 就是等效用曲线(无差异曲线),而 L_f 是消费者用于购买商品时的货币预算等式约束线. 则 f_z 曲线是表示在预算约束线上最大效用点在 A 点处,且在这一点处的效用

极大值的二阶充分条件即为 $\kappa_z<0$. 同时,转换角度看待这一效用极大值问题,可以在 f_0 表示的等效用曲线上,求取获得 z^0 效用水平时,消费者开支最省的点,显然,它也就是 f_0 曲线上的 A 点,且在这一开支极小值点处二阶充分条件即为 $\kappa_f>0$. 由此可知,在等预算约束条件下的效用最大规划与等效用约束条件下的开支最小规划的解等价,即二者成对偶关系.

正是由于微分几何中的曲率理论与非线性规划中的二阶判别条件之间存在如此紧密的关联,本书故将这两部分内容组合在一起论述.

在此就非线性规划中所涉及到的另一个曲率概念,一并给出一个提示性的说明.

考虑以下非线性规划

$$\min \quad z=f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x}\in R^m$$

$$\text{s.t.} \quad g_j(\boldsymbol{x})=0 \quad j=1,2,\cdots,n \quad (1\leqslant n<m)$$

将满足约束条件的点的全体,看成是曲面族 g_j 的交曲面(曲线)上的点的集合. 这里设∇g_j 是线性无关向量组. 设 $\boldsymbol{x}^0$ 是这一规划的极小值点. 则在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处,以任一给定的切方向向量$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$,作

$$Otz(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})=Otz=\forall(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}t,z) \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}=1 \quad \nabla g_j^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}=0 \quad j=1,2,\cdots,n$$

坐标系,其原点在$(\boldsymbol{x}^0,z^0)$点处.

令

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}^0+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}t \quad t\geqslant 0$$

则

$$g_j(\tilde{\boldsymbol{x}})=g_j(\boldsymbol{x}^0+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}t)=0 \quad j=1,2,\cdots,n$$

决定了一条以 t 为参数的交曲线 $\boldsymbol{g}(t)$,可记为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(t)$$

则

$$\bar{f}:\ z=f(\boldsymbol{g}(t))$$

是 $z=f(\boldsymbol{x})$ 曲面(目标函数曲面)上沿 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(t)$ 曲线决定的曲线$\tilde{f}$,投影到 Otz 坐标平面上的对应曲线$\bar{f}$. 故 $\boldsymbol{x}^0$ 必定同时是$\bar{f}$曲线的极小值点.

利用这个性质,对投影曲线求其在 $t=0$ 处成立

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=0 \quad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\geqslant 0$$

便给出了 Lagrange 乘子法,并导出二阶判别条件是

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\zeta}) \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \geqslant 0$$

$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$遍取 g_j 的交曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的切方向向量.

其中

$$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\zeta}) = \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \nabla^2 g_j(\boldsymbol{x})$$

这样,即知 L -函数的二次型,是在 Otz 坐标平面上的投影曲率. 而由以上关于多重拟特征值的分析,马上可知,这一投影曲率的极值曲率,完全由以下拟特征值多项式决定

$$\begin{vmatrix} \mu I_m - \nabla_x^2 L & \nabla g_1 & \nabla g_2 & \cdots & \nabla g_n \\ \nabla g_1^{\mathrm{T}} & & & & \\ \nabla g_2^{\mathrm{T}} & & \boldsymbol{0} & & \\ \vdots & & & & \\ \nabla g_n^{\mathrm{T}} & & & & \end{vmatrix} = 0$$

二阶判别条件即为以上多项式的 $m-n$ 个根 $\mu_i \geqslant 0$.

这样,即可利用关于一般曲面上的拟特征值的符号判别方法(即下文将要论述的 R^m 空间上的 Dupin 标形及主法曲率符号分区方法)予以解决.

至于上述投影曲率问题,不再在这里详述,而归入本书非线性规划理论分析一章(§6 章)中加以说明.

§3.1.3 附录:极小曲面

定义 3.1.3.1 若曲面 f 的平均曲率 $h_f \equiv 0$,称其为**极小曲面**. ■

利用 Monge 形式的曲面函数的平均曲率 h_F 的公式(3.1.1.80)式,可知由函数 $z = f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$ 形式给出的曲面是极小曲面的充要条件是

$$\sum_{\substack{(i,j) \\ i<j}} \begin{vmatrix} f_{ii} & f_{ij} & f_i \\ f_{ji} & f_{jj} & f_j \\ f_i & f_j & 0 \end{vmatrix} = \sum_i f_{ii} \qquad —(3.1.3.1)$$

以 $m = 2$ 例,(3.1.3.1)式就是为人熟知的以下方程

$$(1 + f_2^2) f_{11} - 2 f_1 f_2 f_{12}^2 + (1 + f_1^2) f_{22} = 0 \qquad —(3.1.3.2)$$

若可以作参数变换,使曲面取以下函数形式(旋转曲面)

$$\begin{cases} u = u(x_1, x_2) \\ z = f(u) \end{cases} \qquad —(3.1.3.3)$$

由

$$\frac{\partial z}{\partial x_{1,2}} = f' \cdot \frac{\partial u}{\partial x_{1,2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_{1,2}^2} = f'' \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_{1,2}}\right)^2 + f' \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_{1,2}^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = f'' \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

则

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \frac{\partial z}{\partial x_2} \\ \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_2} & 0 \end{vmatrix} = f'^3 \cdot \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = f' \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + f'' \cdot \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right)$$

若在形式上可以得到

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 = U_1(u) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = U_2(u) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 = U_3(u) \end{cases} \quad \text{—(3.1.3.4)}$$

由(3.1.3.1)式，若 $z = f(u) \quad u = u(x_1, x_2)$ 是极小曲面，则必有以下 2 阶常微分方程成立，

$$U_3(u) f'' + U_2(u) f' - U_1(u) f'^3 = 0 \qquad \text{—(3.1.3.5)}$$

例如，取

$$u = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad x_1^2 + x_2^2 > 0$$

易知

$$U_1(u) = -\frac{1}{u} \quad U_2(u) = \frac{1}{u} \quad U_3(u) = 1$$

从而

$$f'' + \frac{1}{u}f' + \frac{1}{u}f'^3 = 0 \qquad \text{—(a)}$$

对这一方程作积分得

$$\frac{f'^2(u)}{1+f'^2(u)} = \frac{c}{u^2} \quad c \geqslant 0$$

若 $c=0$, $f'(u)=0$ 即 $f(u)$ 为常数,这即对应于 $z=$ 常数,故此解是 R^3 中的一个平面. 继令 $c=a^2>0$, 则可得

$$f'(u) = \pm \frac{a}{\sqrt{u^2-a^2}}$$

即得

$$f(u) = \pm a\ln(u+\sqrt{u^2-a^2}) \quad (u>a)$$

是悬链线旋转而成的曲面,并是极小曲面.

注意(3.1.3.4)式中包含的乘积项,或者是二阶偏导数,或者是一阶偏导数的乘积因子,故由微分规则即知,在 R^{m+1} 空间上,以下形式的函数

$$z=f(u) \quad u=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2)^{\frac{1}{n}} \quad (n\neq 0) \quad u>0 \qquad \text{—(3.1.3.6)}$$

是可以构造极小曲面的 Monge 形式的曲面函数即可以满足条件(3.1.3.4)式. 事实上,

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = f' \cdot \frac{2x_i}{n}u^{1-n}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} = f'' \cdot \frac{4x_i^2}{n^2}u^{2-2n} + f' \cdot \left(\frac{2u^{1-n}}{n} + 4\,\frac{1-n}{n^2}x_i^2u^{1-2n}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = f'' \cdot \frac{4x_ix_j}{n^2}u^{2-2n} + f' \cdot 4\,\frac{1-n}{n^2}x_ix_ju^{1-2n}$$

得

$$\sum_{\substack{(i,j)\\ i<j}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} & \dfrac{\partial z}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_j^2} & \dfrac{\partial z}{\partial x_j} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_i} & \dfrac{\partial z}{\partial x_j} & 0 \end{vmatrix} = \sum_{\substack{(i,j)\\ i<j}} -f'^3 \cdot \frac{8}{n^3}u^{3-3n} \cdot (x_i^2+x_j^2)$$

$$= -\frac{8(m-1)}{n^3}u^{3-2n} \cdot f'^3$$

$$\sum_i \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} = \frac{4u^{2-n}}{n^2} \cdot f'' + \left(\frac{2m}{n} + 4\,\frac{1-n}{n^2}\right) u^{1-n} \cdot f'$$

由条件(3.1.3.1)式,有常微分方程

$$\frac{4u^{2-n}}{n^2} \cdot f'' + \frac{2}{n}\left(m + 2\,\frac{1-n}{n}\right) u^{1-n} \cdot f' + \frac{8(m-1)}{n^3} u^{3-2n} \cdot f'^3 = 0$$

—(3.1.3.7)

当 $m = 2$, $n = 2$, 就得以上的(a)式. 上式可简化成

$$f'' + p(u) f' = q(u) f'^3$$

其中

$$p(u) = \frac{n}{2}\left(m + 2\,\frac{1-n}{n}\right) \frac{1}{u}$$

$$q(u) = -\frac{2(m-1)}{n} u^{1-n}$$

作变换

$$y = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}$$

上式即成为 Bernoulli 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} + p(u) y = q(u) y^3$$

给定 m, n 可得 $p(u)$、$q(u)$,故以上方程有解,从而可确定任意维的 R^m 空间上都存在正则的极小曲面这一结论[1]. 但要对任意的 m、n 找到显式的一般解,仍是有困难的. 以上已有 $m = n = 2$ 的显式解,还可以给出 $m = 2$、$n = 1$ 时的显式解. 此时 $f(u)$ 的常微分方程是

$$f'' + \frac{1}{u} f' + 2 f'^3 = 0$$

其解为

$$f(u) = \pm a \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 4a^2 u} - 2a^2\right) \quad (u > 4a^2)$$

这一函数决定的曲面仍然可以看成是悬链线曲面.

---

〔1〕 由(3.1.3.6)式决定的 Mogne 形式函数显然是正则的.

§3.2 加边对称矩阵及其拟特征值(向量)的若干性质

§3.2.1 矩阵 A 与加边矩阵 A_b 的秩

以下(和上文所述)的分析中将使用关于实对称矩阵的一些性质,如 m 阶实对称矩阵一定有 m 个实数特征值(重根重数),一定有 m 个相互正交的特征向量等等.这些性质在一般的线性代数中已为人所熟知,故不再一一予以指出.

为以下分析需要,先引用如下几个性质

性质 1 形如

$$D=\begin{bmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & 0 & B\\ 0 & B^{\mathrm{T}} & C\end{bmatrix}\quad A\in R^{k\times k}\quad C、B\in R^{n\times n}\quad D\in R^{(k+2n)\times(k+2n)}$$

的矩阵可逆,当且仅当 A、B 矩阵可逆. ■

事实上,若 A、B 可逆,则

$$D^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & 0 & 0\\ 0 & -(B^{\mathrm{T}})^{-1}CB^{-1} & (B^{\mathrm{T}})^{-1}\\ 0 & B^{-1} & 0\end{bmatrix}$$

就一定存在.

性质 2 对角分块方矩阵

$$D=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}$$

且 A、B 为方矩阵,其行列式

$$|D|=|A|\cdot|B|$$

故当且仅当 A、B 可逆,D 矩阵可逆. ■

性质 3 设 $A\in R^{m\times m}$ 是正(负)定对称矩阵,$B\in R^{m\times n}$ 是列满秩的任意矩阵,则

$$D=B^{\mathrm{T}}A^{-1}B$$

一定可逆. ■

事实上,由于 A^{-1} 也是正(负)定矩阵,故存在 $C\in R^{m\times m}$

$$A^{-1} = C^{\mathrm{T}}C \quad 且\ \mathrm{rank}\, C = m$$

所以

$$D = (CB)^{\mathrm{T}}CB$$

且由矩阵乘积的性质知

$$\mathrm{rank}(CB) = \mathrm{rank}\, B \quad 当\ C\ 是满秩矩阵$$

知 CB 仍是列满秩矩阵. 故 D 是列满秩矩阵组成的 Gram 矩阵，是正定矩阵，即 D 必可逆.

以下开始设 $A \in R^{m\times m} \quad B \in R^{m\times n} \quad 1 \leqslant n < m$

$$A_{bb} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \in R^{(m+n)\times(m+n)}$$

$$A^{\mathrm{T}} = A$$

$$\mathrm{rank}\, A = k \quad \mathrm{rank}\, B = n$$

即 A 是对称矩阵，B 是列满秩矩阵.

对 A_{bb} 矩阵作分块处理

$$A_{bb} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22} & B_2 \\ B_1^{\mathrm{T}} & B_2^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{—(3.2.1.1)}$$

并设 $\qquad A_{11} \in R^{k\times k} \quad 且\ |A_{11}| \neq 0.$

对 $|A_{bb}|$ 行列式，

(1) 用 $-A_{12}^{\mathrm{T}}A_{11}^{-1}$ 左乘(3.2.1.1)式等号右边的第 1 行再加到第 2 行，然后，用 $-A_{11}^{-1}A_{12}$ 右乘第 1 列加到第 2 列；

(2) 再用 $-B_1^{\mathrm{T}}A_{11}^{-1}$ 左乘第 1 行加到第 3 行，然后，再用 $-A_{11}^{-1}B_1$ 右乘第 1 列加到第 3 列.

即得

$$|A_{bb}| = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{12}^{\mathrm{T}}A_{11}^{-1}A_{12} & B_2 - A_{12}^{\mathrm{T}}A_{11}^{-1}B_1 \\ 0 & B_2^{\mathrm{T}} - B_1^{\mathrm{T}}A_{11}^{-1}A_{12} & -B_1^{\mathrm{T}}A_{11}^{-1}B_1 \end{vmatrix}$$

由 A 矩阵的行、列线性相关性质可知

$$A_{22} - A_{12}^{\mathrm{T}}A_{11}^{-1}A_{12} \equiv 0$$

再记

$$C = B_2 - A_{12}^{\mathrm T}A_{11}^{-1}B_1 \quad C^{\mathrm T} = B_2^{\mathrm T} - B_1^{\mathrm T}A_{11}^{-1}A_{12}$$

$$D = -B_1^{\mathrm T}A_{11}^{-1}B_1$$

可得

$$|A_{bb}| = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & C^{\mathrm T} & D \end{vmatrix} \quad C \in R^{(m-k)\times n} \quad D \in R^{n\times n} \qquad \text{—(3. 2. 1. 2)}$$

利用(3. 2. 1. 2)式可知以下几个结论

(a) 若 $\operatorname{rank} A = k$ 且 $m-k=n$ 并且 $\operatorname{rank} C = n$，则由以上的性质 1，可知

$$\operatorname{rank} A_{bb} = m+n \Rightarrow |A_{bb}| \neq 0 \qquad \text{—(3. 2. 1. 3)}$$

特别地，当 $\operatorname{rank} A = 0 \quad m = n \quad \operatorname{rank} B = n$

$$A_{bb} = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^{\mathrm T} & 0 \end{bmatrix} \in R^{2m\times 2m}$$

是满秩矩阵.

(b) 若 $\operatorname{rank} A = k \quad m-k \neq n$. 设 $\operatorname{rank} C = k_C \quad \operatorname{rank} D = k_D$ 并记

$$I_C = \{i_1, i_2, \cdots, i_{k_C}\} \quad J_C = \{j_1, j_2, \cdots, j_{k_C}\}$$

分别是 C 矩阵的行下标 1, 2, …, $m-k$ 和列下标 1, 2, …, n 中的子列，且

$$k_C \leqslant \min(m-k,\ n)$$

并记

$$C' = C\begin{Bmatrix} I_C \\ J_C \end{Bmatrix} \quad |C'| \neq 0$$

即 C' 是由任一行下标子列 I_C、列下标子列 J_C 决定的 C 矩阵的子矩阵，且 C' 可逆.

显然，$|A_{bb}|$ 中其行列式非 0 的最大阶数子矩阵只能是

$$E_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C' \\ 0 & (C')^{\mathrm T} & D' \end{bmatrix} \text{ or } E_2 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & D'' \end{bmatrix}$$

其中

$$D' = D\begin{Bmatrix} J_C \\ J_C \end{Bmatrix}$$

$$D'' = D \text{ 矩阵任一 } k_D \times k_D \text{ 阶可逆子矩阵}$$

注意 $\operatorname{rank} E_1 = k+2k_C$ $\operatorname{rank} E_2 = k+k_D$，所以

$$\operatorname{rank} A_{bb} = k + \max(2k_C, k_D) \qquad —(3.2.1.4)$$

由此可导出

(c) 若 $\operatorname{rank} A = k < m-n \Rightarrow \operatorname{rank} A_{bb} < m+n \Rightarrow |A_{bb}| = 0$ —(3.2.1.5)

证明： $\because m-k > n$，不妨就设(3.2.1.2)式中的 C 矩阵

$$\operatorname{rank} C = n$$

故 $$2k_C = 2n > \text{最大可能的} \operatorname{rank} D = n$$

这样由(3.2.1.4)式，

$$\operatorname{rank} A_{bb} = k + 2k_C < (m-n) + 2n = m+n$$

即知.

(d) 若 B 矩阵的任一列向量都与 A 矩阵的列向量组线性相关，则(3.2.1.2)式将成为

$$|A_{bb}| = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D \end{vmatrix}$$

故 $|A_{bb}|$ 中其行列式不为 0 的最大子式只能是

$$\begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & D'' \end{vmatrix}$$

由性质 2 知，

$$\operatorname{rank} A_{bb} = k + k_D \qquad —(3.2.1.5a)$$

由此可以导出

(e) 若 A 是正(负)定矩阵，必有

$$\operatorname{rank} A_{bb} = m+n \Rightarrow |A_{bb}| \neq 0 \qquad —(3.2.1.6)$$

证明： 由于 A 是正(负)定矩阵，故 B 的任一列向量均与 A 的列向量组线性相关，故由以上(d)，

$$\operatorname{rank} A_{bb} = m + k_D$$

但现在

$$D = -B^{\mathrm{T}} A^{-1} B$$

由性质 3，$\operatorname{rank} D = k_D = n$，即证.

(f) 若(3.2.1.2)式中的 $C=0$,即此时 B 的任一列向量均与 A 的列向量组线性相关,且 $D=0$,则

$$\operatorname{rank} A_{bb} = \operatorname{rank} A \qquad \text{—(3.2.1.7)}$$

注意 $D=-B_1^{\mathrm{T}}A_{11}^{-1}B_1=0$,即表示 A 矩阵是不定矩阵,即 A 的特征值中既有正数也有负数(和 0).

由以上(a)～(f)可知,若增广矩阵$[A : B]$与矩阵 A,有以下关系

$$\operatorname{rank}[A : B] = \operatorname{rank} A$$

即导致出现(3.2.1.5～7)式所示的情形,若否

$$\operatorname{rank}[A : B] > \operatorname{rank} A$$

则导致出现(3.2.1.3～4)式所示的情形.

显然,由于以上(a)～(f)已包括了 A、A_{bb} 矩阵间秩关系的所有可能情形,所以,可有以下推论

推论 3.2.1.1 $\operatorname{rank} A \leqslant \operatorname{rank} A_{bb} \leqslant k+\max(2k_C,\ k_D)$.

证明: 由以上(a)～(f)已可知此结论.但也可表述成以下方式.以

$$R(C)=\{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y}=C\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{x}\in R^k,\ \boldsymbol{y}\in R^m,\ C\in R^{m\times k}\}$$

表示任一列阶数为 k 的矩阵 C 的列空间(值域).则显然有

$$R(A)\subset R\left(\begin{bmatrix} A \\ B^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\right)\subseteq R(A_{bb})$$

故以矩阵的秩即为矩阵列空间的维数定义即知

$$\operatorname{rank} A \leqslant \operatorname{rank} A_{bb}$$

而由(a)～(f)中可知以上推论的上界可以(3.2.1.4)式表示.

系 3.2.1.2 若 $\operatorname{rank} A < m-n \Rightarrow |A_{bb}|=0$

系 3.2.1.3 若 A 是正(负)定矩阵,则 A_{bb} 是满秩矩阵.

当 $n=1$,则以上的 A_{bb} 矩阵即为单重加边矩阵 A_b.这时(3.2.1.2)式是

$$|A_b| = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{C} \\ 0 & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & D \end{vmatrix} \quad \boldsymbol{C}\in R^{(m-k)},\ D\in R \qquad \text{—(3.2.1.8)}$$

可有以下性质判断

(g) 若 $\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\operatorname{rank} A_b = k+2$

(h) 若 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$, $D\neq 0$,则 $\operatorname{rank} A_b = k+1$

(i) 若 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$, $D=0$,则 $\operatorname{rank} A_b = k$

所以，对于单重加边矩阵，可有以下推论

推论 3.2.1.4 rank $[A \vdots \boldsymbol{b}] \leqslant \operatorname{rank} A_b \leqslant \min(k+2,\ m+1)$ ■

系 3.2.1.5 rank $A \leqslant m-2 \Rightarrow |A_b| = 0$ ■

系 3.2.1.6 设 rank $A = m$

$$\operatorname{rank} A_b = \begin{cases} m+1 & \text{当 } \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \neq 0 \\ m & \text{当 } \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = 0 \end{cases}$$

■

由于 R^m 空间上的一般形式的曲面函数 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ 的 Hessian 矩阵 H 和其加边矩阵 H_∂ 的行列式与曲面上的 Gauss 曲率有直接关系，故 H、H_∂ 的秩，对曲面的 Gauss 曲率也有重要的关系. 特别，象系 3.2.1.3 还具有明确的几何意义(详见下文).

以单重加边矩阵为例，可以说明 A_b 矩阵与 A 矩阵之间秩关系的特别之处.

设 A、$A' \in R^{m\times m}$ $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{b}' \in R^m$，并且 rank $A >$ rank A' 则以下关系

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} > \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A' & \boldsymbol{b}' \\ \boldsymbol{b}'^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

不一定成立. 这可从以上性质(g)～(i)中推出. 设 rank $A = m$，rank $A' = m-1$，容易构造出

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} = m \quad \text{当 } \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{b} = 0 \qquad \text{(由(i))}$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A' & \boldsymbol{b}' \\ \boldsymbol{b}'^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} = (m-1)+2 \quad \text{当 rank } [A' \vdots \boldsymbol{b}'] = m \qquad \text{(由(g))}$$

如

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{\sqrt{7}}{2} \\ \frac{\sqrt{7}}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{7}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \operatorname{rank} A = 2 \quad \operatorname{rank} A_b = 2$$

A 的特征值 $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ $\lambda_2 = \frac{7}{2}$，A 是不定矩阵，$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{b} = 0$.

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \operatorname{rank} A' = 1 \quad \operatorname{rank} A'_b = 3$$

A' 是半正定矩阵，且 $\boldsymbol{b}'$ 与 A' 的列向量组线性无关(即 rank $[A' \vdots \boldsymbol{b}'] >$ rank A').

§3.2.2 特征多项式与拟特征多项式

先考虑单重加边矩阵 A_b 的拟特征多项式. (3.1.1.40～43)式已经给出了拟

特征多项式的一个简要的表达式. 以下，从更一般的形式上予以说明.

通过以下公式将 A_b 矩阵的拟特征多项式与 A、A_b 矩阵的特征多项式关联起来. 仍设 $A \in R^{m\times m}$　$\boldsymbol{b} \in R^m$

$$\begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} + \mu \mid \mu I_m - A \mid = \begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & \mu \end{vmatrix} = \mid \mu I_{m+1} - A_b \mid$$

—(3.2.2.1)

将上式等号左边的第一项按第 $m+1$ 行 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ 的元素作展开，再加上第二项后的和，由行列式的展开式规则即知与等号右边的 A_b 矩阵的特征多项式相等[1].

将(3.2.2.1)式写成以下形式

$$\begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = \mid \mu I_{m+1} - A_b \mid - \mu \mid \mu I_m - A \mid \qquad \text{—(3.2.2.2)}$$

(3.2.2.2)式表明，A_b 矩阵的拟特征多项式等于 A_b 矩阵的特征多项式减去 A 矩阵的特征多项式(乘以 μ)的差式. 这使得在单重加边矩阵的场合，可以利用矩阵特征多项式的一些性质，来研究拟特征多项式以及拟特征值、拟特征向量的一些性质.

首先给出拟特征值 μ、拟特征向量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 与矩阵 A、$\boldsymbol{b}$ 的一些基本关系.

对于一般的 $\boldsymbol{b} \in R^m$　$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$，记

$$f_{A_b}^{\mu}(\mu) = - \frac{\begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix}}{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b}} \qquad \text{—(3.2.2.3)}$$

是 A_b 矩阵的标准拟特征多项式. 为方便起见，不妨设 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = 1$. 但这不影响以下分析所得结论的一般意义.

记

$$f_{A_b}^{\lambda}(\lambda) = \mid \lambda I_{m+1} - A_b \mid \qquad \text{—(3.2.2.4)}$$

$$f_{A}^{\lambda}(\lambda) = \mid \lambda I_m - A \mid \qquad \text{—(3.2.2.5)}$$

分别是 A_b、A 矩阵的特征多项式.

由(3.2.2.2)式，知，有以下关系

$$- f_{A_b}^{\mu}(\mu) = f_{A_b}^{\lambda}(\mu) - \mu f_{A}^{\lambda}(\mu) \qquad \text{—(3.2.2.6)}$$

将上式中 μ 因子用 A_b 矩阵代替，得到

---

[1] 这也可以看作是对行列式作列分解(见下一节).

$$-f^{\mu}_{A_b}(A_b)=f^{\lambda}_{A_b}(A_b)-A_b f^{\lambda}_{A}(A_b)$$

由 **Hamilton-CayLey 定理**，$f^{\lambda}_{A_b}(A_b)\equiv 0$. 所以

$$f^{\mu}_{A_b}(A_b)=A_b f^{\lambda}_{A}(A_b)$$

但上式的等号右边不一定恒为 0. 故知，A_b 矩阵与其的拟特征多项式之间不一定成立类似特征多项式中的 Hamilton-CayLey 定理的结论.

同理亦可知

$$-f^{\mu}_{A_b}(A)=f^{\lambda}_{A_b}(A)$$

上式的等号右边也不一定恒为 0 的.

但注意到(3.1.1.42)式与(3.1.1.43)式，由那里的分析，已指出，这两式是完全等价的，所以，仍由 Hamilton-CayLey 定理，总成立

$$f^{\mu}_{A_b}(C^{\mathrm{T}}AC)=[C^{\mathrm{T}}AC]^{m-1}+\cdots+(-1)^{m+2}\frac{|A_b|}{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}I_{m-1}=0 \quad —(3.2.2.7)$$

其中 $C\in R^{m\times(m-1)}$ 且 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}C=0 \quad C^{\mathrm{T}}C=I_{m-1}$.

(3.2.2.7)式可以认为是 Hamilton-CayLey 定理在拟特征多项式场合的变形.

将 A_b 的拟特征多项式

$$f^{\mu}_{A_b}(\mu)=0$$

看成是以下形式的简写的行列式

$$f^{\mu}_{A_b}(\mu)=\det(\mu,A,\boldsymbol{b})=0 \quad —(3.2.2.8)$$

同理，对于 A 的特征多项式，可表成

$$f^{\lambda}_{A}(\lambda)=\det(\lambda,A)=0 \quad —(3.2.2.9)$$

由特征多项式的定义与行列式的性质即知，对任取的常数 $c\neq 0$，

$$\det(c\lambda,cA)=c^m\cdot\det(\lambda,A)$$

故对 A 取数乘变换 cA，有对应的特征值 λ_c，且 λ_c 应满足

$$\det(\lambda_c,cA)=c^m\cdot\det\left(\frac{1}{c}\lambda_c,\frac{1}{c}cA\right)=c^m\det(\lambda,A)=0$$

其中 $$\lambda=\frac{1}{c}\lambda_c\Rightarrow\lambda_c=c\cdot\lambda$$

即知矩阵 A 的特征值 λ 是矩阵 A 的一次齐次函数. 且记 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_c$ 是 cA 的对应于 λ_c 的

特征向量，则由

$$(cA-\lambda_c)\hat{\boldsymbol{\alpha}}_c=(cA-c\lambda)\hat{\boldsymbol{\alpha}}_c=c(A-\lambda)\hat{\boldsymbol{\alpha}}_c=\mathbf{0}$$

即知 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_c=\hat{\boldsymbol{\alpha}}$，其中$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$是矩阵 A 对应于λ 特征值的特征向量. 由此知，A 矩阵的特征向量$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$是矩阵 A 的 0 次齐次函数.

而对于 A_b 矩阵的行列式，可知，当对 A 矩阵作数乘变换为 cA，并由(3.1.1.51)式

$$\begin{vmatrix} cA & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{c^2}\begin{vmatrix} cA & c\boldsymbol{b} \\ c\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix}=c^{m-1}\begin{vmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix}$$

即知以下性质，若记

$$\det(A_b)=\det(A,\ \boldsymbol{b})$$

则 $\det(A,\boldsymbol{b})$是 A 的 $m-1$ 次齐次的，而由(3.1.1.51)式，$\det(A,\boldsymbol{b})$关于 $\boldsymbol{b}$ 是 2 次齐次的.

现在，由以上性质，可知对于(3.2.2.8)式表示的拟特征多项式，设 μ_{cb} 是满足以下关于 $\boldsymbol{b}$ 的数乘变换的拟特征值，

$$\det(\mu_{cb},\ A,\ c\boldsymbol{b})=0$$

由以上齐次性质，及(3.1.1.51)式，

$$\det(\mu_{cb},\ A,\ c\boldsymbol{b})=c^2\det(\mu_{cb},\ A,\ \boldsymbol{b})=0$$

故 $\mu_{cb}=\mu$. 从而 μ 是 $\boldsymbol{b}$ 的 0 次齐次函数.

而对 A 作数乘变换，并记有 μ_c 满足以下关系

$$\begin{aligned}\det(\mu_c,\ cA,\ \boldsymbol{b})&=c^{m+1}\det\left(\frac{1}{c}\mu_c,\ \frac{1}{c}cA,\ \frac{1}{c}\boldsymbol{b}\right)\\&=c^{m+1}\det\left(\mu,\ A,\ \frac{1}{c}\boldsymbol{b}\right)\\&=c^{m-2}\det(\mu,\ A,\ \boldsymbol{b})\\&=0\end{aligned}$$

其中 $\mu=\dfrac{1}{c}\mu_c\Rightarrow\mu_c=c\cdot\mu$. 即知 μ 是关于矩阵 A 的一次齐次函数.

而对于 $\boldsymbol{b}$ 作数乘为 $c\boldsymbol{b}$，利用拟特征向量$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$的定义，知，应有$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{cb}$并满足下式

$$\begin{cases}(A-\mu I_m)\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{cb}+\gamma_{cb}\cdot c\boldsymbol{b}=\mathbf{0}\\ c\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{cb}=0\\ \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{cb}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{cb}=1\end{cases}$$

显然，令 $\gamma_{cb}=\frac{1}{c}\gamma$，$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{cb}=\hat{\boldsymbol{\alpha}}$，即知拟特征向量$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$是 $\boldsymbol{b}$ 的 0 次齐次函数.

对于 A 作数乘变换，应有$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_c$ 满足以下拟特征向量方程组

$$\begin{cases}(cA-c\mu I_m)\hat{\boldsymbol{\alpha}}_c+\gamma_c\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}_c=0\\ \hat{\boldsymbol{\alpha}}_c^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}_c=1\end{cases}$$

只要取 $\gamma_c=c\gamma$，$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_c=\hat{\boldsymbol{\alpha}}$，即知拟特征向量$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$关于 A 也是 0 次齐次的.

以下，将利用(3.2.2.2)式作拟特征多项式的展开式. 由于对于矩阵 A 的特征多项式，已知有以下展开形式[1]

$$|A-\lambda I_m|=(-\lambda)^m+c_1(-\lambda)^{m-1}+\cdots+c_{n-1}(-\lambda)+c_n \qquad —(3.2.2.10)$$

其中系数 c_j 是 A 的 j 阶所有主子式之和(如果组成$|A|$的 j 阶子式的行、列下标子列相同，则称为 j 阶主子式).

同理可有

$$\begin{vmatrix}A-\lambda I_m & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & -\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)^{m+1}+c'_1(-\lambda)^m+c'_2(-\lambda)^{m-1}+\cdots+c'_m(-\lambda)+c'_{m+1}$$

—(3.2.2.11)

其中 c'_i是加边矩阵 A_b 的 i 阶所有主子式之和.

将(3.2.2.10～11)式写成以下形式

$$|A-\lambda I_m|=(-1)^m\lambda^m+(-1)^{m-1}c_1\lambda^{m-1}+\cdots+(-1)c_{m-1}\lambda+c_m$$

—(3.2.2.12)

$$\begin{vmatrix}A-\lambda I_m & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & -\lambda\end{vmatrix}=(-1)^{m+1}\lambda^{m+1}+(-1)^m c'_1\lambda^m+(-1)^{m-1}c'_2\lambda^{m-1}$$

$$+\cdots+(-1)c'_m\lambda+c'_{m+1} \qquad —(3.2.2.13)$$

将(3.2.2.2)式改写成以下形式

$$\begin{vmatrix}A-\lambda I_m & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A-\lambda I_m & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & -\lambda\end{vmatrix}+\lambda\,|A-\lambda I_m| \qquad —(3.2.2.14)$$

则由(3.2.2.12)式得

---

[1] 《线性代数习题集》，H. B. 普罗斯库烈柯夫，同前注，第 1070 题及其证明提示. 本书下一节亦会利用行列式的列分解方法对这一公式给予说明.

$$\lambda \mid A - \lambda I_m \mid = (-1)^m \lambda^{m+1} + (-1)^{m-1} c_1 \lambda^m + \cdots + (-1) c_{m-1} \lambda^2 + c_m \lambda \qquad —(3.2.2.15)$$

将(3.2.2.13)式与(3.2.2.15)式相加，得

$$\begin{vmatrix} A - \lambda I_m & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = [(-1)^{m+1} + (-1)^m]\lambda^{m+1} + [(-1)^m c'_1 + (-1)^{m-1} c_1]\lambda^m + $$

$$+ [(-1)^{m-1} c'_2 + (-1)^{m-2} c_2]\lambda^{m-1} + \cdots + [(-1) c'_m + c_m]\lambda + + c'_{m+1} \qquad —(3.2.2.16)$$

显然(3.2.2.16)式右边

λ^{m+1} 项前的系数 $= (-1)^{m+1} \cdot (1-1) = 0$

λ^m 项前的系数 $= (-1)^m \cdot (c'_1 - c_1) = 0$，因为由 c'_1、c_1 的定义，

$$c_1 = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} = c'_1$$

λ^{m-1} 项前的系数 $= (-1)^{m-1} \cdot (c'_2 - c_2)$

其中 c'_2是 A_b 矩阵的所有 2 阶主子式的和

$$c'_2 = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^{m} \begin{vmatrix} a_{ii} & b_i \\ b_i & 0 \end{vmatrix}$$

c_2 则是 A 矩阵的所有 2 阶主子式的和，

$$c_2 = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}$$

所以

$$c'_2 - c_2 = \sum_{i=1}^{m} \begin{vmatrix} a_{ii} & b_i \\ b_i & 0 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b}$$

由于 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$，故知拟特征多项式一定是最高次幂为 $m-1$ 次幂的 λ(或记为 μ)的多项式.

一般地，

$$\lambda^{m-s} = \lambda^{m+1-(s+1)} \text{ 项前的系数} = (-1)^{m-s}(c'_{s+1} - c_{s+1})$$

其中

$c'_{s+1} = A$ 矩阵的所有 $s+1$ 阶主子式之和 +

$$+ \sum_{(i_1, i_2, \cdots, i_s)} \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_s} & b_{i_1} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_s} & b_{i_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_s i_1} & a_{i_s i_2} & \cdots & a_{i_s i_s} & b_{i_s} \\ b_{i_1} & b_{i_2} & \cdots & b_{i_s} & 0 \end{vmatrix}$$

上式等式右边第二项中的求和号是指对 1，2，…，m 序列中的所有递增排列的子列 i_1，i_2，…，i_s 求和，且 $i_k < i_{k+1} \quad 1 \leqslant k \leqslant s$. 而由 c_{s+1} 的意义，即有

c_{s+1} = A 矩阵的所有 $s+1$ 阶主子式之和

所以，
$$c'_{s+1} - c_{s+1} = \sum_{(i_1, i_2, \cdots, i_s)} \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_s} & b_{i_1} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_s} & b_{i_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_s i_1} & a_{i_s i_2} & \cdots & a_{i_s i_s} & b_{i_s} \\ b_{i_1} & b_{i_2} & \cdots & b_{i_s} & 0 \end{vmatrix} \quad \text{—(3.2.2.17)}$$

$$s = 1, 2, \cdots, m-1$$

(3.2.2.17)式表示 $c'_{s+1} - c_{s+1}$ 等于 A_b 矩阵中的 s 阶的所有**加边主子式**的和.

最后，(3.2.2.16)式中的常数项，显然有

$$c'_{m+1} = |A_b|$$

将以上结果代入(3.2.2.16)式，有

$$\begin{vmatrix} A - \lambda I_m & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{m-1}(-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})\lambda^{m-1} + (-1)^{m-2} \sum_{\substack{(i, j) \\ i<j}} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & b_i \\ a_{ji} & a_{jj} & b_j \\ b_i & b_j & 0 \end{vmatrix} \cdot \lambda^{m-2} +$$

$$+ \cdots + (-1) \sum_{i=1}^{m} |A_{b_{ii}}| \cdot \lambda + |A_b| \quad \text{—(3.2.2.18)}$$

其中 $A_{b_{ii}}$ 是指划去 A_b 矩阵的主对角元素 a_{ii} 所在行、列元素后的余子矩阵.

用$(-1)^{m-1}$因子乘(3.2.2.18)式等号两边，得

$$\begin{vmatrix} \lambda I_m - A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\lambda^{m-1} + (-1)^{-1} \sum_{\substack{(i, j) \\ i<j}} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & b_i \\ a_{ji} & a_{jj} & b_j \\ b_i & b_j & 0 \end{vmatrix} \cdot \lambda^{m-2} + \cdots$$

$$+ (-1)^{m-2} \cdot \sum_{i=1}^{m} A_{b_{ii}} \cdot \lambda + (-1)^{m-1} |A_b| \quad \text{—(3.2.2.19)}$$

令(3.2.2.19)式右边等于 0，设 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = 1$，并用 μ 取代 λ，就得到(3.1.1.43)式.

由(3.2.2.19)式，用 μ 取代 λ，即得到标准拟特征多项式的展开式，应是

$$\mu^{m-1} + \frac{1}{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}} \sum_{\substack{(i, j) \\ i<j}} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & b_i \\ a_{ji} & a_{jj} & b_j \\ b_i & b_j & 0 \end{vmatrix} \mu^{m-2} + \cdots +$$

$$(-1)^{m-1}\frac{\sum_{i=1}^{m}A_{b_{ii}}}{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}\cdot\mu+(-1)^{m}\frac{|A_b|}{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}=0 \quad —(3.2.2.20)$$

由多项式根与系数的关系，就有(3.2.2.20)式根 μ_i，有关系

$$\mu_1\mu_2\cdot\cdots\cdot\mu_{m-1}=-\frac{|A_b|}{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}} \quad —(3.1.1.45)$$

$$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{m-1}=-\frac{1}{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}\sum_{\substack{\{i,j\}\\ i<j}}\begin{vmatrix}a_{ii} & a_{ij} & b_i\\ a_{ji} & a_{jj} & b_j\\ b_i & b_j & 0\end{vmatrix} \quad —(3.2.2.21)$$

若将 A 用 $f(\boldsymbol{x})=0$ 的 Hessian 矩阵$\nabla^2 f$ 代替，$\boldsymbol{b}$ 用梯度向量∇f 代替，并由拟特征值与法截曲率的关系，即可从(3.2.2.21)式推出(3.1.1.61)式.

应当指出，(3.2.2.21)式的右边显然不是 A_b 矩阵的迹. 由(3.1.1.43～44)两式等价性，应理解为

$$\mathrm{tr}\,(C^{\mathrm{T}}AC)=\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{m-1}=-\frac{1}{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}\sum_{\substack{\{i,j\}\\ i<j}}\begin{vmatrix}a_{ii} & a_{ij} & b_i\\ a_{ji} & a_{jj} & b_j\\ b_i & b_j & 0\end{vmatrix}$$
$$—(3.2.2.22)$$

$C\in R^{m\times(m-1)}$ 且是满足 $C^{\mathrm{T}}C=I_{m-1}\quad C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=0$ 的任一矩阵.

利用矩阵的子矩阵符号

$$A\begin{Bmatrix}i_1, i_2, \cdots, i_k\\ j_1, j_2, \cdots, j_k\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{i_1j_1}, & a_{i_1j_2}, & \cdots, & a_{i_1j_k}\\ a_{i_2j_1}, & a_{i_2j_2}, & \cdots, & a_{i_2j_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i_kj_1}, & a_{i_kj_2}, & \cdots, & a_{i_kj_k}\end{bmatrix}$$

对加边矩阵，用

$$A_b\begin{Bmatrix}i_1, i_2, \cdots, i_k\\ j_1, j_2, \cdots, j_k\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A\begin{Bmatrix}i_1, i_2, \cdots, i_k\\ j_1, j_2, \cdots, j_k\end{Bmatrix} & \begin{matrix}b_{i_1}\\ b_{i_2}\\ \vdots\\ b_{i_k}\end{matrix}\\ b_{j_1}, \ b_{j_2}, \ \cdots, \ b_{j_k} & 0\end{bmatrix}$$

表示 $A\begin{Bmatrix}i_1, i_2, \cdots, i_k\\ j_1, j_2, \cdots, j_k\end{Bmatrix}$的加边子矩阵. 当 $i_h=j_k$，则为 A(或 A_b 的加边)的主子

矩阵，主子矩阵的行列式即为 A(或 A_b 的加边)的主子式. 对于主子式，$A\{\cdot\}$ 中仅写出一个下标子列即可.

将(3.2.2.20)式表示的标准拟特征多项式，μ^{m-s} 项前的系数与根 μ_i 之间的关系，用下式表出

$$\sum_{\{i_1, i_2, \cdots, i_s\}} \mu_{i_1}\mu_{i_2} \cdot \cdots \cdot \mu_{i_s} = -\frac{1}{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}} \sum_{\{i_1, i_2, \cdots, i_{s+1}\}} |A_b\{i_1, i_2, \cdots, i_{s+1}\}|$$

其中 $i_j < i_{j+1}$, $s = 1, 2, \cdots, m-1$ —(3.2.2.23)

其中 $A_b\{i_1, i_2, \cdots, i_{s+1}\} = A_b\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_{s+1} \\ i_1, i_2, \cdots, i_{s+1} \end{Bmatrix}$

由于对于一般曲面函数 $f(\boldsymbol{x}) = 0$，其加边 Hessian 矩阵 H_∂ 的拟特征值 μ_i 总对应于曲面 f 的主法曲率，故规定

$$\kappa_f(s) = \frac{1}{\binom{m-1}{s}} \sum_{\{i_1, i_2, \cdots, i_s\}} \kappa_f^{i_1}\kappa_f^{i_2} \cdot \cdots \cdot \kappa_f^{i_s} = \frac{(-1)^s}{\binom{m-1}{s}} \sum_{\{i_1, i_2, \cdots, i_s\}} \frac{\mu_{i_1}\mu_{i_2} \cdot \cdots \cdot \mu_{i_s}}{\|\nabla f\|^s}$$

$i_j < i_{j+1}$ —(3.2.2.24)

其中 $\binom{m-1}{s} = \dfrac{(m-1)!}{s!(m-1-s)!}$. 上式又可表成

$$\kappa_f(s) = \frac{1}{\binom{m-1}{s}} \cdot \frac{(-1)^{s+1}}{\|\nabla f\|^{s+2}} \sum_{\{i_1, i_2, \cdots, i_{s+1}\}} |H_\partial\{i_1, i_2, \cdots, i_{s+1}\}|$$

$i_j < i_{j+1}$ $s = 1, 2, \cdots, m-1$ —(3.2.2.24a)

并称 $\kappa_f(s)$ 是曲面 f 的 **s 重主法曲率乘积平均值**. $\kappa_f(1)$ 即为**平均曲率** h_f，$2\binom{m-1}{2}\kappa_s(2)$ 即为 **Ricci 曲率**(标量)R(见下文)，$\kappa_f(m-1)$ 即为 **Gauss 曲率** κ_f. $\kappa_f(1) \equiv 0$ 曲面 f 即为**极小曲面**，而若成立 $\kappa_f(s) \equiv 0$ $s = 1, 2, \cdots, m-1$，则该曲面即为满足**真空 Einstein 方程**的曲面(见本书 §4 章)必要条件的曲面.

以下再给出 Monge 形式曲面函数的标准拟特征多项式展开式. 一般地，对应于(3.1.1.73)式有

$$\begin{vmatrix} A - \lambda I_m & 0 & \boldsymbol{b} \\ 0 & -\lambda & -1 \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} A - \lambda I_m & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} - |A - \lambda I_m|$$

上式等号右边的 2 个行列式已有展开式(3.2.2.18)式、(3.2.2.12)式，由此，

$$\begin{vmatrix} A-\lambda I_m & 0 & \boldsymbol{b} \\ 0 & -\lambda & -1 \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^m(-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})\lambda^m + (-1)^{m-1}\sum_{\substack{\{i,j\}\\ i<j}} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & b_i \\ a_{ji} & a_{jj} & b_j \\ b_i & b_j & 0 \end{vmatrix} \cdot \lambda^{m-1} +$$

$$+\cdots+(-1)^2\sum_i A_{b_{ii}}\cdot\lambda^2+(-1)\cdot|A_b|-$$

$$-\Big[(-1)^m\lambda^m+(-1)^{m-1}\operatorname{tr}A\cdot\lambda^{m-1}+(-1)^{m-2}\sum_{\substack{\{i,j\}\\ i<j}}\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj}\end{vmatrix}\cdot\lambda^{m-2}+$$

$$+\cdots+(-1)\sum_i A_{ii}\cdot\lambda+|A|\Big]$$

$$=(-1)^m(-(1+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}))\lambda^m+(-1)^{m-1}\left(\sum_{\substack{\{i,j\}\\ i<j}}\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & b_i \\ a_{ji} & a_{jj} & b_j \\ b_i & b_j & 0 \end{vmatrix}-\operatorname{tr}A\right)\lambda^{m-1}+$$

$$+(-1)^{m-2}\left(\sum_{\substack{\{i,j,k\}\\ i<j<k}}\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & b_i \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & b_j \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & b_k \\ b_i & b_j & b_k & 0 \end{vmatrix}-\sum_{\substack{\{i,j\}\\ i<j}}\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj}\end{vmatrix}\right)\lambda^{m-2}+$$

$$+\cdots+(-1)\cdot\left(|A_b|-\sum_{i=1}^{m}A_{ii}\right)\cdot\lambda-|A| \qquad —(3.2.2.25)$$

其中 A_{ii} 是 A 矩阵主对角元素 a_{ii} 的余子式.

将(3.2.2.25)式等号两边同乘 $(-1)^m$ 因子,得

$$\begin{vmatrix} \lambda I_m-A & 0 & \boldsymbol{b} \\ 0 & \lambda & -1 \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(1+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})\lambda^m-\left(\sum_{\substack{\{i,j\}\\ i<j}}\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & b_i \\ a_{ji} & a_{jj} & b_j \\ b_i & b_j & 0 \end{vmatrix}-\operatorname{tr}A\right)\lambda^{m-1}+$$

$$+\left(\sum_{\substack{\{i,j,k\}\\ i<j<k}}\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & b_i \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & b_j \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & b_k \\ b_i & b_j & b_k & 0 \end{vmatrix}-\sum_{\substack{\{i,j\}\\ i<j}}\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj}\end{vmatrix}\right)\lambda^{m-1}$$

$$-\cdots+(-1)^{m+1}\left(|A_b|-\sum_i A_{ii}\right)\lambda+(-1)^{m+1}|A| \qquad —(3.2.2.26)$$

令上式右边等于 0,并用 $-(1+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})^{-1}$ 因子乘之,并用 μ 代替 λ,得其标准形式是

$$\mu^m+(1+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})^{-1}\cdot\left(\sum_{\substack{\{i,j\}\\ i<j}}\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & b_i \\ a_{ji} & a_{jj} & b_j \\ b_i & b_j & 0 \end{vmatrix}-\operatorname{tr}A\right)\mu^{m-1}-$$

$$-(1+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})^{-1}\cdot\left(\sum_{\substack{(i,j,k)\\ i<j<k}}\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & b_i \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & b_j \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & b_k \\ b_i & b_j & b_k & 0 \end{vmatrix}-\sum_{\substack{(i,j)\\ i<j}}\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj}\end{vmatrix}\right)\mu^{m-2}+$$

$$+\cdots+(-1)^m\frac{|A_b|-\sum_i A_{ii}}{1+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}\mu+(-1)^m\frac{|A|}{(1+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})}=0 \qquad -(3.2.2.27)$$

由多项式根与系数的关系，并用 $f(\boldsymbol{x})=0$ 的 Hessian 矩阵 H 代替 A，用梯度向量 ∇f 代替 $\boldsymbol{b}$，就有(3.1.1.77)式，由 Gauss 曲率、平均曲率的定义，就有(3.1.1.79～80)式.

利用以上符号，将(3.2.2.27)式中 μ^{m-s} 项前的系数与根 μ_i 的关系用下式表出

$$\sum_{\{i_1,i_2,\cdots,i_s\}}\mu_{i_1}\mu_{i_2}\cdot\cdots\cdot\mu_{i_s}=-\frac{1}{1+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}\Big(\sum_{\{i_1,i_2,\cdots,i_{s+1}\}}|A_b\{i_1,i_2,\cdots,i_{s+1}\}|-$$

$$-\sum_{\{j_1,j_2,\cdots,j_s\}}|A\{j_1,j_2,\cdots,j_s\}|\Big)$$

$$-(3.2.2.28)$$

其中 $i_h<i_{h+1}$, $j_h<j_{h+1}$, $s=1,2,\cdots,m-1$

$$\mu_1\mu_2\cdot\cdots\cdot\mu_m=\frac{|A|}{1+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}} \qquad -(3.2.2.28\mathrm{a})$$

则 Monge 形式曲面函数的 s 重主法曲率乘积平均值 $\kappa_F(s)$ 由下式给出，

$$\kappa_F(s)=\frac{1}{\binom{m}{s}}\sum_{\{i_1,i_2,\cdots,i_s\}}\kappa_F^{i_1}\kappa_F^{i_2}\cdot\cdots\cdot\kappa_F^{i_s}=\frac{(-1)^s}{\binom{m}{s}}\sum_{\{i_1,i_2,\cdots,i_s\}}\frac{\mu_{i_1}\mu_{i_2}\cdot\cdots\cdot\mu_{i_s}}{\|1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f\|^s}$$

$$-(3.2.2.29)$$

故

$$\kappa_F(s)=\frac{1}{\binom{m}{s}}\cdot\frac{(-1)^{s+1}}{\|1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f\|^{s+2}}\Big(\sum_{\{i_1,i_2,\cdots,i_{s+1}\}}|H_\partial\{i_1,i_2,\cdots,i_{s+1}\}|-$$

$$-\sum_{\{j_1,j_2,\cdots,j_s\}}|H\{j_1,j_2,\cdots,j_s\}|\Big)$$

$$s=1,2,\cdots,m-1 \qquad -(3.2.2.30)$$

$$\kappa_F(m)=\kappa_F^1\kappa_F^2\cdot\cdots\cdot\kappa_F^m=(-1)^m\frac{|H|}{\|1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f\|^{m+2}} \qquad -(3.1.1.79)$$

注意,(3.2.2.30)式也是在 Monge 形式的曲面函数的法方向定向为(3.1.1.70)式条件下给出的. 如果曲面定向取为(3.1.1.67)式,则(3.2.2.30)式和(3.1.1.79)式决定的 $\kappa_F(s)$ 再乘以 $(-1)^s$ 因子即可.

§3.2.3 多重加边矩阵的拟特征多项式

多重加边矩阵,$A \in R^{m\times m}$　$B \in R^{m\times n}$　$1 \leqslant n < m$　$\operatorname{rank} B = n$

$$A_{bb} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$$

的拟特征多项式,其形式类似于(3.2.2.20)式. 但仍有些不同. 为推导出 A_{bb} 矩阵的拟特征多项式,先引用以下与加边矩阵有关系的两个一般性质.

性质 4　若 $A \in R^{k\times k}$ 是任取的矩阵,$B \in R^{k\times k}$,则行列式

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{vmatrix} = (-1)^k \mid B \mid^2 \qquad —(3.2.3.1)$$

■

证明: 注意这里的 B 矩阵的秩没有要求,故先设 $\operatorname{rank} B < k$,此时显然(3.2.3.1)式的两边均为 0,故成立. 次设 $\operatorname{rank} B = k$,则将上式的左边看成是 2 个"行"2 个"列"组成的矩阵行列式,并用 $-A(B^T)^{-1}$ 左乘第 2 行再加到第 1 行,得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{vmatrix}$$

交换上式右边的 2 个"列"向量,即对上式右边的行列式作了前 k 个列向量与后 k 个列向量的成对交换位置,即得

$$\begin{vmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{vmatrix} = (-1)^k \begin{vmatrix} B & 0 \\ 0 & B^T \end{vmatrix} = (-1)^k \mid B \mid^2$$

即证.

性质 5　对于任意的 $B \in R^{m\times n}$,并设 $n \leqslant m$,则 Gram 矩阵有以下性质

$$\mid B^T B \mid = \sum_{\substack{\{i_1, i_2, \cdots, i_n\} \\ i_j < i_{j+1}}} \mid B\{i_1, i_2, \cdots, i_n\} \mid^2 \qquad —(3.2.3.2)$$

■

其中 $B\{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ 是 B 矩阵的 n 阶子式,$i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, m$ 中的一个递增子序列. 性质 5,在 $n = m-1$ 时,已在多重矢量积的论述中给出了证明. 而 $n=1$ 则是自然成立的. 对于一般情形下,$1 < n < m-1$,要证明(3.2.3.2)式,可以直接比较等号两边的行列式展开式的通项即可. 但这一方法需利用繁琐且冗长的下标运算,故将其作为本节附录列出.

由行列式加法的性质,若行列式中某一列(或行)的各元素可表示为两项之和,则该行列式可用两个同阶行列式之和表示,例如,

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_2+b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称将一个如上式左边的某列元素为两项之和的行列式分解为右边的两个同阶行列式之和的方法为行列式的**列分解**方法. 利用这个列分解方法先来说(3.2.2.10)式.

以 $m=2$ 为例,

$$\begin{aligned} |A-\lambda I_2| &= \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} \\ 0 & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda)^2 + (a_{11}+a_{22})(-\lambda) + |A| \\ &= (-\lambda)^2 + c_1(-\lambda) + c_2 \end{aligned}$$

其中 $c_1 = a_{11}+a_{22}$ $c_2 = |A|$ 即 c_1、c_2 确是矩阵 A 的 1、2 阶主子式的和. 故利用行列式列分解方法,即可直接推出(3.2.2.10)式.

一般地,规定以下符号,对于任一 $A \in R^{m\times m}$ 矩阵,

$$\boldsymbol{a}_j(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{jj}-\lambda \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

即 $\boldsymbol{a}_j$ 是矩阵 A 的第 j 列向量,而 $\boldsymbol{a}_j(\lambda)$ 则是 $[A-\lambda I_n]$ 的第 j 列向量. 并规定以下行列式写法中

$$|\cdots \underset{\text{第}j\text{列}}{\underset{\uparrow}{\boldsymbol{\lambda}_j}} \cdots|$$

的向量 $\boldsymbol{\lambda}_j$ 是指

$$\boldsymbol{\lambda}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\lambda \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{第 } j \text{ 行}$$

则可得到行列 $|A-\lambda I_n|$ 的 n 次列分解图示[1],

---

[1] 列分解顺序可以方便地规定从第 1 列开始依次进行.

原行列式 $|A-\lambda I_m| = \quad |\boldsymbol{a}_1(\lambda),\ \boldsymbol{a}_2(\lambda),\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_m(\lambda)|$

第一次列分解 $|\boldsymbol{\lambda}_1,\ \boldsymbol{a}_2(\lambda)\cdots\boldsymbol{a}_m(\lambda)| \qquad |\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2(\lambda),\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_m(\lambda)|$

第二次列分解 $|\boldsymbol{\lambda}_1,\ \boldsymbol{\lambda}_2,\ \boldsymbol{a}_3(\lambda)\cdots a_n(\lambda)| + |\boldsymbol{\lambda}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3(\lambda)\cdots\boldsymbol{a}_m(\lambda)| + |\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{\lambda}_2,\ \boldsymbol{a}_3(\lambda)\cdots\ \boldsymbol{a}_m(\lambda)| + |\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3(\lambda)\cdots\ \boldsymbol{a}_m(\lambda)|$

⋮ ⋮

第 m 次列分解 $|\boldsymbol{\lambda}_1,\ \boldsymbol{\lambda}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\lambda}_m| + \cdots + |\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_m| = |A-\lambda I_m|$ —(3.2.3.3)

显然,n 次列分解后,上式左边的一般项是含有 $\boldsymbol{\lambda}_{i_1},\ \boldsymbol{\lambda}_{i_2},\ \cdots,\ \lambda_{i_k}$ 个列向量与其他 $n-k$ 个 $\boldsymbol{a}_{j_h}$ 向量组成的行列式,

$$|\boldsymbol{a}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_{i_1-1},\ \boldsymbol{\lambda}_{i_1},\ \boldsymbol{a}_{i_1+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_{i_{k-1}},\ \boldsymbol{\lambda}_{i_k},\ \boldsymbol{a}_{i_{k+1}},\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_m|$$
$$= (-\lambda)^k\ |A\{j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_{n-k}\}| \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

其中 $j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_{n-k}$ 是序列 $1,\ 2,\ \cdots,\ m$ 中划去 $i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k$ 后的余子列,$A\{j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_{n-k}\}$ 是对应的主子矩阵.

故 $m\times m$ 阶矩阵的特征行列式,经 m 次列分解后,便直接得到(3.2.2.10)式.因为由 $1,\ 2,\ \cdots,\ m$ 个下标中取 k 个下标组合数为 $\binom{m}{k}$,即知,(3.2.3.3)式等号左边的项数总计是

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k} = 2^m$$

刚好是 m 次列分解的总项数.

将行列式的列分解方法应用到多重加边矩阵的拟特征多项式.利用以上符号,并用 μ 代替 λ,$\boldsymbol{\mu}_j$ 代替 $\boldsymbol{\lambda}_j$,意义不变,可以有

$$\begin{vmatrix} A-\mu I_m & B \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1(\mu) & \cdots & \boldsymbol{a}_m(\mu) & B \\ \boldsymbol{B}_1 & \cdots & \boldsymbol{B}_m & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{—(3.2.3.4)}$$

其中 $\boldsymbol{B}_j$ 是 B^{T}矩阵的第 j 列向量(即 B 矩阵的第 j 行向量转置).对这一行列式作 m 次列分解,就有以下关系式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 & \boldsymbol{\mu}_2 & \cdots & \boldsymbol{\mu}_m & B \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & 0 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m & B \\ \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{B}_m & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-\mu I_m & B \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix}$$
—(3.2.3.5)

上式左边的通项,设其列向量中含有 $\boldsymbol{\mu}_{i_1},\ \boldsymbol{\mu}_{i_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{\mu}_{i_k}$ 个列(子)向量,可有,

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_{i_1-1},\ \boldsymbol{\mu}_{i_1},\ \boldsymbol{a}_{i+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_{i_{k-1}},\ \boldsymbol{\mu}_{i_k},\ \boldsymbol{a}_{i_{k+1}}\cdots\boldsymbol{a}_m,\ B \\ \boldsymbol{B}_1\cdots\boldsymbol{B}_{i_1-1},\ \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{B}_{i+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{B}_{i_{k-1}},\ \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{B}_{i_{k+1}}\cdots\boldsymbol{B}_m,\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$
=\begin{cases} 0 & \text{当 } k > m-n \\ (-\mu)^{m-n}\cdot(-1)^n\ |B\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}|^2 & \text{当 } k = m-n \\ (-\mu)^k \cdot |A_{bb}\{j_1, j_2, \cdots, j_{m-k}\}| & \text{当 } k < m-n \end{cases} \quad \text{—(3.2.3.6)}
$$

其中 $j_1, j_2, \cdots, j_{m-k}$ 是 1, 2, …, m 下标序列中划去 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 后的余子序列 $|B\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}|$ 是 B 矩阵中由第 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 行向量组成的 $n\times n$ 阶子行列式. 而

$$
A_{bb}\{j_1, j_2, \cdots, j_{m-k}\} = \begin{bmatrix} a_{j_1j_1} & a_{j_1j_2} & \cdots & a_{j_1j_{m-k}} & b_{j_11} & b_{j_12} & \cdots & b_{j_1n} \\ a_{j_2j_1} & a_{j_2j_2} & \cdots & a_{j_2j_{m-k}} & b_{j_21} & b_{j_22} & \cdots & b_{j_2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j_{m-k}j_1} & a_{j_{m-k}j_2} & \cdots & a_{j_{m-k}j_{m-k}} & b_{j_{m-k}1} & b_{j_{m-k}2} & \cdots & b_{j_{m-k}n} \\ b_{j_11} & b_{j_21} & \cdots & b_{j_{m-k}1} & & & & \\ b_{j_12} & b_{j_22} & \cdots & b_{j_{m-k}2} & & & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ b_{j_1n} & b_{j_2n} & \cdots & b_{j_{m-k}n} & & & & \end{bmatrix}
$$

—(3.2.3.7)

是多重加边矩阵 A_{bb} 的 $(m-k)\times(m-k)$ 阶加边主子矩阵. (3.2.3.6)式其等式左边的通项是

$$
(-\mu)^k \cdot |A_{bb}\{j_1, j_2, \cdots, j_{m-k}\}|
$$

由(3.2.3.7)式,可知,当 $k > m-n$, $m-k < m-(m-n) = n$,故(3.2.3.7)式右边行列式中的左下方的 b_{j_ht} $h = 1, 2, \cdots, m-k$, $t = 1, 2, \cdots, n$ 元素组的子矩阵的列维数<行维数,故是行相关的. 所以,上式的值恒为 0;这就得到(3.2.3.6)式右边第 1 式的结果;当 $k = m-n$,则上式通项总可以表示成

$$
(-\mu)^{m-n}\cdot \begin{vmatrix} A' & B' \\ (B')^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix}
$$

其中 A'、B' 分别是矩阵 A、B 中的 $n\times n$ 阶子矩阵,则由以上所列的性质 4,知此时第 2 式的结果遂成立.

所以,可知

$$
\begin{vmatrix} A-\mu I_m & B \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = \sum_{\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}} (-1)^n \cdot |B\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}|^2 \cdot (-\mu)^{m-n} + \\ + \sum_{\{j_1, j_2, \cdots, j_{n+1}\}} |A_{bb}\{j_1, j_2, \cdots, j_{n+1}\}| \cdot (-\mu)^{m-n-1} + \\ + \cdots + \sum_{i=1}^{m} |A_{bb_{ii}}| \cdot (-\mu) + |A_{bb}| \quad \text{—(3.2.3.8)}
$$

其中 $A_{bb_{ii}}$ 是多重加边矩阵 A_{bb} 划去主对角元素 a_{ii} 所在行、列元素后的余子矩阵.

用 $(-1)^{m+n}$ 乘(3.2.3.8)式的两边并整理，即得多重加边矩阵的拟特征多项式是

$$\begin{vmatrix} \mu I_m - A & B \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot \sum_{\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}} |B\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}|^2 \cdot \mu^{m-n} + \\ +(-1) \cdot \sum_{\{j_1, j_2, \cdots, j_{n+1}\}} |A_{bb}\{j_1, j_2, \cdots, j_{n+1}\}| \cdot \mu^{m-n-1} + \\ + \cdots + (-1)^{m+n-1} \cdot \sum_{i=1}^{m} |A_{bb_{ii}}| \cdot \mu + (-1)^{m+n} |A_{bb}| \quad \text{—(3.2.3.9)}$$

当 $n=1$，(3.2.3.9)式自然就是(3.2.2.19)式.

注意到以上所列的性质 5，便可得到多重加边矩阵 A_{bb} 的标准拟特征多项式，

$$\mu^{m-n} + (-1)^{n+1} \frac{\sum_{\{j_1, j_2, \cdots, j_{n+1}\}} |A_{bb}\{j_1, j_2, \cdots, j_{n+1}\}|}{|B^{\mathrm{T}} B|} \mu^{m-n-1} + \\ + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{\sum_{i=1}^{m} |A_{bb_{ii}}|}{|B^{\mathrm{T}} B|} \mu + (-1)^m \frac{|A_{bb}|}{|B^{\mathrm{T}} B|} = 0 \quad \text{—(3.2.3.10)}$$

也可以利用行列式列分解的方法，得到以下关于多重加边矩阵 A_{bb} 的拟特征多项式与 A_{bb}、A 矩阵的特征多项式的关系式.

先看一个 2 重加边矩阵 A_{bb} 的示例. 对以下行列式的第 $m+1$、$m+2$ 列作分解，

$$\begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} & \mu & 0 \\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} & 0 & \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} & \mu & 0 \\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b}_1 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} & \mu & 0 \\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} & 0 & \mu \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mu I_m - A & \mathbf{0} & \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} & \mu & 0 \\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b}_1 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} & 0 & \mu \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mu I_m - A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} & \mu & 0 \\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} & 0 & \mu \end{vmatrix}$$

经整理即得

$$\begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \end{vmatrix} = |\mu I_{m+2} - A_{bb}| - \mu^2 |\mu I_m - A| - \mu \cdot \left(\begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} \right)$$

上式表明由 $\boldsymbol{b}_1$、$\boldsymbol{b}_2$ 的 2 重加边矩阵 A_{bb} 的拟特征多项式等于 A_{bb} 的特征多项式减去 A 的特征多项式再减由 A 矩阵分别与 $\boldsymbol{b}_1$、$\boldsymbol{b}_2$ 向量组成的单重加边矩阵的拟特征多项式.

一般地,易知有以下关系存在,设 $A_{bb} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$, $A \in R^{m\times m}$, $B \in R^{m\times n}$ 且 $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mu I_m - A & B \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} &= |\mu I_{m+n} - A_{bb}| - \mu^n \cdot |\mu I_m - A| - \mu^{n-1} \cdot \sum_i^n \begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b}_i \\ \boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad - \mu^{n-2} \cdot \sum_{\substack{\{i,\ j\} \\ i<j}} \begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b}_i & \boldsymbol{b}_j \\ \boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{b}_j^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \end{vmatrix} - \cdots - \\ &\quad - \mu \cdot \sum_{\substack{\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_{n-1}\} \\ i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}}} \begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b}_{i_1},\ \boldsymbol{b}_{i_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_{i_{n-1}} \\ \boldsymbol{b}_{i_1}^{\mathrm{T}} & \\ \boldsymbol{b}_{i_2}^{\mathrm{T}} & 0 \\ \vdots & \\ \boldsymbol{b}_{i_{n-1}}^{\mathrm{T}} & \end{vmatrix} \end{aligned} \quad —(3.2.3.11)$$

对(3.2.3.11)式,从 $n = 2$ 开始,利用(3.2.2.10～19)式已给出的结果,也可以(递推地)导出(3.2.3.8)式.这里不再赘述.

利用(3.2.3.10)式,可知多重加边矩阵 A_{bb} 的拟特征多项式的根 μ_i 与系数之间存在关系

$$\sum_{\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_s\}} \mu_{i_1}\mu_{i_2} \cdot \cdots \cdot \mu_{i_s} = (-1)^n \cdot \frac{\sum\limits_{\{j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_{n+s}\}} |A_{bb}\{j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_{n+s}\}|}{|B^{\mathrm{T}}B|}$$

$$s = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-n;\ i_k < i_{k+1},\ j_k < j_{k+1} \quad —(3.2.3.12)$$

当 $s = m-n$,(3.2.3.12)式就是(3.1.2.16)式.当 $s = 1$,就得到(3.1.2.17)式的具体形式

$$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{m-n}=(-1)^n\cdot\frac{\sum\limits_{\{j_1,j_2,\cdots,j_{n+1}\}}|A_{bb}\{j_1,j_2,\cdots,j_{n+1}\}|}{|B^{\mathrm{T}}B|}$$

—(3.2.3.13)

类似地,对于一般曲面函数 $f_i(\boldsymbol{x})=0$,在以下曲面族

$$f_j(\boldsymbol{x})=0\quad j=1,2,\cdots,n\quad \boldsymbol{x}\in D_j\subset R^m$$

且 i 是 $1,2,\cdots,n$ 中的某一个,$\nabla f_j(\boldsymbol{x})$线性无关(当 $\boldsymbol{x}\in\bigcap D_j$),决定的交曲面的 s 重主法曲率乘积平均值,记为 $\kappa_{f_i}(s)$,并记

$$\begin{vmatrix}\mu I_m-\nabla^2 f_i & \nabla f_1 & \nabla f_2 & \cdots & \nabla f_n\\ \nabla f_1^{\mathrm{T}} & & & & \\ \nabla f_2^{\mathrm{T}} & & & & \\ \vdots & & 0 & & \\ \nabla f_n^{\mathrm{T}} & & & & \end{vmatrix}=0$$

的根是 μ_{ih}, $h=1,2,\cdots,m-n$,则对应的主法曲率记为 $\kappa_{f_i}^h$

$$\kappa_{f_i}(s)=\frac{1}{\binom{m-n}{s}}\sum_{\{h_1,h_2,\cdots,h_s\}}\kappa_{f_i}^{h_1}\kappa_{f_i}^{h_2}\cdot\cdots\cdot\kappa_{f_i}^{h_s}$$

$$=\frac{(-1)^s}{\binom{m-n}{s}}\sum_{\{h_1,h_2,\cdots,h_s\}}\frac{\mu_{ih_1}\mu_{ih_2}\cdot\cdots\cdot\mu_{ih_s}}{\|\nabla f_i\|^s}\qquad —(3.2.3.14)$$

得

$$\kappa_{f_i}(s)=\frac{(-1)^{n+s}}{\binom{m-n}{s}}\cdot\frac{1}{\|\nabla f_i\|^s}\cdot\frac{\sum\limits_{\{j_1,j_2,\cdots,j_{n+s}\}}|H_{\partial\partial}^i\{j_1,j_2,\cdots,j_{n+s}\}|}{|B_f^{\mathrm{T}}B_f|}$$

$$s=1,2,\cdots,m-n\qquad —(3.2.3.15)$$

其中

$$H_{\partial\partial}^i=\begin{bmatrix}\nabla^2 f_i & B_f\\ B_f^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}\quad B_f=[\nabla f_1,\nabla f_2,\cdots,\nabla f_n]$$

当 $s=m-n$,(3.2.3.15)式就是(3.1.2.19)式.当 $s=1$,就得到交曲面(作为 f_i 曲面上的 $m-n$ 维曲线)的平均曲率 h_{f_i},

$$h_{f_i}=\frac{(-1)^{n+1}}{m-n}\frac{1}{\|\nabla f_i\|}\cdot\frac{\sum\limits_{\{j_1,j_2,\cdots,j_{n+1}\}}|H_{aa}^i\{j_1,j_2,\cdots,j_{n+1}\}|}{|B_f^{\mathrm{T}}B_f|}\qquad —(3.2.3.16)$$

如果 f_i 曲面函数是 Monge 形式的，不妨取 $i=1$，可得交曲面在 f_i 曲面上的主法曲率对应的拟特征多项式，是

$$\begin{vmatrix}\mu I_m-\nabla^2 f_1 & 0 & \nabla f_1 & B_f^1\\ 0 & \mu & -1 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\\ \nabla f_1^{\mathrm{T}} & -1 & & \\ (B_f^1)^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & & 0\end{vmatrix}=\mu\begin{vmatrix}\mu I_m-\nabla^2 f_1 & B_f\\ B_f^{\mathrm{T}} & 0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\mu I_m-\nabla^2 f_1 & B_f^1\\ (B_f^1)^{\mathrm{T}} & 0\end{vmatrix}$$

$$—(3.2.3.17)$$

其中 $B_f^1=[\nabla f_2,\nabla f_3,\cdots,\nabla f_n]$.

(3.2.3.17)式等号右边的 2 个行列式，可以利用以上(3.2.3.9)式展开后求代数和，便可得到 Monge 形式的 f_i 曲面函数条件下的拟特征多项式以及相关的其他公式. 在此，不再详述.

附录：性质 5 的证明

将多重加边矩阵

$$A_{bb}=\begin{bmatrix}A & B\\ B^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}\quad A\in R^{m\times m}\quad B\in R^{m\times n}\quad 1<n<m$$

其中的 B、B^{T} 矩阵的元素，表示成以下形式

$$B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{bmatrix}\quad B^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nm}\end{bmatrix}$$

且规定
$$B_{ij}=b_{ji}$$

这样的记法主要为了以下叙述的方便.

作 A_{bb} 的拟特征多项式

$$\begin{vmatrix}\mu I_m-A & B\\ B^{\mathrm{T}} & 0\end{vmatrix}=f(\mu)\qquad —(3.2.3.a)$$

注意，由于推导出以上(3.2.3.9)式时，并没有用到性质 5 的结论，所以，这里可以直接引用(3.2.3.9)式的结果，即，可以用 C_0 表示(3.2.3.a)式展开后，按 μ 的最高次幂项开始降幂排列的多项式的首项 μ^{m-n} 前的系数，则

$$C_0=(-1)^n\sum_{\{j_1,j_2,\cdots,j_n\}}|B\{j_1,j_2,\cdots,j_n\}|^2\qquad —(3.2.3.b)$$

再由行列式的展开规则，直接地将(3.2.3.a)式的通项表示成

$$f(\mu)=\sum(-1)^s\tilde{a}_{1k_1}\tilde{a}_{2k_2}\cdots\tilde{a}_{mk_m}\tilde{a}_{(m+1)k_{m+1}}\cdot\cdots\cdot\tilde{a}_{(m+n)k_{(m+n)}}$$
$$—(3.2.3.c)$$

其中 $s=s(k_1,k_2,\cdots,k_m,k_{m+1},\cdots,k_{m+n})$ 是下标序列 $k_1,k_2,\cdots,k_{m+n}$ 经位次交换而变换成为 $1,2,\cdots,m+n$ 顺序的交换总次数. 称 s 为逆序指数. $\tilde{a}_{ij}$ 是矩阵

$$\begin{bmatrix}\mu I_m-A & B\\ B^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}$$

的第 i 行第 j 列元素.

一般地，也可以将(3.2.3.c)式的右边，表示成以下形式

$$f(\mu)=\sum(-1)^{s'}\tilde{a}_{j_1k_1}\tilde{a}_{j_2k_2}\cdots\tilde{a}_{j_{(m+n)}k_{(m+n)}}\qquad —(3.2.3.d)$$

其中 s' 也是逆序指数，但与 s 逆序指数的区别在于，现在 s' 是指下标序列 k_1, $k_2,\cdots,k_{(m+n)}$ 经位次交换而变换成为 $j_1,j_2,\cdots,j_{m+n}$ 顺序所需的交换总次数. $j_1,j_2,\cdots,j_{m+n}$ 可以是 $1,2,\cdots,m+n$ 的任一个选定的排列.

显然 s、s' 逆序指数之间有关系

$$s(k_1,k_2,\cdots,k_{(m+n)})=s'(k_1,k_2,\cdots,k_{m+n})+s''(j_1,j_2,\cdots,j_{m+n})$$
$$—(3.2.3.e)$$

其中 $s''(j_1,j_2,\cdots,j_{m+n})$ 反映的是将(3.2.3.d)式右边的连乘积中的 $\tilde{a}_{j_tk_t}$ 因子交换乘积顺序，使该连乘积在顺序上以第1下标按 $1,2,\cdots,m+n$ 的自然顺序排列时所需的交换总次数. 由于乘法满足交换律，故，这样对于 $\tilde{a}_{j_tk_t}$ 因子作交换不影响结果，即知(3.2.3.d)式等价于(3.2.3.c)式，并且(3.2.3.e)式成立.

由(3.2.3.c)式，为构造出含有 μ^{m-n} 因子的项，因为(3.2.3.a)式左边行列式的右下角 $n\times n$ 个元素为0，故 $\tilde{a}_{(m+j)k_{(m+j)}}$ $j=1,2,\cdots,n$ 元素不用取到 $k_{m+j}\geqslant m+1$ 的下标，即不恒为0的通项，只需考虑

$$1\leqslant k_{m+j}\leqslant m\quad j=1,2,\cdots,n\qquad —(3.2.3.f)$$

这表明，不恒为0的通项，$\tilde{a}_{(m+j)k_{m+j}}$ 就只能取 B^{T} 矩阵中的某元素. 那么，对应的，$\tilde{a}_{k_{m+j}k_{k_{m+j}}}$ 元素，就只能取

$$m+1\leqslant k_{k_{m+j}}\leqslant m+n\quad (\because 1\leqslant k_{m+j}\leqslant m)\qquad —(3.2.3.g)$$

不妨令

$$k_{k_{m+j}}=m+i_j\quad j=1,2,\cdots,n$$

且 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是1, 2, …, n 的一个排列. 这样$\tilde{a}_{k_{m+j}(m+i_j)}$就只能取 B 矩阵中的元素.

由(3.2.3.f～g)式,即知,对任意给定 1, 2, …, m 中的一个由 n 个不重复数字组成的一个排列子列 $k_{m+1}, k_{m+2}, \cdots, k_{m+n}$,并设 $z_1, z_2, \cdots, z_{m-n}$ 是 1, 2, …, m 中划去 k_{m+j} 后的余子序列,则由 k_{m+j} $j=1, 2, \cdots, n$ 决定的(3.2.3.c)式右边的连乘积项是

$$(-1)^s(\mu-a_{z_1z_1})(\mu-a_{z_2z_2})\cdot\cdots\cdot(\mu-a_{z_{m-n}z_{m-n}})\cdot \\ \cdot a(k_{m+1}, k_{m+2}, \cdots, k_{m+n};\ i_1, i_2, \cdots, i_n) \qquad —(3.2.3.h)$$

其中 $a(k_{m+1}, k_{m+2}, \cdots, k_{m+n};\ i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 是按(3.2.3.f～g)式的规定选取的 n 个 B 矩阵和 n 个 B^T 矩阵中的元素(共 $2n$ 个元素)的连乘积因子. s 是与 k_{m+1}, $k_{m+2}, \cdots, k_{m+n}$ 和 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 这两个下标序列有关的逆序指数(见下文详述).

(3.2.3.h)式就是 $f(\mu)$多项式中含有 μ^{m-n}因子的一般项形式.

现在不妨反过来说,即将 $k_{m+1}, k_{m+2}, \cdots, k_{m+n}$ 子列看成是1, 2, …, m 中划去 z_i 后的余子序列的任一个排列. 在任取的一个 z_i $i=1, 2, \cdots, m-n$ 递增子列下,由此决定了 k_{m+j}子列,再任取一个 1, 2, …, n 的排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$,并可注意到

$$\left.\begin{aligned}\tilde{a}_{(m+j)k_{m+j}} &= B_{jk_{m+j}} \\ \tilde{a}_{k_{m+j}k_{k_{m+j}}} &= \tilde{a}_{k_{m+j}}(m+i_j) = b_{k_{m+j}i_j}\end{aligned}\right\} j=1, 2, \cdots, n \qquad —(3.2.3.i)$$

可知(3.2.3.h)式中的 $a(k_{m+1}, \cdots, k_{m+n};\ i_1, \cdots, i_n)$ 因子, 应为 $a(k_{m+1}, \cdots, k_{m+n};\ i_1, \cdots, i_n)=b_{k_{m+1}i_1}b_{k_{m+2}i_2}\cdot\cdots\cdot b_{k_{m+n}i_n}B_{1k_{m+1}}B_{2k_{m+2}}\cdot\cdots\cdot B_{nk_{m+n}}$

注意到(3.2.3.h)式中的$(\mu-a_{z_iz_i})$因子,应就是(3.2.3.c)式中的$\tilde{a}_{z_iz_i}$因子,故,由(3.2.3.f)、(3.2.3.g)以及(3.2.3.i)式,可知,(3.2.3.h)式,还原成(3.2.3.c)式的符号,是

$$(-1)^{s'}\tilde{a}_{z_1z_1}\tilde{a}_{z_2z_2}\cdot\cdots\cdot\tilde{a}_{z_{m-n}z_{m-n}}\cdot\tilde{a}_{k_{m+1}m+i_1}\tilde{a}_{k_{m+2}m+i_2}\cdot\cdots\cdot\tilde{a}_{k_{m+n}m+i_n} \\ \cdot\tilde{a}_{(m+1)k_{m+1}}\cdot\tilde{a}_{(m+2)k_{m+2}}\cdot\cdots\cdot\tilde{a}_{(m+n)k_{m+n}} \qquad —(3.2.3.j)$$

在(3.2.3.j)式中,因为$\tilde{a}$因子的第 1 下标已不再是自然顺序,故按(3.2.3.d)式的记法,其逆序指数 s 应等价于 s'的意义,并且逆序指数只要考虑上式中的后 $2n$ 个$\tilde{a}$因子的第 2 下标与第 1 下标对齐时第 2 下标子序列的元素所需要的交换位次总次数即可.

(3.2.3.j)式的后 $2n$ 个元素的第 1 下标序列(记为Ⅰ),是

$$\mathrm{I}: k_{m+1}, k_{m+2}, \cdots, k_{m+n}, m+1, m+2, \cdots, m+n$$

第 2 下标序列(记为Ⅱ),是

$$\mathrm{II}: m+i_1, m+i_2, \cdots, m+i_n, k_{m+1}, k_{m+2}, \cdots, k_{m+n}$$

故先对第 2 下标序列中的前 n 个 $m+i_j$ 下标与后 n 个 k_{m+j} 下标互换,共交换 n 次,得到的第 2 下标序列(记为Ⅱ₁),是

$$\mathrm{II}_1: k_{m+1}, k_{m+2}, \cdots, k_{m+n}, m+i_1, m+i_2, \cdots, m+i_n$$

这样,II_1 与Ⅰ序列的前 n 个指标已经对齐. 然后,只需考虑将后 n 个第 2 下标序列中的 $m+i_1, m+i_2, \cdots, m+i_n$ 经位次交换后,成为 $m+1, m+2, \cdots, m+n$ 序列. 显然,这所需要的交换总次数刚好就是序列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的逆序指数 $s(i_1, i_2, \cdots, i_n)$,所以,(3.2.3.j)式的第 2 下标经各元素的位次交换而与第 1 下标对齐所需的总交换次数是 $n+s(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 次. 即

$$s' = n+s(i_1, i_2, \cdots, i_n) \qquad \text{—(3.2.3.k)}$$

由此,可知 μ^{m-n} 因子前的系数应为

$$C_0 = \sum_{\{k_{m+1}, k_{m+2}, \cdots, k_{m+n}; i_1, i_2, \cdots, i_n\}} (-1)^{s'} a(k_{m+1}, k_{m+2}, \cdots, k_{m+n}; i_1, i_2, \cdots, i_n)$$

由以上的分析,并注意到 $B_{jk_{m+j}} = b_{k_{m+j}j}$ 的关系

$$C_0 = \sum_{\{k_{m+1}, k_{m+2}, \cdots, k_{m+n}; i_1, i_2, \cdots, i_n\}} (-1)^n \cdot (-1)^s b_{k_{m+1}i_1} b_{k_{m+2}i_2} \cdot \cdots \cdot b_{k_{m+n}i_n} b_{k_{m+1}1} b_{k_{m+2}2} \cdot \cdots \cdot b_{k_{m+n}n} \qquad \text{—(3.2.3.l)}$$

其中　$s = s(i_1, i_2, \cdots, i_n)$.

且由于 $k_{m+1}, k_{m+2}, \cdots, k_{m+n}$ 仅只代表了 $1, 2, \cdots, m$ 中的任一个由 n 个不同数字组成的一个排列,故完全可用 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 表示,并注意到(3.2.3.b)式(同时消去 $(-1)^n$ 因子),便有

$$\sum_{\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}} |B\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}|^2 = \sum_{\{j_1, j_2, \cdots, j_n; i_1, i_2, \cdots, i_n\}} (-1)^s \cdot b_{j_1i_1} b_{j_2i_2} \cdot \cdots \cdot b_{j_ni_n} b_{j_11} b_{j_22} \cdot \cdots \cdot b_{j_nn}$$

$$s = s(i_1, i_2, \cdots, i_n) \qquad \text{—(3.2.3.m)}$$

注意,这里等号右边的 $\sum$ 号是对 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 遍取 $1, 2, \cdots, m$ 中的全部 n 个不同数字组成的排列;$i_1, i_2, \cdots, i_n$ 遍取 $1, 2, \cdots, n$ 的全部排列而言的. 所以(3.2.3.m)式等号右边是总计

$$M_1 = n!\frac{m!}{(m-n)!} \qquad \text{—(3.2.3.n)}$$

项之和.

现再考虑

$$|B^{\mathrm T}B| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{b}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{b}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{b}_n^{\mathrm T}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_n^{\mathrm T}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n^{\mathrm T}\boldsymbol{b}_n \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{b}_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix}$$

行列式的展开式,有

$$|B^{\mathrm T}B| = \sum_{(i_1,\, i_2,\, \cdots,\, i_n)} (-1)^s \boldsymbol{b}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{b}_{i_1} \cdot \boldsymbol{b}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{b}_{i_2} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{b}_n^{\mathrm T}\boldsymbol{b}_{i_n} \quad \text{—(3.2.3.o)}$$

其中 $s = s(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 是 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的逆序指数,且 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 遍取 1, 2, …, n 序列的全部排列.

(3.2.3.o)式又可表示成以下形式

$$\begin{aligned} |B^{\mathrm T}B| &= \sum_{(i_1,\, i_2,\, \cdots,\, i_n)} (-1)^s \sum_{k=1}^m b_{k1}b_{ki_1} \cdot \sum_{k=1}^m b_{k2}b_{ki_2} \cdot \cdots \cdot \sum_{k=1}^m b_{kn}b_{ki_n} \\ &= \sum_{(j_1,\, j_2,\, \cdots,\, j_n)} \sum_{(i_1,\, i_2,\, \cdots,\, i_n)} (-1)^s b_{j_11}b_{j_1i_1} b_{j_22}b_{j_2i_2} \cdot \cdots \cdot b_{j_nn}b_{j_ni_n} \end{aligned}$$

其中 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 遍取 1, 2, …, m 中可重复地任取的 n 个数字组成的排列全体. 有

$$|B^{\mathrm T}B| = \sum_{(j_1,\, j_2,\, \cdots,\, j_n)} \sum_{(i_1,\, i_2,\, \cdots,\, i_n)} (-1)^s b_{j_1i_1} b_{j_2i_2} \cdot \cdots \cdot b_{j_ni_n} b_{j_11} b_{j_22} \cdot \cdots \cdot b_{j_nn} \quad \text{—(3.2.3.p)}$$

注意,(3.2.3.p)式等号右边是

$$M_2 = n!m^n \quad \text{—(3.2.3.q)}$$

项之和.

将(3.2.3.p)式再表示成以下形式

$$|B^{\mathrm T}B| = \sum_{(j_1,\, j_2,\, \cdots,\, j_n)} \Big(\sum_{(i_1,\, i_2,\, \cdots,\, i_n)} (-1)^s b_{j_1i_1} b_{j_2i_2} \cdot \cdots \cdot b_{j_ni_n} \Big) b_{j_11} b_{j_22} \cdot \cdots \cdot b_{j_nn} \quad \text{—(3.2.3.r)}$$

容易理解上式括号(·)中的项即为

$$\sum_{(i_1,\, i_2,\, \cdots,\, i_n)} (-1)^s b_{j_1i_1} b_{j_2i_2} \cdot \cdots \cdot b_{j_ni_n} = |B\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}| \quad \text{—(3.2.3.s)}$$

其中 $B\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}$ 是 B 矩阵中的第 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 行向量组成的子矩阵.

将(3.2.3.s)式代入(3.2.3.r)式中，得

$$|B^{\mathrm{T}}B| = \sum_{\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}} |B\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}| \cdot b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdot \cdots \cdot b_{j_n n}$$

—(3.2.3.t)

但根据行列式的性质，

$$|B\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}| \equiv 0 \quad \text{当存在 } j_s = j_t \quad 1 \leqslant s, t \leqslant n$$

即若 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 中有重复的数字，则 $|B\{\cdot\}|$ 行列式恒为0. 这样，可知(3.2.3.t)式(也就是(3.2.3.p)式)等号右边 $\sum$ 号下的(部分和)恒为0的项，即(3.2.3.t)式中 $|B\{\cdots\}| \equiv 0$ 的项，总数应是

$$M_3 = n!\left(m^n - \frac{m!}{(m-n)!}\right) \qquad \text{—(3.2.3.u)}$$

项. 所以，(3.2.3.p)式等号右边 $\sum$ 号下(部分和)不恒为0的项数应当就是

$$M_2 - M_3 = n!\frac{m!}{(m-n)!} = M_1$$

即刚好等于(3.2.3.m)式等号右边 $\sum$ 号下的总项数. 并且，现在扣减去恒为0的项后，(3.2.3.p)式中 $\sum$ 号下的下标子列集合

$$\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}$$

就只由 $1, 2, \cdots, m$ 中全部不相同的 n 个数字组成的排列(全体). 这样，比较(3.2.3.p)式与(3.2.3.m)式等号右边的求和式，即知两者相等. 所以

$$|B^{\mathrm{T}}B| = \sum_{\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}} |B\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}|^2 \geqslant 0$$

由此附带即知当 B 是列满秩矩阵时，$B^{\mathrm{T}}B$ 是正定的.

§3.2.4 加边矩阵 A_b 的拟特征值与矩阵 A 的特征值的关系——隔离定理

定理 3.2.4.1 设 $A \in C^{n\times n}$ 是自伴矩阵，$\widetilde{A}$ 是 A 的 $n-1$ 阶主子矩阵，则 $\widetilde{A}$ 的特征值隔离 A 的特征值：

$$\xi_1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \xi_n \qquad \text{—(3.2.4.1)}$$

其中

$$\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \cdots \leqslant \xi_n$$

是 A 的特征值.

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1}$$

是$\widetilde{A}$的特征值. ■

这里 $C^{n\times n}$ 是复 Euclid 乘积空间. 自伴矩阵是指 $A\in C^{n\times n}$，成立

$$\bar{A}^{\mathrm{T}} = A$$

其中$\bar{A}^{\mathrm{T}}$是共轭转置运算. 若 $A\in R^{n\times n}$，则自伴矩阵就是对称矩阵.

以上定理也可表述为：

设 $A \in C^{n\times n}$ 是自伴矩阵，$A_b \in C^{(n+1)\times(n+1)}$ 是自伴矩阵且是 A 的加边矩阵，

$$A_b = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & a \end{bmatrix} \quad a \in R \quad \boldsymbol{b} \in C^n$$

则 A 的特征值隔离 A_b 的特征值[1].

以下总设 $A \in R^{m\times m}$　$\boldsymbol{b} \in R^m$　A_b 是 A 的加边矩阵，且 A 是实对称矩阵. 并且，总设 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$.

由以上定理，特征多项式

$$| \lambda I_m - A | = 0$$

的 m 个根 λ_i，$\lambda_i \leqslant \lambda_{i+1}$ 分割特征多项式

$$\begin{vmatrix} \xi I_m - A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & \xi \end{vmatrix} = 0$$

的 $m+1$ 个根 ξ_j　$\xi_j \leqslant \xi_{j+1}$.

由 A_b 矩阵的拟特征值与特征值的关系式(3.2.2.2)式，将 A_b 矩阵的拟特征多项式写成以下形式

$$f^{\mu}_{A_b}(\mu) = | \mu I_{m+1} - A_b | - \mu | \mu I_m - A |$$

由以上的符号规定，$f^{\mu}_{A_b}(\mu)$可以表示成以下形式

$$f^{\mu}_{A_b}(\mu) = \prod_{i=1}^{m+1}(\mu - \xi_i) - \mu \cdot \prod_{j=1}^{m}(\mu - \lambda_j) \qquad \text{—(3.2.4.2)}$$

将 A 矩阵的第 k 个特征值λ_k 代入(3.2.4.2)式，

$$f^{\mu}_{A_b}(\lambda_k) = \prod_{i=1}^{m+1}(\lambda_k - \xi_i)$$

且已知

$$\xi_k \leqslant \lambda_k \leqslant \xi_{k+1} \quad k = 1, 2, \cdots, m$$

---

[1] 以上内容引自《特殊矩阵》，陈景良、陈向晖著，清华大学出版社，2001 年，第 211 页.

不妨先设

$$\xi_k < \lambda_k < \xi_{k+1} \quad k = 1, 2, \cdots, m \qquad —(3.2.4.3)$$

可知

$$\operatorname{sign}(f^{\mu}_{A_b}(\lambda_k)) = (-1)^{m-k+1} \qquad —(3.2.4.4)$$

于是成立

$$\operatorname{sign}(f^{\mu}_{A_b}(\lambda_k))\operatorname{sign}(f^{\mu}_{A_b}(\lambda_{k+1})) = -1 \quad k = 1, \cdots, m \qquad —(3.2.4.5)$$

此即表示，在(3.2.4.1)式成立严格不等号时，A_b 矩阵的拟特征多项式 $f^{\mu}_{A_b}(\mu)$的代数值，在以下 $m-1$ 个开区间的任一个之中

$$(\lambda_1, \lambda_2), (\lambda_2, \lambda_3), \cdots, (\lambda_{m-1}, \lambda_m)$$

其符号(至少有一次)改变. 因此，$f^{\mu}_{A_b}(\mu)$在这 $m-1$ 个开区间的任一个中至少有一个根. 但现在已知 $f^{\mu}_{A_b}(\mu) = 0$ 只有 $m-1$ 个根. 所以，$f^{\mu}_{A_b}(\mu)$ 在任一$(\lambda_k, \lambda_{k+1})$开区间中只改变一次符号，且有一个根 $\mu_k \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$. 故定有

$$\lambda_k < \mu_k < \lambda_{k+1} \quad k = 1, \cdots, m-1 \qquad —(3.2.4.6)$$

成立.

否则，设(3.2.4.3)式不能对 $k = 1, \cdots, m$ 均成立，比如有 k_i，使

$$\xi_{k_i} = \lambda_{k_i} \quad \text{or} \quad \xi_{k_i+1} = \lambda_{k_i} \qquad —(3.2.4.7)$$

则由(3.2.4.2)式的构造即知，不论出现(3.2.4.7)式的哪一种情形，总有

$$\lambda_{k_i} = \mu_{k_i} \qquad —(3.2.4.8)$$

并且，反之亦然，即若对某个下标 k_j，若成立

$$\mu_{k_j} = \lambda_{k_j} \qquad —(3.2.4.9)$$

则必定有

$$\lambda_{k_j} = \xi_{k_j} \quad \text{or} \quad \lambda_{k_j} = \xi_{k_j+1} \qquad —(3.2.4.10)$$

所以，综合(3.2.4.6～8)式，可知不论(3.2.4.3)式是对 $k = 1, \cdots, m$ 亦或只对 λ_k 的某些下标成立，总要有

$$\lambda_k \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_{k+1} \quad k = 1, 2, \cdots, m \qquad —(3.2.4.11)$$

由此即得以下关于拟特征值隔离特征值的定理.

定理 3.2.4.2 设 $A \in R^{m\times m}$ $\boldsymbol{b} \in R^m$ $A^{\mathrm{T}} = A$. A_b 是A 的加边矩阵，则 A_b 的拟特征值 μ_i 隔离 A 的特征值 λ_j：

$$\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_{m-1} \leqslant \lambda_m \qquad —(3.2.4.12)$$

■

系 3.2.4.3 若 A 的特征值中有 $\lambda_k = \lambda_{k+1}$，即 λ_k 是重根特征值，则必有 A_b 的拟特征值 $\mu_k = \lambda_k$，必有 A_b 的特征值 $\xi_k = \lambda_k$（或 $\xi_{k+1} = \lambda_k$）. ■

系 3.2.4.3 表明矩阵 A 的重根特征值同时一定是矩阵 A_b 的拟特征值，同时，一定是 A_b 矩阵的特征值. 这表明如果 A 矩阵有重根特征值，则 A_b 矩阵的拟特征值、特征值中的若干个，完全由 A 的重根特征值决定，而与加边向量 $\boldsymbol{b}$ 无关. 用几何语言表述，就得到以下推论.

推论 3.2.4.4 设 $f(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$ 给出了 R^m 空间上的一个正则曲面 f. 若 f 的 Hessian 矩阵 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ 有重根特征值 λ，则

$$\kappa_f = -\frac{\lambda}{\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|}$$

必就是曲面 f 的主法曲率之一. ■

现再将 A_b 矩阵的特征值 ξ_k 代入(3.2.4.2)式中，得

$$f^{\mu}_{A_b}(\xi_k) = -\xi_k \cdot \prod_{j=1}^{m}(\xi_k - \lambda_j)$$

同样，先设(3.2.4.3)式成立，则

$$\operatorname{sign}(f^{\mu}_{A_b}(\xi_k)) = (-1)^{m-k+1}\operatorname{sign}(\xi_k) \qquad —(3.2.4.13)$$

并知，有

$$\operatorname{sign}(f^{\mu}_{A_b}(\xi_k))\operatorname{sign}(f^{\mu}_{A_b}(\xi_{k+1})) = -\operatorname{sign}(\xi_k \cdot \xi_{k+1}) \qquad —(3.2.4.14)$$

由此知，若 $\xi_k\xi_{k+1} > 0$，则一定有(至少)1 个拟特征值 μ_k，使下式成立

$$\xi_k < \mu_k < \xi_{k+1} \qquad —(3.2.4.15)$$

若(3.2.4.3)式不成立，则必有下标 k_i，使

$$\xi_{k_i} = \lambda_{k_i} \quad \text{or} \quad \lambda_{k_i} = \xi_{k_i+1} \qquad —(3.2.4.16)$$

这样就又总有

$$\mu_{k_i} = \xi_{k_i} = \lambda_{k_i} \quad \text{or} \quad \mu_{k_i} = \xi_{k_i+1} = \lambda_{k_i} \qquad —(3.2.4.17)$$

并且，由(3.2.4.2)式的构造易知，

当 $\xi_{k+1} \neq 0$，若 $\mu_k = \xi_{k+1}$ 则必有 $\lambda_k = \xi_{k+1}$ or $\lambda_{k+1} = \xi_{k+1}$， —(3.2.4.18)

当 $\xi_{k+1} = 0$ 则必有 $\mu_k = 0$ or $\mu_{k+1} = 0$. —(3.2.4.19)

而由定理 3.2.4.1 即知，若

$$\xi_k = \xi_{k+1} \qquad —(3.2.4.20)$$

则必有

$$\lambda_k = \xi_k = \xi_{k+1} = \mu_k \qquad —(3.2.4.21)$$

即 A_b 矩阵特征值 ξ_k 中的重根特征值一定同时是 A 矩阵的特征值和 A_b 矩

阵的拟特征值. 这说明 A_b 矩阵的重根拟特征值中的若干个,可以又是与加边向量 $\boldsymbol{b}$ 有关的. 因为 A_b 矩阵的特征值 ξ_k 显然与 $\boldsymbol{b}$ 有关,故 ξ_k 重根特征值决定的拟特征值 μ_k 一定也与 $\boldsymbol{b}$ 有关.

综合以上分析,先给出以下几个一般性的结论.

推论 3.2.4.5 设 A_b 是实对称的加边矩阵,$A_b \in R^{(m+1)\times(m+1)}$. 设 A_b 的 $m+1$ 个特征值 $\xi_i \neq 0$,且 ξ_i 均是单根特征值,则 A 的特征值 λ_j 严格隔离 A_b 的特征值 ξ_i 的必要条件是 ξ_i 中既有负数特征值又有正数特征值. ■

这里的"严格隔离"的意思即指(3.2.4.3)式成立. 这一推论之所以成立,是因为若(3.2.4.3)式成立,就有(3.2.4.14)式成立. 如果又有 A_b 矩阵的 $m+1$ 个特征值 ξ_i 全为正(或负)数,就导致 A_b 矩阵应有 m 个拟特征值,但这是不可能的.

推论 3.2.4.6 若实对称矩阵 A 的 m 个特征值 λ_i 严格隔离其加边矩阵 A_b 的 $m+1$ 个特征值 ξ_j,则 A 的 $m-1$ 个拟特征值 μ_k 严格隔离 A 的 m 个特征值 λ_i,反之亦然. ■

由(3.2.4.9～10)式的关系即知此推论成立. 此推论指的是全部的特征值、拟特征值间的隔离关系. 它表明若 A、A_b 的特征值 λ_i、ξ_j 各不相同时,A_b 的拟特征值 μ_k 一定也与 λ_i、ξ_j 各不相同,因此,μ_k、λ_i、ξ_j 之间只能是严格隔离. 很显然,在部分的特征值 λ_i、ξ_j 与 μ_k 之间,也有相类似的关系.

推论 3.2.4.7 (局部严格隔离)若实对称矩阵 A 和其加边矩阵 A_b 的特征值 λ_i、ξ_j 中,对某个下标 k,有以下局部严格隔离关系成立:

$$\cdots \leqslant \xi_k < \lambda_k < \xi_{k+1} < \lambda_{k+1} < \xi_{k+2} \leqslant \cdots$$

则必有 A_b 矩阵的拟特征值 μ_k 严格隔离 λ_k、λ_{k+1},即有

$$\lambda_k < \mu_k < \lambda_{k+1}$$

其次,若有以下关系成立

$$\cdots \leqslant \xi_k < \lambda_k < \xi_{k+1} \leqslant \lambda_{k+1} \leqslant \cdots$$

则必有拟特征值 μ_k 单侧严格隔离 λ_k、λ_{k+1},即

$$\lambda_k < \mu_k \leqslant \lambda_{k+1}$$

另一单侧严格隔离的情形类推. ■

进一步分析隔离关系. 对拟特征值 μ_1,设 $\mu_1<0$,并设 A 的特征值 λ_i 严格隔离 A_b 的特征值 ξ_j. 将 μ_1 代入(3.2.4.2)式,得

$$f_{A_b}^{\mu}(\mu_1) = \prod_{j=1}^{m+1}(\mu_1 - \xi_j) - \mu_1 \cdot \prod_{i=1}^{m}(\mu_1 - \lambda_i) = 0$$

因为

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \cdots$$

故

$$\text{sign}\left(-\mu_1 \cdot \prod_{i=1}^{m}(\mu_1-\lambda_i)\right)=(-1)^{m-1}$$

又因为

$$\xi_1<\lambda_1<\mu_1<\lambda_2<\xi_3<\cdots$$

所以

$$\text{sign}\left(\prod_{j=1}^{m+1}(\mu_1-\xi_j)\right)=(-1)^{m-1}\cdot \text{sign}(\mu_1-\xi_2)$$

由此即知，$f''_{A_b}(\mu_1)=0\Rightarrow \text{sign}(\mu_1-\xi_2)<0\Rightarrow \mu_1<\xi_2$. 所以

$$\mu_1<0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1<\mu_1<\xi_2$$

再设 $\mu_1>0$，则此时有

$$\text{sign}\left(-\mu_1 \prod_{i=1}^{m}(\mu_1-\lambda_i)\right)=(-1)^{m}$$

且仍有

$$\text{sign}\left(\prod_{j=1}^{m+1}(\mu_1-\xi_j)\right)=(-1)^{m-1}\text{sign}(\mu_1-\xi_2)$$

故由 $f''_{A_b}(\mu_1)=0\Rightarrow -\text{sign}(\mu_1-\xi_2)<0\Rightarrow \mu_1>\xi_2$. 所以

$$\mu_1>0 \quad\Rightarrow\quad \xi_2<\mu_1<\lambda_2$$

以上结论显然可以推广到 μ_k，$k=1,2,\cdots,m-1$. 故一般地有

$$\begin{cases}\text{当 } \mu_k\leqslant 0 & \lambda_k\leqslant\mu_k\leqslant\xi_{k+1}\leqslant\lambda_{k+1}\\ \text{当 } \mu_k\geqslant 0 & \lambda_k\leqslant\xi_{k+1}\leqslant\mu_k\leqslant\lambda_{k+1}\end{cases} \qquad \text{—(3.2.4.22)}$$

由以上关系，若有 $\xi_{k+j}=\xi<0$，$j=1,2,\cdots,p$，即 ξ 是 A_b 的 p 重根负数特征值，则在

$$\xi_{k+1}\leqslant\lambda_{k+1}\leqslant\mu_{k+1}\leqslant\xi_{k+2}\leqslant\cdots\leqslant\xi_{k+p-1}\leqslant\lambda_{k+p-1}\leqslant\mu_{k+p-1}\leqslant\xi_{k+p}$$

的关系式中令“$\leqslant$”号为“$=$”号，即知 A 的特征值中有 $\lambda_{k+j}=\xi$，$j=1,2,\cdots,p-1$，即 ξ 是 A 的(至少) $p-1$ 重根负数特征值. 类似地，ξ 也是 A_b 矩阵的(至少) $p-1$ 重根负数拟特征值. 以上关系亦可推广到 $\xi_{k+j}=\xi>0$，$j=1,2,\cdots,p$ 的情形. 所以有

推论 3.2.4.8 若 $\xi\neq 0$ 是实对称加边矩阵 A_b 的 p 重根特征值($2\leqslant p\leqslant m$)，则 ξ 同时是矩阵 A 的(至少) $p-1$ 重根特征值，也是矩阵 A_b 的(至少) $p-1$ 重根拟特征值. 特别地，若 $p=m$，则 ξ 是 A_b 矩阵的 $m-1$ 重根拟特征值. ■

以上推论中引入了一个条件：$2\leqslant p\leqslant m$. $p\geqslant 2$ 的必要性显然. 以下引入 A_b 矩阵的多重根特征值的重数 $p\leqslant m$ 的引理.

引理 3.2.4.9 实对称加边矩阵

$$A_b = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \quad A^{\mathrm{T}} = A \quad A \in R^{m\times m} \quad \boldsymbol{b} \in R^m$$

在 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ 时，其多重根特征值的重数 $p \leqslant m$. ■

证明： 反证法. 若 A_b 有 $m+1$ 重特征根 a，则一定有正交矩阵 $Q^{\mathrm{T}}Q = I_{m+1}$，使 A_b 的谱分解矩阵是

$$Q^{\mathrm{T}}A_bQ = \begin{bmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{bmatrix} = aI_{m+1}$$

故又应有

$$A_b = Q \cdot aI_{m+1} \cdot Q^{\mathrm{T}} = aI_{m+1}$$

此即表明 A_b 应为对角矩阵，但现在 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$，故这是不可能的. 所以知加边矩阵 A_b 的重根特征值的重数 $p < m+1$.

再证存在 $p = m$ 的加边实对称矩阵 A_b. 由于这里的 m 是随意的，故不妨取为 $m = 2$ 证之即可. 构造

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A_b = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{且 } c \neq 0.$$

则 A_b 的特征多项式是

$$\begin{vmatrix} \xi - a & 0 & -1 \\ 0 & \xi - c & 0 \\ -1 & 0 & \xi \end{vmatrix} = (\xi - c)[\xi(\xi - a) - 1] = 0$$

即知 c 是 A_b 的特征根. 现再令 c 是 A_b 的 $m = 2$ 重特征根，即要求

$$c(c-a) = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{c^2 - 1}{c}$$

即可. 这样的 a 显然可以取到. 故 A_b 矩阵的多重根特征根的重数 p 可以取到 $p = m$，即证.

从以上证明中附带地已得到以下结论：

系 3.2.4.10 设 $A \in R^{n\times n}$ 是实对称矩阵，且 A 有 n 个非 0 特征值 λ_i，若 $\lambda_i = a$，$i = 1, 2, \cdots, n$，$a \neq 0$，则 A 必为对角矩阵. ■

定义 3.2.4.1 若实对称加边矩阵 A_b（或多重加边矩阵 A_{bb}）的拟特征值 μ_i 全部大于 0，称二次型

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\alpha} \quad A \in R^{m\times m} \quad \boldsymbol{\alpha} \in R^{m}$$

是在条件

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0 \quad (\text{or } \boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

约束下正定的. 简称 A 矩阵是($\boldsymbol{b}$ 加边向量)约束正定的. ■

类似地有约束负定的定义(拟特征值 μ_i 全部小于 0). 当 A 是约束正定的, 则由拟特征值是矩阵 A 和向量 $\boldsymbol{\alpha}$(满足约束条件)的 RayLiegh 商的极值这一性质即知

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\alpha} > 0 \quad \boldsymbol{\alpha} \in \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0 \quad \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{\alpha} \in R^{m}\} \qquad —(3.2.4.23)$$

对多重加边矩阵 A_{bb} 的情形, 只需将(3.2.4.23)式$\{\cdot\}$集合中的条件 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0$ 理解为 $\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0 \quad i = 1, \cdots, n$ 即可(下同). 反之, 若二次型 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\alpha} > 0$, 在 $\boldsymbol{\alpha} \in \{\cdot\}$ 条件下, 则 A_b 矩阵的拟特征值必全部大于 0. 以下类似.

当 A 是约束负定时, 则在(3.2.4.23)式的约束条件 $\boldsymbol{\alpha} \in \{\cdot\}$ 下, 二次型 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\alpha} < 0$.

推广以上定义, 可有, 若二次型 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\alpha} \geqslant 0$(或 $\leqslant 0$), 当 $\boldsymbol{\alpha} \in \{\cdot\}$, 即称 A 矩阵是约束半正(负)定的.

若二次型 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\alpha}_1 > 0 \quad \boldsymbol{\alpha}_1 \in \{\cdot\}$, 又有 $\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\alpha}_2 < 0 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \in \{\cdot\}$, 则称 A 是约束不定的.

这里 $\boldsymbol{\alpha} \in \{\cdot\}$ 均指(3.2.4.23)式中的约束集合条件.

以下几个推论给出 A_b、A 矩阵的正(负)定性质与 A 的约束正(负)定性质间的关系.

推论 3.2.4.11 $A \in R^{m\times m} \quad \boldsymbol{b} \in R^{m} \quad \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = 1 \quad A^{\mathrm{T}} = A$. A 是 $\boldsymbol{b}$ 加边向量约束正定的充要条件是加边矩阵 A_b 的 $m+1$ 个特征值 ξ_j 中

$$\min_{1\leqslant j\leqslant m+1} \xi_j = \xi_1 < 0 \quad \xi_j > 0 \quad j \geqslant 2 \qquad —(3.2.4.24)$$

A_b 是约束负定的充要条件是

$$\max_{1\leqslant j\leqslant m+1} \xi_j = \xi_{m+1} > 0 \quad \xi_j < 0 \quad j \leqslant m \qquad —(3.2.4.25)$$

■

证明: 充分性由(3.2.4.22)式即知. 下证必要性. 以 A 是约束正定的情形为例. 由于 A 是约束正定的, 故 A_b 的 $m-1$ 个拟特征值 $\mu_k > 0$. 但由(3.1.1.45)式, 又应有

$$\mu_1\mu_2 \cdot \cdots \cdot \mu_{m-1} = -\mid A_b \mid = -(\xi_1\xi_2 \cdot \cdots \cdot \xi_{m+1}) > 0$$

即知 A_b 的 $m+1$ 个特征值中必须含有奇数个特征值 ξ_j 是负数. 因此, 由(3.2.4.22)式可知只能有 1 个 ξ_j 是负数, 故必有(3.2.4.24)式成立. 如果 A 是

约束负定的，那么，$-A$ 是约束正定的，且 $-A_b$ 的拟特征值是 $-\mu_k$，其中，μ_k 是 A 的拟特征值. 利用(3.2.4.24)式，即可知(3.2.4.25)式成立.

推论 3.2.4.11 还可以加强，得到以下推论.

推论 3.2.4.12 $A \in R^{m\times m}$ $\boldsymbol{b} \in R^m$ $A^T = A$. 若 A 是具有非 0 特征值的半正(负)定矩阵，则 A_b 加边矩阵必是不定的，即 A_b 矩阵的特征值中一定即有正数特征值又有负数特征值. ■

证明： 设 A 是半正定矩阵，Q 是 A 的谱分解矩阵 $Q^TQ = I_m$，有

$$Q^TAQ = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m]$$

且 $\lambda_i \geqslant 0$ 并至少有一个 $\lambda_i > 0$.

因为

$$A_b = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^T & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} Q^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 & c_1 \\ & \lambda_2 & & & c_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \lambda_m & c_m \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_m & 0 \end{bmatrix} = A'_b$$

因此，A_b、A_b'具有相同的特征值. 故只需分析 A_b'形式的矩阵的特征值的符号. 这里

$$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_m)^T$$

$$\boldsymbol{c} = Q^T\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0} \quad (\because \text{ 已设 } \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0})$$

作 A_b'的特征多项式，并记为

$$F(\xi) = |\xi I_{m+1} - A'_b| = \xi \cdot \prod_{i=1}^{m}(\xi - \lambda_i) - \sum_{j=1}^{m} c_j^2 \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m}(\xi - \lambda_i) \qquad \text{—(a)}$$

因为 A 是半正定矩阵，$\lambda_i \geqslant 0 \Rightarrow \min\lambda_i = \lambda_1 \geqslant 0$，故知 $\lambda_1 = 0$. 为简化符号，不妨设 λ_2、$\lambda_3 \cdots$，$\lambda_m > 0$，这不影响以下分析的一般性. 故可有

$$F(\xi) = \xi^2 \cdot \prod_{i=2}^{m}(\xi - \lambda_i) - c_1^2 \prod_{i=2}^{m}(\xi - \lambda_i) - \xi \cdot \sum_{j=2}^{m} c_j^2 \cdot \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq j}}^{m}(\xi - \lambda_i) \qquad \text{—(b)}$$

将 $\xi = 0$ 代入(b)式，得

$$F(0) = (-1)^m \cdot c_1^2 \prod_{i=2}^{m}\lambda_i \qquad \text{—(c)}$$

若 $c_1 \neq 0$，即知 $F(0) \neq 0$. 所以，0 不是 A_b'矩阵的特征值. 且由隔离关系，应有

$$\xi_1 \leqslant \lambda_1 \quad \Rightarrow \quad \xi_1 \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_1 < 0$$

即知 A_b'矩阵的特征值中有负数特征值. 另一方面，仍由隔离关系，

$$0<\lambda_k\leqslant\xi_{k+1}\leqslant\lambda_{k+1}\quad k=2,3,\cdots,m$$

故 A_b'矩阵的特征值中有正数特征值.即证以上结论.

若 $c_1=0$,则以上(b)式又可表成

$$F(\xi)=\xi\cdot\left[\xi\prod_{i=2}^{m}(\xi-\lambda_i)-\sum_{j=2}^{m}c_j^2\cdot\prod_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^{m}(\xi-\lambda_i)\right]\qquad\text{—(d)}$$

此时 $\xi=0$ 是 $F(\xi)=0$ 的一个根.记

$$F^1(\xi)=\xi\prod_{i=2}^{m}(\xi-\lambda_i)-\sum_{j=2}^{m}c_j^2\cdot\prod_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^{m}(\xi-\lambda_i)\qquad\text{—(e)}$$

则

$$F(\xi)=\xi\cdot F^1(\xi)$$

下证 $F^1(\xi)=0$ 必有负数根.

先证 0 不是 $F^1(\xi)$的根.

$\because$

$$F^1(0)=(-1)^{m-1}\cdot\sum_{j=2}^{m}c_j^2\cdot\prod_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^{m}\lambda_i\qquad\text{—(f)}$$

故

$$\begin{cases}F^1(0)>0 & \text{当 } m \text{ 是奇数}\\ F^1(0)<0 & \text{当 } m \text{ 是偶数}\end{cases}\qquad(\because c_j\quad j=2,\cdots,m\text{ 不全为 }0)$$

再取 $\xi=-M\quad M>0$ 代入 $F^1(\xi)$,得

$$F^1(-M)=(-1)^{m-1}\cdot\left[-M+\sum_{j=2}^{m}\frac{c_j^2}{M+\lambda_j}\right]\cdot\prod_{i=2}^{m}(M+\lambda_i)$$

所以,只要取 M 充分大,总成立

$$\begin{cases}F^1(-M)<0 & \text{当 } m \text{ 是奇数}\\ F^1(-M)>0 & \text{当 } m \text{ 是偶数}\end{cases}$$

与 $F^1(0)$相比较,即知在开区间 $\xi\in(-M,0)$中 $F^1(\xi)$的代数值改变符号(不论 m 是奇、偶数).故知必有 $\xi^*\in(-M,0)$,使

$$F^1(\xi^*)=0\quad\text{且 }\xi^*<0$$

显然 ξ^* 同时又是 $F(\xi)=\xi F^1(\xi)=0$ 的一个根.即知 A_b'矩阵必含有至少 1 个负数特征值.而 A_b'矩阵含有正数特征值易知.即证.

例 3.2.4.1 设 $A\in R^{m\times m}\quad \boldsymbol{b}\in R^m$

$$A=\begin{bmatrix} a & & & 0 \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0} \quad A_b=\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

则由

$$|\xi I_{m+1}-A_b|=(\xi-a)^{m-1}\cdot[\xi(\xi-a)-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}]=0$$

即知 A_b 矩阵有 $m-1$ 重特征值 $\xi=a$，同时，有特征值

$$\xi^1=\frac{a-\sqrt{a^2+4\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}}{2}<0 \quad (\text{不论 } a \gtreqless 0)$$

$$\xi^2=\frac{a+\sqrt{a^2+4\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}}{2}>0 \quad (\text{不论 } a \gtreqless 0)$$

即可验证以上诸结论.

系 3.2.4.13 $A\in R^{m\times m}$ $\boldsymbol{b}\in R^m$ $A^{\mathrm{T}}=A$. 若 A 矩阵是半正(负)定的⇒A 矩阵是约束半正(负)定的，反之未必. ■

系 3.2.4.13 中将“半”字去掉，结论依旧成立.

系 3.2.4.14 $A\in R^{m\times m}$ $\boldsymbol{b}\in R^m$ $A^{\mathrm{T}}=A$. 若 A_b 加边矩阵是半正(负)定的⇒A 矩阵是不定的. ■

系 3.2.4.13 在几何意义上具有重要性. 给予以下定义：

定义 3.2.4.2 Monge 形式曲面函数 F: $z=f(\boldsymbol{x})$ $\boldsymbol{x}\in D\subset R^m$ 给出的曲面 F 在 $\boldsymbol{x}^0\in D$ 的邻域是严格上凹(上凸)的，如果曲面 F 在法向量

$$\nabla F=(\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0),\ -1)^{\mathrm{T}}$$

给出的定向下，曲面 F 在 $(\boldsymbol{x}^0,\ z^0)$ 处的法截曲率恒 >0(或 <0). 如果曲面 F 在 $(\boldsymbol{x}^0,\ z^0)$ 处的法截曲率全部 $\geqslant 0$(或 $\leqslant 0$)，称曲面 F 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点，邻域是上凹(上凸)的. ■

上文已经说过，以 z 轴的正方向为定向，可以在 $\forall(\boldsymbol{x},\ z)=R^{m+1}(x\in R^m)$ 空间上定义“上”这一说法的指向. 如，构造(2.2.3.19)式决定的子空间 L_z. 则由(2.2.3.23)式，若上述曲面 F 在 $(\boldsymbol{x}^0,\ z^0)$ 处的法截曲率 κ_F^i 全部 $\geqslant 0$，则曲面 F 在过 $\boldsymbol{x}^0$ 点处 L_z 空间上的交曲面上的法截曲率 κ_z^i 也全部 $\geqslant 0$. 则在 L_z 空间上，z 轴的正向为向上的方向具有确定不变的指向. 在 $m=2$ 的情形下，这一向上的指向是直观的.

定义 3.2.4.3 一般正则曲面 f: $f(\boldsymbol{x})=c$ $\boldsymbol{x}\in D\subset R^m$ c 为常数，给出的曲面 f，在 $\boldsymbol{x}^0\in D$ 的邻域是严格凹(凸) 向曲面法方向的，如果曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点

处的法截曲率恒 >0(或 <0),且曲面法方向由 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$ 给出. 如果曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的法截曲率恒 $\geqslant 0$(或 $\leqslant 0$),称曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点凹(凸)向曲面的法方向. ■

系 3.2.4.13 的结论并可见(2.2.3.26)式给出的关系,表示有以下推论.

推论 3.2.4.15 Monge 形式曲面函数 $F: z = f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$ 给出的曲面 F,在 $\boldsymbol{x}^0 \in D$ 的邻域上凸(上凹)$\Rightarrow z^0 = f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$ 决定的曲面一定在 $\boldsymbol{x}^0 \in D$ 的邻域凹(凸)向曲面法方向,其中 $z^0 = f(\boldsymbol{x}^0)$. 但反之未必. ■

再由推论 3.2.4.7 以及推论 3.2.4.11~12,可得

系 3.2.4.16 若 A 矩阵是半负定矩阵,且其特征值中

$$\max_{1\leqslant j\leqslant m} \lambda_j = \lambda_m = 0 \quad \lambda_j < 0 \quad j < m$$

并且 A_b 加边矩阵的特征值 $\xi_m < 0$,则 A 必是 $\boldsymbol{b}$ 加边向量约束负定的.

若 A 矩阵是半正定矩阵,且其特征值中

$$\min_{1\leqslant j\leqslant m} \lambda_j = \lambda_1 = 0 \quad \lambda_j > 0 \quad j > 1$$

并且 A_b 加边矩阵的特征值 $\xi_2>0$,则 A 必是 $\boldsymbol{b}$ 加边向量约束正定的. ■

系 3.2.4.16 指出了 A 矩阵是约束正(负)定的,并不一定要求 A 矩阵是正(负)定的. 例 3.1.1.3 中的线性齐次曲面函数就是以上系的一个示例. 在 R^m 空间曲面主法曲率符号分区(即 Dupin 标形)的分析中,还可以看到 A 矩阵是不定的,但同时 A 矩阵可以是(多重)约束正(负)定的.

将对应于 Monge 形式曲面函数所决定的拟特征多项式(见(3.1.1.73)式)表示成以下形式:

$$F^{\mu}_{A_b}(\mu) = \mu\begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} - |\mu I_m - A| = \begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \mu & -1 \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

且由于

$$\begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & \mu \end{vmatrix} - \mu\,|\mu I_m - A|$$

所以

$$F^{\mu}_{A_b}(\mu) = \mu\begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & \mu \end{vmatrix} - (\mu^2 + 1)\,|\mu I_m - A| \qquad —(3.2.4.26)$$

仍用 λ_i、ξ_j 表示 A、A_b 矩阵的特征值,便有

$$F^{\mu}_{A_b}(\mu) = \mu \cdot \prod_{j=1}^{m+1}(\mu - \xi_j) - (\mu^2 + 1) \cdot \prod_{i=1}^{m}(\mu - \lambda_i) \qquad —(3.2.4.27)$$

与(3.2.4.2)式表示的 $f^{\mu}_{A_b}(\mu)$ 多项式相比较,可见二者的区别.

类似地,分别用 λ_k、ξ_k 代入(3.2.4.27)式,并注意到 λ_k、ξ_k 之间存在的隔离关系,并用 μ^F_k 表示 $F^{\mu}_{A_b}(\mu) = 0$ 的 m 个根,可得以下结论.

推论 3.2.4.17 拟特征根 μ_k^F 隔离 A_b 矩阵的特征值 ξ_k，即

$$\xi_1 \leqslant \mu_1^F \leqslant \xi_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_m^F \leqslant \xi_{m+1} \qquad \text{—(3.2.4.28)}$$

并且

$$\begin{cases} \xi_k \leqslant \lambda_k \leqslant \mu_k \leqslant \xi_{k+1} & \text{当 } \mu_k \geqslant 0 \\ \xi_k \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k \leqslant \xi_{k+1} & \text{当 } \mu_k \leqslant 0 \\ \mu_k^F = \lambda_k \Leftrightarrow \lambda_k = \xi_k \text{ or } \lambda_k = \xi_{k+1} & (\mu_k^F \neq 0) \\ \mu_k^F = 0 \Rightarrow \lambda_k = 0 \text{ or } \lambda_{k+1} = 0 \end{cases} \qquad \text{—(3.2.4.29)}$$

■

系 3.2.4.18 拟特征值 μ_k^F 中含有 $\mu_i^F = 0$ 的充要条件是 A 的特征值 λ_j 中有 0 特征值. ■

系 3.2.4.18 的结论，用几何语言可以表述成这样一个推论：

推论 3.2.4.19 由一般函数 $f(\boldsymbol{x}) = c \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$，$c \in R$ 决定的曲面 f 的 Hessian 矩阵$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$的特征值中含有 0 特征值，则以 Monge 形式

$$F: z = f(\boldsymbol{x})$$

决定的 R^{m+1} 空间上的曲面 F 上，必有主法曲率 $\kappa_F^i = 0$. ■

在矩阵特征值理论中，有重要的极小极大原理：

定理 3.2.4.20(Courant-Fischer 极小极大原理) 对任一自伴矩阵 $A \in C^{n\times n}$，λ_i 是 A 的特征值，且 λ_i 的下标按 λ_i 的代数值从小到大的顺序排列，$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$，则

$$\lambda_i = \min_{\dim S = i} \max_{\substack{\boldsymbol{x} \in S \\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}} \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad \text{—(3.2.4.30)}$$

其中 S 是 C^n 的线性子空间，$\dim S$ 是 S 的维数. 最小值是对遍取 C^n的 i 维线性子空间而言的[1]. ■

利用拟特征值 μ_i 的定义与以上使用的符号，从定理 3.2.4.20 中可以直接得到以下关于拟特征值 μ_i 的极小极大原理.

定理 3.2.4.21(拟特征值的极小极大原理) 设 $A \in R^{m\times m} \quad \boldsymbol{b} \in R^m \quad \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$，$A^{\mathrm{T}} = A$. A_b 是 A 的加边矩阵，μ_i 是 A_b 的拟特征值，且 $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_{m-1}$，$L_b$ 是以下集合，

$$L_b = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} = 0 \quad \boldsymbol{\alpha} \in R^m \quad \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}\} \qquad \text{—(3.2.4.31)}$$

则

$$\mu_i = \min_{\substack{\dim S = i \\ S \subset L_b}} \max_{\boldsymbol{\alpha} \in S} \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}} \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 \qquad \text{—(3.2.4.31a)}$$

---

〔1〕《特殊矩阵》，陈景良、陈向晖，同前注，第 190 页，定理 3.5.3.

其中 S 是 L_b 的线性子空间. $\dim S$ 是 S 的维数. 最小值是对遍取 L_b 的 i 维线性子空间而言的. ■

注意,(3.2.4.31)式中 $\boldsymbol{\alpha}$ 的意义是集合 L_b 中的方向向量. 这里,L_b 相当于一个超平面. 而(3.2.4.30)式中的 $\boldsymbol{x}$,则是 R^m 中点的向量表示,即将 R^m 中的任一个点都看成是从原点出发的一个方向向量 $\boldsymbol{x}$ 的终点.

将超平面方程 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$ 的解表成

$$\boldsymbol{\alpha}=C\boldsymbol{x}\quad C\in R^{m\times(m-1)}\quad \boldsymbol{x}\in R^{m-1}\quad \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\qquad —(3.2.4.32)$$

且 C 是任取的列正交且归一化的基础解系矩阵. 再将(3.2.4.32)式代入(3.2.4.31)式的 RayLiegh 商,则(3.2.4.31)式的左边是

$$\min_{\substack{\dim S=i\\ S\subset L_b}}\max_{C\boldsymbol{x}\in S}\frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[C^{\mathrm{T}}AC]\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}\qquad —(3.2.4.33)$$

现令 $\boldsymbol{x}\in S'$ $S'\subset R^{m-1}$ 是任一 i 维的线性子空间,则显然 $C\boldsymbol{x}$ 就是 L_b 的 i 维线性子空间. 故由定理 3.2.4.20 即知(3.2.4.33)式可写成

$$\lambda_i=\min_{\dim S'=i}\max_{\substack{\boldsymbol{x}\in S'\\ \boldsymbol{x}\neq 0}}\frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[C^{\mathrm{T}}AC]\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}\quad i=1,2,\cdots,m-1\qquad —(3.2.4.34)$$

其中 λ_i 是矩阵 $C^{\mathrm{T}}AC$ 的特征值,但由拟特征值的定义知,$C^{\mathrm{T}}AC$ 矩阵的特征值 λ_i 就是 A_b 矩阵的拟特征值 μ_i,即得(3.2.4.31a)式.

定理 3.2.4.21 的几何意义是,对于正则曲面 f: $f(\boldsymbol{x})=0$ 的曲面函数,在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0$ 点处,曲面的主法曲率 κ_f^i,$\kappa_f^1\leqslant\kappa_f^2\leqslant\cdots\leqslant\kappa_f^{m-1}$,则 κ_f^i 主法曲率是曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的 $m-1$ 维切空间中的全部的 $m-i$ 维线性子空间 S 的方向向量元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 决定的法截曲率的极大值中的极小值. 这里切空间用 L_f 表示,并将 L_f 表示成由 $\boldsymbol{x}^0$ 指向 $\boldsymbol{x}$ 点的方向向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的集合

$$L_f=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}=0\quad \boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0\quad \boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{x}、\boldsymbol{x}^0\in R^m\}$$

任取线性无关的 $\boldsymbol{\alpha}^1,\boldsymbol{\alpha}^2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}^i\in L_f$, $1\leqslant i\leqslant m-1$,

$$S=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}=\sum_{j=1}^{i}t_j\boldsymbol{\alpha}^j\quad t_j\in R\}$$

则 $S\subset L_f$,且 $\dim S=i$ 就是 L_f 的 i 维线性子空间.

那么,对 $\boldsymbol{\alpha}\in S$,构造曲面 f 在 x^0 点处的法截平面 $L_\pi(\boldsymbol{\alpha})$,

$$L_\pi(\boldsymbol{\alpha})=\left\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{\alpha}t+\nabla\tilde{f}s\quad t,s\in R\quad \nabla\tilde{f}=\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\right\}$$

在 $L_\pi(\boldsymbol{\alpha})$上,曲面 f 的交曲线(法截曲线)的曲率是

$$\kappa_f(\boldsymbol{\alpha}) = -\frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}} \cdot \frac{1}{\|\nabla f\|} \qquad \text{—(2.2.1.9)}$$

则由以上定理，主法曲率 κ_f^i 即应为

$$\kappa_f^i = \min_{\dim S = m-i} \max_{\boldsymbol{\alpha}\in S} \kappa_f(\boldsymbol{\alpha}) \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 \qquad \text{—(3.2.4.35)}$$

极小值是对 S 遍取 L_f 的全部 $m-i$ 维线性子空间而言的.

在极值规划中，以下性质容易理解，即设极值规划目标函数为 $f(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x}$ 的取值集合为 $\boldsymbol{x}\in S$ 和 $\boldsymbol{x}\in T$，若 $S\subseteq T$，则有

$$\begin{cases} \max\limits_{\boldsymbol{x}\in S} f(\boldsymbol{x}) \leqslant \max\limits_{\boldsymbol{x}\in T} f(\boldsymbol{x}) \\ \min\limits_{\boldsymbol{x}\in S} f(\boldsymbol{x}) \geqslant \min\limits_{\boldsymbol{x}\in T} f(\boldsymbol{x}) \end{cases} \quad (S\subseteq T) \qquad \text{—(3.2.4.36)}$$

将以上的"$\subseteq$"改成"$\subset$"不影响结果.

利用极值规划的上述性质和定理 3.2.4.21，可将定理 3.2.4.1 推广到拟特征值. 先可用类似上述的方法将定理 3.2.4.21 直接推广到多重约束拟特征值的场合.

定理 3.2.4.22(多重约束拟特征值的极小极大原理) 设 $A\in R^{m\times m}$，$B\in R^{m\times n}$ $1\leqslant n< m$，$A^{\mathrm{T}} = A$，$\operatorname{rank} B = n$.

$$A_{bb} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

是 A 的多重加边矩阵，μ_i 是 A_{bb} 的拟特征值，$\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots\leqslant\mu_{m-n}$，$L_{bb}$ 是以下集合

$$L_{bb} = \{\boldsymbol{\alpha} \mid B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{\alpha}\in R^m \quad \boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}\} \qquad \text{—(3.2.4.37)}$$

则

$$\mu_i = \min_{\substack{\dim S = i \\ S\subset L_{bb}}} \max_{\boldsymbol{\alpha}\in S} \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}} \quad i = 1, 2, \cdots, m-n \qquad \text{—(3.2.4.37a)}$$

其中 S 是 L_{bb} 的线性子空间. $\dim S$ 是 S 的维数. 最小值是对遍取 L_{bb} 的 i 维线性子空间而言的. ■

构造极值规划 $A\in R^{m\times m}$ $\boldsymbol{b}\in R^m$

$$\text{极值：} \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}} \qquad \text{s. t.} \begin{cases} \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0 \\ \alpha_i = 0 \end{cases} \qquad \text{—(3.2.4.38)}$$

其中 α_i 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 向量的第 i 个分量.

由关于多重加边矩阵的拟特征值的定义，并设 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{e}_i$ 向量线性无关，其中的 $\boldsymbol{e}_i$ 是单位矩阵 I_m 的第 i 列向量，则(3.2.4.38)式的解是以下拟特征多项式的 $m-2$个根 γ_j^i，

$$\begin{vmatrix} \gamma^i I_m - A & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{e}_i \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{e}_i & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad —(3.2.4.39)$$

并设 γ_j^i的下标排序是 $\gamma_1^i \leqslant \gamma_2^i \leqslant \cdots \leqslant \gamma_{m-2}^i$.

由定理 3.2.4.22，即知

$$\gamma_j^i = \min_{\substack{\dim S=j \\ S\in L_{bb}^i}} \max_{\boldsymbol{\beta}\in S} \frac{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}} \qquad —(3.2.4.40)$$

$$L_{bb}^i = \left\{ \boldsymbol{\beta} \middle| \begin{cases} \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta} = 0 & \boldsymbol{\beta} \in R^m \quad \boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{0} \\ \beta_i = 0 \end{cases} \right\} \qquad —(3.2.4.41)$$

则显然

$$L_{bb}^i \subset L_b$$

其中 L_b 由(3.2.4.31)式决定. 则由(3.2.4.36)式

$$\gamma_{m-2}^i = \max_{\boldsymbol{\beta}\in L_{bb}^i} \frac{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}} \leqslant \max_{\boldsymbol{\alpha}\in L_b} \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}} = \mu_{m-1}$$

上式最右端的“=”，由定理 3.2.4.21 的结论可得. 故这里(和以下)的 μ_i 均表示

$$A_b = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

加边矩阵的对应拟特征值，且 $\mu_i \leqslant \mu_{i+1}$.

同理，可知有

$$\mu_{m-2} = \min_{\substack{\dim S=m-2 \\ S\subset L_b}} \max_{\boldsymbol{\alpha}\in S} \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}} \leqslant \max_{\substack{\boldsymbol{\beta}\in L_{bb}^i \\ \dim L_{bb}^i = m-2}} \frac{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}} = \gamma_{m-2}^i$$

故已有

$$\mu_{m-2} \leqslant \gamma_{m-2}^i \leqslant \mu_{m-1}$$

再记

$$\overline{S}'_{m-3} = \{S' \mid S' \subset L_{bb}^i,\ \dim S' = m-3\} \ .$$

$$\overline{S}_{m-2} = \{S \mid S \subset L_b,\ \dim S = m-2\}$$

显然又有

$$\overline{S}'_{m-3} \subset \overline{S}_{m-2}$$

因为对任一 $S' \in \overline{S}'_{m-3}$，总有 $S \in \overline{S}_{m-2}$，使 $S' \subset S$. 所以，

$$\max_{\alpha \in S} \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}} \geqslant \max_{\beta \in S'} \frac{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}} \quad (\text{取 } S' \subset S)$$

故

$$\gamma^i_{m-3} = \min_{S' \in \overline{S}'_{m-3}} \max_{\beta \in S'} \frac{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}} \leqslant \min_{S \in \overline{S}_{m-2}} \max_{\alpha \in S} \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}} = \mu_{m-2}$$

再记

$$\overline{S}_{m-3} = \{S \mid S \in L_b,\ \dim S = m-3\}$$

则显然又有

$$\overline{S}'_{m-3} \subset \overline{S}_{m-3}$$

所以

$$\mu_{m-3} = \min_{S \in \overline{S}_{m-3}} \max_{\alpha \in S} \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}} \leqslant \min_{S' \in S'_{m-3}} \max_{\beta \in S'} \frac{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}} = \gamma^i_{m-3}$$

即可知有

$$\mu_{m-3} \leqslant \gamma^i_{m-3} \leqslant \mu_{m-2} \leqslant \gamma^i_{m-2} \leqslant \mu_{m-1}$$

如此递推，即可证

$$\mu_1 \leqslant \gamma^i_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma^i_{m-2} \leqslant \mu_{m-1} \qquad \text{—(3.2.4.42)}$$

所以，(3.2.4.39)式的拟特征值 γ^i_j，隔离加边矩阵 A_b 的拟特征值 μ_k，并且，(3.2.4.39)式中的 i 可取 $i = 1, 2, \cdots, m$，只要所取的 $\boldsymbol{e}_i$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 向量线性无关的.

但现在将(3.2.4.39)式展开，便知

$$\begin{vmatrix} \gamma^i I_m - A & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{e}_i \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{e}_i & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \gamma^i I_{m-1} - A\{i\} & \boldsymbol{b}\{i\} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\{i\} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{—(3.2.4.43)}$$

其中 $A\{i\}$ 是 A 矩阵划去第 i 行、第 i 列元素后的 $m-1$ 阶余子矩阵，$\boldsymbol{b}\{i\}$ 是 $\boldsymbol{b}$ 向量划去第 i 个分量后的子向量. 利用前面介绍过的符号，

$$\begin{bmatrix} A\{i\} & \boldsymbol{b}\{i\} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\{i\} & 0 \end{bmatrix} = A_b\{1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, m\} \qquad \text{—(3.2.4.44)}$$

$A_b\{1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, m\}$ 就是 A_b 的 $m-1$ 阶加边主子矩阵. 所以,(3.2.4.43) 式表明,γ_j^i 就是加边矩阵 A_b 的任一个 $m-1$ 阶加边主子矩阵 $A\{1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, m\}$ 的拟特征值. 即有以下定理

定理 3.2.4.23 设 $A \in R^{m\times m}$ $\boldsymbol{b} \in R^m$ $A^{\mathrm{T}} = A$, A_b 是 A 的加边矩阵,A_b 加边矩阵划去第 i 行、第 i 列元素后的余子矩阵,记为

$$A_b\{i\} = \begin{bmatrix} A\{i\} & \boldsymbol{b}\{i\} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\{i\} & 0 \end{bmatrix} \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

当 $\boldsymbol{b}\{i\} \neq \boldsymbol{0}$,则 $A_b\{i\}$ 的拟特征值 γ_j^i, $j = 1, 2, \cdots, m-2$ 隔离 A_b 的拟特征值 μ_k, $k = 1, 2, \cdots, m-1$, 即

$$\mu_1 \leqslant \gamma_1^i \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_{m-2}^i \leqslant \mu_{m-1} \qquad \blacksquare$$

由上所述,这一定理也可以表述成 A_b 加边矩阵的 $m-1$ 阶加边主子矩阵的拟特征值隔离 A_b 矩阵的拟特征值. 并且,可递推得,A_b 加边矩阵的 $m-2$ 阶加边主子矩阵的拟特征值隔离其 $m-1$ 阶加边主子矩阵的拟特征值,等等.

附带指出,一般地 $A \in R^{n\times n}$,则 A 的 $n-1$ 阶主子矩阵$\widetilde{A}$ 的特征值显然总可以表示成某个下标 i 决定的加边矩阵

$$A_{\boldsymbol{e}_i} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{e}_i \\ \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

的拟特征值. 故定理 3.2.4.1 也可以表述成,$A_{\boldsymbol{e}_i}$ 的拟特征值隔离 A 的特征值. 这里再次看到拟特征值概念与特征值概念在一定条件下就是等价的.

从定理 3.2.4.1 中还可以得到定理 3.2.4.3 的另一个形式.

对 $A \in R^{m\times m}$, $\boldsymbol{b} \in R^m$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ $A^{\mathrm{T}} = A$. 设 $C \in R^{m\times(m-1)}$ $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} C = \boldsymbol{0}$ 是 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} = 0$ 的任一个基础解系矩阵,并设

$$C^{\mathrm{T}} C = I_{m-1} \quad C = [\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \cdots, \boldsymbol{C}_{m-1}]$$

$\boldsymbol{C}_j$ 是 C 矩阵的第 j 列向量. 则由以上的分析,加边矩阵 A_b 的 $m-1$ 个拟特征值 μ_i 就是矩阵 $C^{\mathrm{T}} AC$ 的 $m-1$ 个特征值. 所以,由定理 3.2.4.1,$C^{\mathrm{T}} AC$ 矩阵的 $m-2$ 阶主子矩阵的 $m-2$ 个特征值应隔离 $C^{\mathrm{T}} AC$ 矩阵的 $m-1$ 个特征值.

由于

$$C^{\mathrm{T}} AC = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{C}_2 & \cdots & \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{C}_n \\ \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{C}_2 & \cdots & \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{C}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{C}_{m-1}^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_{m-1} A\boldsymbol{C}_2 & \cdots & \boldsymbol{C}_{m-1}^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{C}_{m-1} \end{bmatrix} \quad \cdots(3.2.4.45)$$

因此,记 $j_1, j_2, \cdots, j_{m-2}$ 是 $1, 2, \cdots, m-1$ 中的任一个递增排序的子列,则

C^TAC矩阵的 $m-2$ 阶主子矩阵可表成

$$C^T\{j_1, j_2, \cdots, j_{m-2}\} \cdot A \cdot C\{j_1, j_2, \cdots, j_{m-2}\} \quad —(3.2.4.46)$$

其中 $C\{j_1, j_2, \cdots, j_{m-2}\} = [\boldsymbol{C}_{j_1}, \boldsymbol{C}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{C}_{j_{m-2}}]$. 因此,即是说

$$C^T\{j_1, j_2, \cdots, j_{m-2}\} \cdot A \cdot C\{j_1, j_2, \cdots, j_{m-2}\}$$

的 $m-2$ 个特征值,记为 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{m-2}$,隔离 C^TAC 的 $m-1$ 个特征值 λ_1, $\lambda_2, \cdots, \lambda_{m-1}$,即

$$\lambda_1 \leqslant \sigma_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \sigma_{m-2} \leqslant \lambda_{m-1} \quad —(3.2.4.47)$$

由定理 3.2.4.2,A_b 加边矩阵的拟特征值 μ_i 隔离矩阵 A 的特征值 λ_j,即(3.2.4.12)式成立.那么,如果问,对任一正整数 $m>1$,及任取的 2 组实数 μ_i、λ_j, $i=1, 2, \cdots, m-1$, $j=1, 2, \cdots, m$,若 μ_i、λ_j 满足(3.2.4.12)式,则是否一定存在向量 $\boldsymbol{b}$ 和矩阵 A,使 μ_i 是 A_b 加边矩阵的拟特征值,而 λ_i 是 A 矩阵的特征值? 回答是肯定的.为证明这一点,先引用以下定理:

定理 3.2.4.24 设 m 为一正整数,给定 2 组实数 λ_i、ξ_j, $i=1, 2, \cdots, m$, $j=1, 2, \cdots, m+1$,且 λ_i、ξ_j 满足

$$\xi_1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m \leqslant \xi_{m+1}$$

记 $A=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$,则存在实数 a 及 m 维实向量 $\boldsymbol{b}$,使 ξ_j 是

$$\widetilde{A}_b = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^T & a \end{bmatrix}$$

矩阵的特征值[1]. ■

现在,设有 μ_i、λ_j 两组数,且满足(3.2.4.12)式.构造以下多项式

$$f(\xi) = \xi \prod_{j=1}^{m} (\xi - \lambda_j) - \prod_{i=1}^{m-1} (\xi - \mu_i) \quad —(3.2.4.48)$$

假设 $f(\xi)=0$ 有 k 个根 $\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^k$ 是重根.从(3.2.4.48)式即知,ξ^t 是重根,则必定是

$$\xi^t = \lambda_{i_t} = \lambda_{i_{t+1}} = \cdots = \lambda_{i_{t+p_t}} = \mu_{i_t} = \mu_{i_{t+1}} = \cdots = \mu_{i_{t+p_t}}$$

其中 p_t 是 ξ^t 的重数.所以,可将 $f(\xi)$ 表示成

$$f(\xi) = (\xi - \xi^1)^{p_1} (\xi - \xi^2)^{p_2} \cdot \cdots \cdot (\xi - \xi^k)^{p_k} \cdot f^1(\xi)$$

$$f^1(\xi) = \xi \prod_{i=1}^{m-s} (\xi - \lambda_{j_i}) - \prod_{i=1}^{m-1-s} (\xi - \mu_{k_i}) \quad —(3.2.4.49)$$

---

[1] 见《矩阵不等式》,王松桂、吴密霞、贾忠贞编著,科学出版社,2006 年,第 84 页,定理 4.3.2 及其以下的证明.这里的表述及符号上与之稍有不同.

其中 $s = p_1 + p_2 + \cdots + p_k \quad 0 \leqslant s \leqslant m-1$. s 也是 $f(\xi) = 0$ 的重根的总重数. 当 $s = 0$ 时, $f^1(\xi) = f(\xi)$. λ_{j_i} 的下标 j_i 是 1, 2, …, m 中划去 ξ^t 重根对应的 λ_{i_t} 的所有下标 i_t 后的余子序列, μ_{k_i} 的下标 k_i 类似.

现在, $f^1(\xi) = 0$ 就给出了除 ξ^t 重根以外的 $m-s+1$ 个根, 且这部分根均是单根. 并且, 注意到 μ_{k_i}、λ_{j_i} 之间一定保持了严格隔离关系

$$\lambda_{j_1} < \mu_{k_1} < \lambda_{j_2} < \cdots < \mu_{k_{m-1-s}} < \lambda_{j_{m-s}}$$

故将 λ_{j_1}, λ_{j_2}, …, $\lambda_{j_{m-s}}$ 代入(3.2.4.49)式, 即知 $f^1(\xi)$ 在开区间 $(\lambda_{j_i}, \lambda_{j_{i+1}})$ $i = 1, 2, \cdots, m-s-1$ 上改变符号, 故必应有根

$$\xi^i \in (\lambda_{j_i}, \lambda_{j_{i+1}})$$

显然, ξ^i 这样的根的总数是 $m-s-1$ 个.

再考虑

$$f^1(\lambda_{j_1}) = -\prod_{i=1}^{m-1-s} (\lambda_{j_1} - \mu_{k_i})$$

有

$$\operatorname{sign}(f^1(\lambda_{j_1})) = (-1)^{m-s}$$

再用 $-M \quad M>0$ 代入 $f^1(\xi)$, 有

$$f^1(-M) = -M\prod_{i=1}^{m-s}(-M-\lambda_{j_i}) - \prod_{i=1}^{m-1-s}(-M-\mu_{k_i})$$

取 M 充分大, 则

$$\operatorname{sign}(f^1(-M)) = \operatorname{sign}\left(-M\prod_{i=1}^{m-s}(-1)^{m-s}\cdot(M+\lambda_{j_i})\right) = (-1)^{m-s+1}$$

故 $f^1(\xi)$ 在 $(-M, \lambda_{j_1})$ 区间上改变符号, 所以有 ξ^-,

$$\xi^- \in (-M, \lambda_{j_1})$$

类似地, 可知

$$\operatorname{sign}(f^1(\lambda_{j_{m-s}})) = -1$$

$$\operatorname{sign}(f^1(M)) = 1 \quad (\text{当 } M \text{ 充分大})$$

故又有 ξ^+ 根

$$\xi^+ \in (\lambda_{j_{m-s}}, M)$$

这样, 由 s 个重根 ξ^t, $m-s-1$ 个单根 ξ^i 以及 ξ^-、ξ^+, 总共为 $f(\xi) = 0$ 的 $m+1$ 根.

由以上隔离关系, 对 ξ^t、ξ^i、ξ^-、ξ^+ 按 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m$ 的序列适当予以下

标编号，总可以成立

$$\xi_1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m \leqslant \xi_{m+1}$$

因此，由定理 3.2.4.24，知存在向量 $\boldsymbol{b}$、实数 a，使

$$A_b = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & a \end{bmatrix} \quad A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$$

且 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{m+1}$ 是 A_b 的特征值.

再由 $f(\xi)$ 的构造和 A_b 矩阵的构造，易知

$$a = \sum_{j=1}^{m+1} \xi_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$$

且因为(3.2.4.48)式的构造等价于

$$|\mu I_{m+1} - A_b| = \mu |\mu I_m + A| + \begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{—(3.2.2.2)}$$

(并注意(3.2.2.19)式，取 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = 1$).

即知，由这样得到的 A_b 矩阵，其拟特征值即为 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{m-1}$. 并知，这里的 $\boldsymbol{b}$ 向量应满足 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = 1$.

由此即得以下定理.

定理 3.2.4.25 设 m 为一正整数 $m > 1$，给定 2 组实数 λ_i, μ_j, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, m-1$，且 λ_i, μ_j 满足

$$\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_{m-1} \leqslant \lambda_m$$

记 $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$，则存在向量 $\boldsymbol{b}$，使 μ_j 是

$$A_b = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \quad (\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = 1)$$

加边矩阵的拟特征值. ■

考虑如何决定定理 3.2.4.25 中的向量 $\boldsymbol{b}$. 对给定的 λ_i, μ_j，构造拟特征多项式

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \mu-\lambda_1 & & & & b_1 \\ & \mu-\lambda_2 & & & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \mu-\lambda_m & b_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 0 \end{vmatrix} = -\sum_{i=1}^{m} b_i^2 \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} (\mu - \lambda_j) = 0 \\ b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_m^2 = 1 \end{cases}$$

—(3.2.4.50)

因此，应要求有

$$\sum_{i=1}^{m}\left(b_i^2 \cdot \prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}(\mu-\lambda_j)\right)=\prod_{i=1}^{m-1}(\mu-\mu_i)$$

将上式等号两边的多项式表示成 μ 降幂顺序排列的标准多项式并比较同次幂的 μ 项前的系数，即可得到以下的方程组

$$\begin{cases} b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2=1 \\ \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq 1}}^{m}\lambda_i\cdot b_1^2+\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq 2}}^{m}\lambda_j\cdot b_2^2+\cdots+\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq m}}^{m}\lambda_j\cdot b_m^2=\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i \\ \sum\limits_{\substack{(i,j)\\i<j\\i,j\neq 1}}\lambda_i\lambda_j\cdot b_1^2+\sum\limits_{\substack{(i,j)\\i<j\\i,j\neq 2}}\lambda_i\lambda_j\cdot b_2^2+\cdots+\sum\limits_{\substack{(i,j)\\i<j\\i,j\neq m}}\lambda_i\lambda_j\cdot b_m^2=\sum\limits_{\substack{(i,j)\\i<j}}\mu_i\mu_j \\ \cdots\cdots \\ \prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq 1}}^{m}\lambda_j\cdot b_1^2+\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq 2}}^{m}\lambda_j\cdot b_2^2+\cdots+\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq m}}^{m}\lambda_j\cdot b_m^2=\prod\limits_{i=1}^{m-1}\mu_i \end{cases} \quad —(3.2.4.51)$$

现记

$$b_i^2=t_i \quad \boldsymbol{t}=(t_1,t_2,\cdots,t_m)^{\mathrm{T}}$$

$$A_\lambda=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq 1}}^{m}\lambda_i & \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq 2}}^{m}\lambda_i & \cdots & \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq m}}^{m}\lambda_i \\ \sum\limits_{\substack{(i,j)\\i<j\\i,j\neq 1}}\lambda_i\lambda_j & \sum\limits_{\substack{(i,j)\\i<j\\i,j\neq 2}}\lambda_i\lambda_j & \cdots & \sum\limits_{\substack{(i,j)\\i<j\\i,j\neq m}}\lambda_i\lambda_j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq 1}}^{m}\lambda_j & \prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq 2}}^{m}\lambda_j & \cdots & \prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq m}}^{m}\lambda_j \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_\mu=\begin{bmatrix} 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i \\ \sum\limits_{\substack{(i,j)\\i<j}}\mu_i\mu_j \\ \cdots \\ \prod\limits_{i=1}^{m-1}\mu_i \end{bmatrix}$$

可将(3.2.4.51)式表示成线性方程组

$$A_\lambda \boldsymbol{t} = \boldsymbol{b}_\mu \qquad —(3.2.4.52)$$

由定理3.2.4.25,这样构造出来的线性方程组一定有解,所以,附带知道,若给定λ_i, μ_j两组实数,且满足(3.2.4.12)式的隔离关系,则由λ_i, μ_j构造的A_λ、$\boldsymbol{b}_\mu$,总有

$$\text{rank}\,[A_\lambda \,\vdots\, \boldsymbol{b}_\mu] = \text{rank}\, A_\lambda \qquad —(3.2.4.53)$$

成立.

解出(3.2.4.52)式,再由$b_i = \pm\sqrt{t_i}$(隐含总有$t_i \geqslant 0$),可知满足定理3.2.4.25的向量$\boldsymbol{b}$,共应有2^m个.

注意到在几何意义上,设λ_i是某曲面函数$f(\boldsymbol{x})=0$的Hessian矩阵H的特征值,μ_j是加边Hessian矩阵的拟特征值,加边向量$\boldsymbol{b}$应是梯度向量,以及用$Q=[\hat{\boldsymbol{\beta}}_1, \hat{\boldsymbol{\beta}}_2, \cdots, \hat{\boldsymbol{\beta}}_m]$表示$H$的特征向量组成的正交矩阵,并注意到按以上方式构造的$\boldsymbol{b}_\mu$向量的分量与多重主法曲率乘积平均值$\kappa_f(s)$有关,可得到以下关系式

$$\kappa_f(s) = \frac{(-1)^s}{\binom{m-1}{s}} \cdot \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{\{i_1, i_2, \cdots, i_s\} \\ i_1<i_2<\cdots<i_s \\ i_1, i_2, \cdots, i_s \neq k}} \prod_{j=1}^{s} \lambda_{i_j} \cdot b_k^2}{\|\nabla f\|^s} \quad s=1, 2, \cdots, m-1 \qquad —(3.2.4.54)$$

其中b_k是$Q^{\mathrm{T}}\nabla f$的第k个分量.

(3.2.4.52)式将拟特征值(乘积和)与特征值(乘积和)关联起来,因此有(3.2.4.54)式,可将$\kappa_f(s)$与Hessian矩阵的特征值乘积和、特征向量及梯度向量关联起来.

对于多重约束特征值,由极小极大原理,可以直接地推知以下两个推论.

推论 3.2.4.26 设$A \in R^{m\times m}$ $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n \in R^m$, $1 \leqslant n < m$且$\boldsymbol{b}_j$向量组线性无关,$A^{\mathrm{T}} = A$,记

$$A_{bb}(j_1, j_2, \cdots, j_k) = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b}_{j_1} & \boldsymbol{b}_{j_2} & \cdots & \boldsymbol{b}_{j_k} \\ \boldsymbol{b}_{j_1}^{\mathrm{T}} & & & & \\ \boldsymbol{b}_{j_2}^{\mathrm{T}} & & 0 & & \\ \vdots & & & & \\ \boldsymbol{b}_{j_k}^{\mathrm{T}} & & & & \end{bmatrix} \quad k=1, 2, \cdots, n-1$$

并记 $\mu_i(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ 是 $A_{bb}(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ 的拟特征值. 则拟特征值 $\mu_i(j_1, j_2, \cdots, j_{k+1})$ 隔离拟特征值 $\mu_h(j_1, j_2, \cdots, j_k)$，即

$$\mu_1(j_1, j_2, \cdots, j_k) \leqslant \mu_1(j_1, j_2, \cdots, j_{k+1}) \leqslant \mu_2(j_1, j_2, \cdots, j_k) \leqslant \cdots \leqslant$$
$$\leqslant \mu_{m-k-1}(j_1, j_2, \cdots, j_{k+1}) \leqslant \mu_{m-k}(j_1, j_2, \cdots, j_k) \qquad \text{—(3.2.4.55)}$$

■

记

$$L_{bb}(j_1, j_2, \cdots, j_k) = \{\boldsymbol{\alpha} \mid b_{j_i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, k \quad \boldsymbol{\alpha} \in R^m \quad \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}\} \qquad \text{—(3.2.4.56)}$$

易知

$$L_{bb}(j_1, j_2, \cdots, j_{k+1}) \subset L_{bb}(j_1, j_2, \cdots, j_k) \qquad \text{—(3.2.4.57)}$$

再由(3.2.4.36)式马上就可得到以上推论.

这里还可以附带指出，如果 $j_1', j_2', \cdots, j_k'$ 是序列 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 的任一个排列，那么，由行列式的性质即知

$$\begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b}_{j_1'} & \boldsymbol{b}_{j_2'} & \cdots & \boldsymbol{b}_{j_k'} \\ \boldsymbol{b}_{j_1'}^{\mathrm{T}} & & & & \\ \boldsymbol{b}_{j_2'}^{\mathrm{T}} & & 0 & & \\ \vdots & & & & \\ \boldsymbol{b}_{j_k'}^{\mathrm{T}} & & & & \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mu I_m - A & \boldsymbol{b}_{j_1} & \boldsymbol{b}_{j_2} & \cdots & \boldsymbol{b}_{j_k} \\ \boldsymbol{b}_{j_1}^{\mathrm{T}} & & & & \\ \boldsymbol{b}_{j_2}^{\mathrm{T}} & & 0 & & \\ \vdots & & & & \\ \boldsymbol{b}_{j_k}^{\mathrm{T}} & & & & \end{vmatrix}$$

故知

$$\mu_i(j_1', j_2', \cdots j_k') \equiv \mu_i(j_1, j_2, \cdots, j_k) \qquad \text{—(3.2.4.58)}$$

所以(3.2.4.55)式表示的隔离关系也与所选取的 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 排列顺序无关.

推论 3.2.4.27 设 $A \in R^{m\times m} \quad B \in R^{m\times n} \quad 1 \leqslant n < m$，且 $A^{\mathrm{T}} = A$ $\operatorname{rank} B = n$. 则

$$A_{bb} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

的 $m-1$ 阶主子矩阵 $A_{bb}\{i\}$ 的拟特征值 $\mu_j(i)$ 隔离 A_{bb} 的拟特征值 μ_k，即

$$\mu_1 \leqslant \mu_1(i) \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_{m-n-1}(i) \leqslant \mu_{m-n} \qquad \text{—(3.2.4.59)}$$

这里 i 是 $1, 2, \cdots, m$ 中的任一个数，$A_{bb}\{i\}$ 是 A_{bb} 矩阵划去第 i 行、第 i 列元素后的余子矩阵. ■

推论 3.2.4.27 也可以表述成 A_{bb} 多重加边矩阵的 $m-1$ 阶主子矩阵的拟特征值隔离 A_{bb} 矩阵的拟特征值. 由于 $A_{bb}\langle i\rangle$ 的拟特征值等价于以下行列式的根

$$\begin{vmatrix} \mu I_m - A & B & \boldsymbol{e}_i \\ B^{\mathrm{T}} & & \\ \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} & 0 & \end{vmatrix} = 0$$

故由推论 3.2.4.26 即得到推论 3.2.4.27.

系 3.2.4.28 设 $A \in R^{m\times m}$ $\quad B \in R^{m\times n}$ $\quad A^{\mathrm{T}} = A$ $\quad \operatorname{rank} B = n$ $\quad 1 \leqslant n < m$. 则

$$A_{bb} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

的拟特征值 μ_k 与 A 的特征值 λ_i 有以下关系

$$\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_{m-n} \leqslant \lambda_m \qquad —(3.2.4.60)$$

λ_1, λ_m 是 λ_i 中的最小、最大值. ■

推论 3.2.4.11 已说明了单重加边矩阵 A_b,若 A 是约束负定的,则 A_b 的特征值 ξ_j 中必只含有 1 个正实数特征值和 m 个负实数特征值,A 是约束正定的,则情况刚好相反. 对 n 重加边矩阵 A_{bb},若 A 是约束负定的,则 A_{bb} 矩阵必只含有 n 个正数特征值同时含有 m 个负数特征值.

对这个结论可以用归纳法证之. 设 $m>2$. 对于 n 重加边矩阵 A_{bb},在 $n=1$ 时,以上结论已在推论 3.2.4.11 中得以证明,假设在 $n=k$ 时结论也成立,则在 $n=k+1<m$ 时,有

$$A_{bb} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_k & \boldsymbol{b}_{k+1} \\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} & & & & & \\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} & & & & & \\ \vdots & & & 0 & & \\ \boldsymbol{b}_k^{\mathrm{T}} & & & & & \\ \boldsymbol{b}_{k+1}^{\mathrm{T}} & & & & & \end{bmatrix} \quad (A^{\mathrm{T}} = A)$$

并记 A'_{bb} 是 A_{bb} 的前 $m+k$ 阶顺序主子矩阵,即将 A_{bb} 矩阵中 $\boldsymbol{b}_{k+1}$、$\boldsymbol{b}_{k+1}^{\mathrm{T}}$ 所在的列、行划去后的余子矩阵. 则设 ξ_i 和 ξ'_j 分别是 A_{bb} 与 A'_{bb} 的特征值. 由定理 3.2.4.1,ξ'_j 隔离 ξ_i,即

$$\xi_1 \leqslant \xi'_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \cdots \leqslant \xi'_{m+k} \leqslant \xi_{m+k+1}$$

由假设,ξ'_j 中的 $j=1, 2, \cdots, m$ 个特征值为负数,$j=m+1, m+2, \cdots, m+k$ 个特征值为正数. 故知 ξ_i 中的 $i=1, 2, \cdots, m$ 个为负数,且 $i=m+2, m+3, \cdots,$

$m+k+1$ 的 ξ_i 肯定是正数. 故只需证明隔离 ξ'_m、ξ'_{m+1} 的 ξ_{m+1}

$$\xi'_m \leqslant \xi_{m+1} \leqslant \xi'_{m+1}$$

满足 $\xi_{m+1} > 0$ 即可.

由

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq m+1}}^{m+k} \xi_i \cdot \xi_{m+1} = |A_{bb}|$$

即知

$$(-1)^m \cdot \operatorname{sign}(\xi_{m+1}) = \operatorname{sign}(|A_{bb}|)$$

不妨将上式写成

$$\operatorname{sign}(\xi_{m+1}) = (-1)^m \cdot \operatorname{sign}(|A_{bb}|)$$

但由于已设实对称矩阵 A 是约束负定的,故(见下文分析)必有

$$(-1)^m \cdot |A_{bb}| > 0 \qquad —(3.2.4.61)$$

即证 $\xi_{m+1} > 0$. 这里附带也证明了以上结论对于 A 在多重约束下的负定性具有必要性,且易知 A 是约束正定的条件刚好相反.

故可得推论 3.2.4.11 的推广.

推论 3.2.4.29 $A \in R^{m\times m}$ $B \in R^{m\times n}$ $1 \leqslant n < m$ $A^{\mathrm{T}} = A$, $\operatorname{rank} B = n$. A 是 B 加边矩阵约束正定的充要条件是

$$A_{bb} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

的 $m+n$ 个特征值 ξ_j 中, $\xi_j \leqslant \xi_{j+1}$, 则

$$\xi_j < 0 \quad j = 1, 2, \cdots, n \quad \xi_j > 0 \quad j = n+1, n+2, \cdots, m+n \qquad —(3.2.4.62)$$

A 是约束负定的充要条件是

$$\xi_j < 0 \quad j = 1, 2, \cdots, m \quad \xi_j > 0 \quad j = m+1, m+2, \cdots, m+n \qquad —(3.2.4.63)$$

■

推论 3.2.4.29(或 11)虽然已给出了矩阵 A 在多重约束(或单重约束)下正(负)定的充要条件,但在应用上并没有什么方便性. 故可利用以上的一些结论,导出具有重要应用价值的 Mann 定理.

定理 3.2.4.30[1]**(Mann 定理)** 设 $A \in R^{m\times m}$ $B \in R^{m\times n}$ $1 \leqslant n < m$

[1] 引自《非线性规划》,M. Avriel,上海科技出版社,1979 年,上册,第 19 页,定理 2.9. 仅符号有所不同.

$A^T = A \quad \text{rank}\, B = n$，用 M_{pq} 表示矩阵 M 前 p 行和前 q 列元素所组成的子矩阵，那么，A 矩阵在 B 约束下正定，当且仅当

$$(-1)^n \det\begin{bmatrix} A_{pp} & B_{pn} \\ B_{pn}^T & 0 \end{bmatrix} > 0 \quad p = n+1,\ n+2,\ \cdots,\ m$$

类似地，A 矩阵在 B 约束下负定，当且仅当

$$(-1)^p \det\begin{bmatrix} A_{pp} & B_{pn} \\ B_{pn}^T & 0 \end{bmatrix} > 0 \quad p = n+1,\ n+2,\ \cdots,\ m$$ ■

证明：以 A 矩阵在 B 约束下负定为例. 由约束负定的定义，当矩阵 A 在

$$B^T\boldsymbol{\alpha} = 0 \quad \boldsymbol{\alpha} \in R^m \quad \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$$

约束下负定，即满足以上条件的任一 $\boldsymbol{\alpha}$，有

$$\boldsymbol{\alpha}^T A\boldsymbol{\alpha} < 0$$

则对满足增广的约束条件

$$\begin{cases} B^T\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \\ \alpha_{p+1} = \alpha_{p+2} = \cdots = \alpha_m = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\alpha} \in R^m \quad \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0} \quad p = n+1,\ \cdots,\ m$$

—(3.2.4.64)

的任一 $\boldsymbol{\alpha}$，必也有

$$\boldsymbol{\alpha}^T A\boldsymbol{\alpha} < 0$$

成立. 这里 $\alpha_{p+1},\ \cdots,\ \alpha_m$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 向量的分量.

故作

$$A_{bb}(p) = \begin{bmatrix} A_{pp} & B_{pn} \\ B_{pn}^T & 0 \end{bmatrix}$$

则 $A_{pp}(p)$ 的拟特征值即以下多项式的根 $\mu_i(p)$，

$$\begin{bmatrix} \mu I_p - A_{bb}(p) & B_{pn} \\ B_{pn}^T & 0 \end{bmatrix} = 0$$

由于矩阵 A 在(3.2.4.64)式的约束下是负定的，故由约束负定的定义，$A_{bb}(p)$ 的拟特征值 $\mu_i(p) < 0 \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ p-n$.

由(3.2.3.10)式，知

$$\prod_{i=1}^{p-n} \mu_i(p) = (-1)^n \frac{|A_{bb}(p)|}{|B_{pn}^T B_{pn}|}$$

两边取符号，有

$$\operatorname{sign}\left(\prod_{i=1}^{p-n}\mu_i(p)\right)=(-1)^{p-n}=(-1)^n\operatorname{sign}(|A_{bb}(p)|)$$

在上式最右边"="号的两边同乘以$(-1)^{p-n}$，有

$$1=(-1)^p\operatorname{sign}(|A_{bb}(p)|)$$

即知必须要有

$$(-1)^p|A_{bb}(p)|>0\quad p=n+1,\ n+2,\ \cdots,\ m$$

故必要性得证.

再证充分性. 任意取定的$n\geqslant 1$，对A矩阵的阶数m作归纳法证明. 先对$m=n+1$的情形给予证明.

此时A_{bb}矩阵只有1个拟特征值，记其为$\mu_1(n+1)$，由(3.2.3.10)式，有

$$\mu_1(n+1)=(-1)^n\frac{|A_{bb}(n+1)|}{|B_{pn}^{\mathrm{T}}B_{pn}|}\quad (p=n+1)$$

因此，若

$$(-1)^{n+1}|A_{bb}(n+1)|>0\quad\Leftrightarrow\quad\mu_1(n+1)<0$$

即$A_{bb}(n+1)$是约束负定的.

假设$m=k>n+1$时，当

$$(-1)^p|A_{bb}(p)|>0\quad p=n+1,\ \cdots,\ k$$

成立，则$A_{bb}(p)$是约束负定的结论成立.

则对$m=k+1$，设

$$(-1)^p|A_{bb}(p)|>0\quad p=n+1,\ \cdots,\ k+1 \qquad\text{—(a)}$$

成立. 那么，由以上的假设，这表示

$$A_{bb}(k)=\begin{bmatrix}A_{kk} & B_{kn}\\ B_{kn}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}$$

的拟特征值$\mu_i(k)<0$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k-n$，即A_{kk}矩阵是约束负定的.

记$A_{bb}(k+1)$矩阵的拟特征值是$\mu_j(k+1)\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ k-n+1$，则由推论3.2.4.27知$\mu_i(k)$隔离$\mu_j(k+1)$，即

$$\begin{aligned}\mu_1(k+1)&\leqslant\mu_1(k)\leqslant\mu_2(k+2)\leqslant\cdots\\ &\leqslant\mu_{k-n}(k+1)\leqslant\mu_{k-n}(k)\leqslant\mu_{k-n+1}(k+1)\end{aligned}$$

故应有

$$\mu_j(k+1) \leqslant \mu_{k-n}(k) < 0 \quad j = 1, 2, \cdots, k-n$$

同样，再由(3.2.3.10)式，

$$\prod_{j=1}^{k-n} \mu_j(k+1) \cdot \mu_{k-n+1}(k+1) = (-1)^n \frac{|A_{bb}(k+1)|}{|B^T B|}$$

两边取符号有

$$(-1)^{k-n} \operatorname{sign}(\mu_{k-n+1}(k+1)) = (-1)^n \operatorname{sign}(|A_{bb}(k+1)|)$$

或写成

$$\operatorname{sign}(\mu_{k-n+1}(k+1)) = (-1)^k \operatorname{sign}(|A_{bb}(k+1)|)$$

由以上的假设(a)式成立，故应有

$$(-1)^{k+1} \operatorname{sign}(|A_{bb}(k+1)|) > 0$$

所以，当 k 为奇数时，有

$$|A_{bb}(k+1)| > 0 \Rightarrow \mu_{k-n+1}(k+1) < 0$$

当 k 为偶数时，有

$$|A_{bb}(k+1)| < 0 \Rightarrow \mu_{k-n+1}(k+1) < 0$$

故总成立 $\mu_{k-n+1}(k+1) < 0$. 即知 $\mu_j(k+1) \quad j = 1, 2, \cdots, k-n+1$ 全部小于 0，所以归纳法成立. 即证充分性.

而对于 A 矩阵是多重约束正定的判别条件，可从矩阵约束正定时的拟特征值均大于 0 条件类似以上作法证之.

即证定理结论.

当 Mann 定理中的 $n = 1$，就得到著名的 **Arrow-Enthoven 定理**. A－E 定理通常表述为以下几何意义的判定条件[1].

定理 3.2.4.31 设曲面 f: $f(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$ 是正则的.

$$\text{记 } H_\partial(k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} & \frac{\partial f}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_k} & 0 \end{bmatrix} \quad k = 1, 2, \cdots, m$$

—(3.2.4.65)

[1] 《非线性规划》，M. Avriel，同前注，上册，第 142 页.

则曲面 f 在 $\boldsymbol{x}$ 点处严格凸向曲面法方向，充要条件是

$$\det H_\partial(k) < 0 \quad k = 1, 2, \cdots, m \qquad —(3.2.4.66)$$

曲面 f 在 $\boldsymbol{x}$ 点处严格凹向曲面法方向，充要条件是

$$(-1)^k \cdot \det H_\partial(k) > 0 \quad k = 1, 2, \cdots, m \qquad —(3.2.4.67)$$

若用≤(≥)号替代以上不等式中的<(>)号，则“严格凸(凹)”应改为“拟凸(凹)”. ■

但在 Monge 形式

$$F: z = f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$$

给出的曲面 F 上，设在 R^{m+1} 空间上曲面 F 的定向是

$$\nabla F = (\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}), -1)^{\mathrm{T}}$$

现由于加边 Hessian 矩阵是

$$H_\partial^F = \begin{bmatrix} \nabla^2 f & \boldsymbol{0} & \nabla f \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 & -1 \\ \nabla f^{\mathrm{T}} & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad —(3.1.1.72)$$

故曲面 F 在 $\boldsymbol{x}$ 点处严格凸向曲面法方向 ∇F 的充要条件是 H_∂^F 的拟特征值全部大于 0，即应当是

$$\begin{cases} \det H_\partial(k) < 0 \quad k = 1, 2, \cdots, m \\ \det H > 0 \end{cases} \qquad —(3.2.4.68)$$

曲面 F 在 $\boldsymbol{x}$ 点处严格凹向曲面法方向的充要条件，则应当是

$$\begin{cases} (-1)^k \det H_\partial(k) > 0 \quad k = 1, 2, \cdots, m \\ (-1)^m \det H > 0 \end{cases} \qquad —(3.2.4.69)$$

这里 $H_\partial(k)$ 仍由(3.2.4.65)式给出，$H = \nabla^2 f(\boldsymbol{x})$.

如果取曲面定向为 $(-\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}), 1)^{\mathrm{T}}$ 方向，则(3.2.4.68)式是曲面 F 在 $\boldsymbol{x}$ 点处严格上凹的充要条件，(3.2.4.69)式则是严格上凸的充要条件. 注意，这里的定向(即曲面 F 的法方向)，即指曲面一般函数形式是

$$F: z - f(\boldsymbol{x}) = 0$$

对此一般曲面函数，其加边 Hessian 矩阵应是

$$H_\partial^f = \begin{bmatrix} -\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{0} & -\nabla f(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 & 1 \\ -\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由(3.2.4.68～69)式即有此结论.

例 3.2.4.2 Monge 形式的曲面函数

$$z = x_1^a x_2^b \quad a, b > 0 \quad x_1, x_2 > 0$$

考察此曲面在 R^3 空间上的凹(凸)性状,以及对任取的 $z^0>0$,考察

$$z^0 = x_1^a x_2^b$$

决定的曲面(曲线)在 R^2 空间上的凸性.

解: 由

$$z = x_1^a x_2^b = f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in R^2 \quad (m = 2)$$

得

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{az}{x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{bz}{x_2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{a(a-1)z}{x_1^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{b(b-1)z}{x_2^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{abz}{x_1 x_2}$$

$$H_\partial(1) = \begin{bmatrix} \frac{a(a-1)}{x_1^2}z & \frac{az}{x_1} \\ \frac{az}{x_1} & 0 \end{bmatrix} \quad \det H_\partial(1) = -\frac{a^2 z^2}{x_1^2} < 0$$

$$H_\partial(2) = \begin{bmatrix} \frac{a(a-1)}{x_1^2}z & \frac{ab}{x_1 x_2}z & \frac{az}{x_1} \\ \frac{ab}{x_1 x_2}z & \frac{b(b-1)}{x_2^2}z & \frac{bz}{x_2} \\ \frac{az}{x_1} & \frac{bz}{x_2} & 0 \end{bmatrix} \quad \det H_\partial(2) = \frac{ab(a+b)z^3}{x_1^2 x_2^2} > 0$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{a(a-1)}{x_1^2}z & \frac{ab}{x_1 x_2}z \\ \frac{ab}{x_1 x_2}z & \frac{b(b-1)}{x_2^2}z \end{bmatrix} \quad \det H = ab(1-a-b)\frac{z^2}{x_1^2 x_2^2}$$

则在 R^2 空间上,由

$$z^0 = x_1^a x_2^b$$

决定的曲线上,不论 a, b 取何值,均有

$$(-1) \cdot \det H_\partial(1) > 0 \quad (-1)^2 \det H_\partial(2) > 0$$

由(3.2.4.67)式故可知曲线严格凹向其法方向. 这里法方向由

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{az}{x_1},\ \frac{az}{x_2}\right)^{\mathrm{T}}$$

给出.

而在 R^3 空间上,当 $a+b<1$, $\det H>0$,由(3.2.4.69)式在给出的定向为

$$\nabla F = (-\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}),\ 1)^{\mathrm{T}}$$

时,曲面 F 严格上凸. 当 $a+b=1$, $\det H=0$,曲面 F 是拟(上)凸的. 但当 $a+b>1$ 时, $\det H<0$,所以(3.2.4.68～69)式均不能满足,故曲面 F 在其任一点处即凹即凸.

实际上,当 $a+b<1$ 时,加边 Hessian 矩阵

$$H_a^F = \begin{bmatrix} H & 0 & \nabla f \\ 0^{\mathrm{T}} & 0 & -1 \\ \nabla f^{\mathrm{T}} & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

的 2 个拟特征值均小于 0;当 $a+b=1$ 时,则拟特征值中一个为 0,另一个小于 0;当 $a+b>1$ 时,则拟特征值中一个大于 0,另一个小于 0; 即知上述结果.

§3.2.5 拟特征向量、主法曲率及其可微性

以下均设 $A\in R^{m\times m}$, $\boldsymbol{b}\in R^m$, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ A_b 是 A 的加边矩阵,且 $A^{\mathrm{T}}=A$.

由于实对称加边矩阵 A_b 的 $m-1$ 个拟特征向量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 是正交的,故由(3.1.1.59～60)式,构造

$$Q = [\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1,\ \hat{\boldsymbol{\alpha}}_2,\ \cdots,\ \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{m-1}] \qquad —(3.2.5.1)$$

和

$$Q_b = [\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1,\ \hat{\boldsymbol{\alpha}}_2,\ \cdots,\ \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{m-1},\ \boldsymbol{b}] \quad (\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=1,\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i=0) \qquad —(3.2.5.2)$$

称 Q 矩阵是矩阵 A 的**拟特征值谱分解矩阵**. $Q\in R^{m\times(m-1)}$, $Q^{\mathrm{T}}Q=I_{m-1}$, 即 Q 是列向量正交的矩阵.

$$Q^{\mathrm{T}}AQ = \mathrm{diag}(\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_{m-1}) \qquad —(3.2.5.3)$$

另一方面, $Q_b\in R^{m\times m}$ 且 Q_b 是正交矩阵. 但

$$Q_b^{\mathrm{T}}AQ_b = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & 0 & -\gamma_1 \\ & \mu_2 & & & -\gamma_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \mu_{m-1} & -\gamma_{m-1} \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & \cdots & -\gamma_{m-1} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \qquad —(3.2.5.4)$$

其中，$\gamma_i \quad i = 1, \cdots, m-1$ 是(3.1.1.54)式中的辅助参量. 它也就是(3.1.1.33)式中的 L— 乘子(之一). 除非 $\gamma_i = 0 \quad i = 1, \cdots, m$, 否则正交矩阵 Q_b 就不是 A 的谱分解矩阵. 但若 $\gamma_i = 0$, 由(3.1.1.54)式即知, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 必定也就是 A 的特征向量, 从而 μ_i 特征值一定就是 A 的特征值 λ_j. 特别地, $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{b}$ 也必定是 A 的特征值之一，故 $\boldsymbol{b}$ 必定是 A 的特征向量[1].

注意 Q 矩阵按(3.2.5.3)式给出的 A 矩阵的对角化形式, 是 $(m-1) \times (m-1)$ 阶的矩阵. 其主对角元素刚好是 A_b 矩阵的 $m-1$ 个拟特征值 μ_i. 故也可以将其称之为是 A 矩阵的 **$m-1$ 阶谱分解**.

由(3.1.1.12)式的广义 RayLiegh 商 $\widetilde{R}(t)$ 的形式, 并由(3.1.1.18)式可得一般形式下

$$\widetilde{R}(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \Lambda^{\mathrm{T}} A \Lambda \boldsymbol{t}}{\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \Lambda^{\mathrm{T}} \Lambda \boldsymbol{t}} \qquad —(3.2.5.5)$$

的广义 RayLiegh 商的极值 R_i 是以下行列式

$$| R_i \Lambda^{\mathrm{T}} \Lambda - \Lambda^{\mathrm{T}} A \Lambda | = 0 \qquad —(3.2.5.6)$$

的根.

这里 $\Lambda \in R^{m \times (m-1)}$ 且 Λ 是约束条件

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} = 0$$

的任一个基础解系矩阵.

将 A 用正则曲面函数 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ 的 Hessian 矩阵 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) / \| \nabla f(\boldsymbol{x}) \|$ 代入, $\boldsymbol{b}$ 用 $\nabla \widetilde{f}(\boldsymbol{x})$ 代替, 则第一基本二次型矩阵 $\boldsymbol{I} = \Lambda^{\mathrm{T}} \Lambda$, 第二基本二次型矩阵 $\boldsymbol{II} = \dfrac{\Lambda^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \Lambda}{\| \nabla f(\boldsymbol{x}) \|}$, 故(3.2.5.6)式也就是 Weingarten 映射的特征行列式.

现再取 $C \in R^{m \times (m-1)}$ 是 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} = 0$ 的另一个任取的基础解系矩阵, 且 C 满足 $C^{\mathrm{T}} C = I_{m-1}$. 记 $\hat{\boldsymbol{t}}_i \quad i = 1, \cdots, m-1$ 是 $C^{\mathrm{T}} A C$ 矩阵的特征向量, $\hat{\boldsymbol{t}}_i \in R^{m-1}$, 并记

$$T = [\hat{\boldsymbol{t}}_1, \hat{\boldsymbol{t}}_2, \cdots, \hat{\boldsymbol{t}}_{m-1}] \in R^{(m-1) \times (m-1)} \quad T^{\mathrm{T}} T = I_{m-1}$$

即 T 是正交矩阵. 则 T 矩阵是 $C^{\mathrm{T}} A C$ 矩阵的谱分解矩阵, 且

$$T^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} A C T = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{m-1})$$

μ_i 是加边矩阵 A_b 的拟特征值, 并记

$$\boldsymbol{\alpha} = \Lambda \boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{\beta} = C \boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \in R^{m-1} \quad \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{0}$$

---

〔1〕 附带可知, 若 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{b}$ 是 A 的特征值之一, 则 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{b}$ 只能是 A 的最小、最大特征值中的一个.

则 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 分别是以 Λ、C 为基的 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$ 的解向量，$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}\in R^{m}$. 则可知(见(3.1.1.58)式)，

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i = C\hat{\boldsymbol{t}}_i \quad i=1,2,\cdots,m-1$$

是 A_b 矩阵的拟特征向量.

故(3.2.5.1)式的矩阵 Q，由

$$Q=CT \qquad \text{—(3.2.5.7)}$$

决定. 且由于基础解系 Λ、C 矩阵一定存在 $(m-1)\times(m-1)$ 阶过渡矩阵 S，使

$$C=\Lambda S \quad |S|\neq 0 \qquad \text{—(3.2.5.8)}$$

一般地 S 并不是正交矩阵，也不是对称矩阵.

记

$$Q_t = ST \quad Q_t\in R^{(m-1)\times(m-1)} \quad |Q_t|\neq 0 \qquad \text{—(3.2.5.9)}$$

则可得

$$Q=\Lambda Q_t \qquad \text{—(3.2.5.10)}$$

因此，有

$$\begin{cases} Q_t^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda Q_t = I_{m-1} \\ Q_t^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda Q_t = \mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{m-1}) \end{cases} \qquad \text{—(3.2.5.11)}$$

这里应将 A、Λ 和 Q_t 都理解为数值矩阵.

(3.2.5.11)式表示，矩阵 $\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda$、$\Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda$ 可由矩阵 Q_t 同时对角化. 注意，这里 Q_t 矩阵只是可逆矩阵而一般地并不是正交矩阵. 故(3.2.5.11)式表示的“对角化”，意义上和传统的实对称矩阵谱分解的对角化是有区别的. 因此，$\Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda$、$\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda$ 矩阵由 Q_t 矩阵的合同变换而同时对角化，不表示乘积矩阵 $\Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda\cdot(\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda)^{-1}$ 一定是对称矩阵.

由于(3.2.5.6)式

$$\begin{aligned} |R_i\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda-\Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda| &= |(Q_t^{\mathrm{T}})^{-1}Q_t^{\mathrm{T}}(R_i\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda-\Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda)Q_tQ_t^{-1}| \\ &= |Q|^{-2}\cdot|R_i(Q_t^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda Q_t)-(Q_t^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda Q_t)| \\ &= |Q|^{-2}\cdot|R_iI_{m-1}-\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{m-1})| \\ &= 0 \end{aligned}$$

即(3.2.5.6)式总等价于一个实对角矩阵的特征行列式. 但同时，由于

$$|R_i\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda-\Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda| = |R_iI_{m-1}-\Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda\cdot(\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda)^{-1}|\cdot|\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda|$$

故

$$|R_iI_{m-1}-\Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda\cdot(\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda)^{-1}|=0\Leftrightarrow|R_iI_{m-1}-\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{m-1})|=0$$

所以，形如 $\Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda\cdot(\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda)^{-1}$（且 $\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda$ 为正定矩阵）的矩阵，其特征行列式实际上等价于一个实对角矩阵的特征行列式. 因为，若记

$$D=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{m-1})$$

则

$$\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda=(Q_t^{\mathrm{T}})^{-1}Q_t^{-1}\quad(\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda)^{-1}=Q_tQ_t^{\mathrm{T}}$$

$$\Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda=(Q_t^{\mathrm{T}})^{-1}DQ_t^{-1}$$

$$\Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda\cdot(\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda)^{-1}=(Q_t^{\mathrm{T}})^{-1}DQ_t^{\mathrm{T}}$$

故

$$\Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda\cdot(\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda)^{-1}\sim D$$

即二者相似. 由于乘积矩阵 $\Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda\cdot(\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda)^{-1}$ 具有与 W 映射矩阵相同的形式，故由此可知，Weingarten 映射矩阵 W 总相似于一个对角矩阵，所以，W 映射实质上是自伴映射. 虽然其矩阵一般并非是对称矩阵.

对于 R^m 空间上的正则参数曲面片 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$，将 $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{u}}$ 给出的 Jacobi 矩阵看成是等价的一般曲面函数 $f(\boldsymbol{x})=0\quad\boldsymbol{x}=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的切超平面方程

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha}=0$$

的基础解系矩阵，则

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{u}}=\Lambda\qquad\text{—(3.2.5.12)}$$

由于 $\boldsymbol{I}=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{u}}\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{u}}\Leftrightarrow\boldsymbol{I}=\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda$，故以上的分析，就是矩阵理论中的奇异值分解的方法. 在这个意义上，$\boldsymbol{I}$ 矩阵的特征值就是 $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{u}}$ 矩阵的奇异值的平方.

对于以上所指的矩阵 C，可以看成是以上切超平面方程的另一个列正交且归一化的基础解系矩阵，可用

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{v}}=C\qquad\text{—(3.2.5.13)}$$

表示. 由于在正则曲面上任一点 $\boldsymbol{x}$ 的邻域，总存在 $m-1$ 条正交的曲率线（见下

文)，因此，(3.2.5.13)式表示的 C 矩阵总是存在的.

由(3.2.5.8)式，就有

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{v}}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}S \qquad —(3.2.5.14)$$

故将 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})$ 看成是作了一个参数变换，所以 S 是 $\boldsymbol{u}$ 关于 $\boldsymbol{v}$ 的 Jacobi 矩阵

$$S=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}} \qquad —(3.2.5.14a)$$

将(3.2.5.14a)式写成为下式

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{v}}\,\frac{\partial \boldsymbol{u}^{-1}}{\partial \boldsymbol{v}} \qquad —(3.2.5.15)$$

则这一关系，就是矩阵理论的奇异值分解中的极分解定理的结论所保证.

定理 3.2.5.1(极分解定理) 设 $A\in C^{m\times n}$ 且 $m\geqslant n$，则

$$A=XZ$$

其中 $Z\in C^{n\times n}$ 是半正定的，$Z^2=\overline{A}^{\mathrm{T}}A$，而 $X\in C^{m\times n}$ 是列正交的，$\overline{X}^{\mathrm{T}}X=I\in C^{n\times n}$，且半正定因子 Z 由矩阵 A 唯一确定，Z 的特征值就是 A 的奇异值. 当 $A\in C^{n\times n}$ 且非奇异时，Z 是正定的[1]. ■

推论 3.2.5.2 设 $A\in R^{m\times n}$　$m\geqslant n$ 且 A 是列满秩矩阵，则可得到以下分解，

$$A=XZ \quad X\in R^{m\times n} \quad Z\in R^{n\times n}$$

X 是列正交且归一化的矩阵，$|Z|>0$，并且 Z 是上三角矩阵. ■

这一推论的结论易知. 实际上，由于 A 是列满秩矩阵，记 $A=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m]$，则可通过 Schmidt 正交化，使 A 成为列正交的矩阵 B. 由 Schmidt 方法，B 的列向量 $\boldsymbol{b}_j$ 可以由下式递推得到，

$$\begin{cases}\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{b}_j=\boldsymbol{a}_j-\displaystyle\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_i}{\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_i}\boldsymbol{b}^i \quad j=2,3,\cdots,n\end{cases}$$

将以上第 2 式中的 $\boldsymbol{b}_i$ 用 $\boldsymbol{a}_k$，$k=1,2,\cdots,i$ 表示出来，如

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\left(\frac{\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1}\right)\cdot\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2-c_{12}\cdot\boldsymbol{a}_1 \quad c_{12}=\frac{\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1}$$

---

[1] 《特殊矩阵》，陈景良、陈向晖，同前注，第 336～337 页，定理 5.4.11，极分解定理对于 $m\leqslant n$、$m=n$ 的情形都另有结论，但这与本书的内容无关，故不详细引用. $\overline{A}^{\mathrm{T}}$ 是复数域上矩阵的共轭转置.

同理有

$$b_3 = a_3 - c_{13}a_1 - c_{23}a_2$$

$$c_{13} = \frac{a_3^{\mathrm T}a_1}{a_1^{\mathrm T}a_1} - \frac{(a_1^{\mathrm T}a_1)(a_2^{\mathrm T}a_3) - (a_1^{\mathrm T}a_2)(a_1^{\mathrm T}a_3)}{(a_1^{\mathrm T}a_1)(a_2^{\mathrm T}a_2) - (a_1^{\mathrm T}a_2)^2} \cdot \frac{a_1^{\mathrm T}a_2}{a_1^{\mathrm T}a_1}$$

$$c_{23} = \frac{(a_1^{\mathrm T}a_1)(a_2^{\mathrm T}a_3) - (a_1^{\mathrm T}a_2)(a_1^{\mathrm T}a_3)}{(a_1^{\mathrm T}a_1)(a_2^{\mathrm T}a_2) - (a_1^{\mathrm T}a_2)^2}$$

余可类推[1]，从而，存在上三角矩阵

$$\widetilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & -c_{12} & -c_{13} & \cdots & -c_{1n} \\ & 1 & -c_{23} & \cdots & -c_{2n} \\ & & 1 & \cdots & -c_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

使

$$A\widetilde{C} = B$$

因 a_i 线性无关，故 $b_j \neq 0$. 可作

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} \| b_1 \|^{-1} & & & 0 \\ & \| b_2 \|^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \| b_n \|^{-1} \end{bmatrix}$$

则

$$B\widetilde{B} = X \quad (\widetilde{C}\widetilde{B})^{-1} = Z \Rightarrow A = XZ$$

显然，Z 是上三角矩阵，且 Z 的主对角线元素

$$Z_{ii} = \| b_i \| > 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

故 $|Z| > 0$.

将推论 3.2.5.2 应用于(3.2.5.15)式，知$\frac{\partial u}{\partial v}$也是上三角矩阵，且 $\left|\frac{\partial u}{\partial v}\right| > 0$.

在$\frac{\partial r}{\partial v}$给定时，$\frac{\partial u}{\partial v}$由$\frac{\partial r}{\partial u}$唯一决定.

---

[1] 由 Cauchy-Schwarz 不等式，c_{13}、c_{23} 的分母在 a_i 线性无关时，是恒大于 0 的，余可类推.

将$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{v}}$看成是$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$经 Schmidt 正交化、归一化得到的矩阵，则$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}}$矩阵由下式给出

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{u}) \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{v}} \qquad \text{—(3.2.5.16)}$$

其中$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$，类似地记$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{v}) = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{v}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{v}}$，等等.

但现在的问题是这样得到的$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}}$矩阵并不一定是关于$\boldsymbol{v}$变量可积的[1]，即可微参数变换$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})$并不一定存在. 若满足以上性质的参数变换$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})$存在，则由$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})$函数的二阶可微性，应成立可积性条件

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial v_j \partial v_k} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial v_k \partial v_j} \quad \forall i,\ j,\ k \qquad \text{—(3.2.5.17)}$$

将(3.2.5.16)式的等号右边看成是矩阵$[f_{ij}] = \left[\frac{\partial u_i}{\partial v_j}\right]$，其中$f_{ij}$显然只含有$u_1$，$u_2$，…，$u_{m-1}$变元，故可积性条件可表示成，对$\forall i,\ j,\ k$

$$\sum_{h=1}^{m-1} \frac{\partial f_{ij}}{\partial u_h} f_{hk} = \sum_{h=1}^{m-1} \frac{\partial f_{ik}}{\partial u_h} f_{hj} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u_i}{\partial v_k \partial v_j} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial v_j \partial v_k} \qquad \text{—(3.2.5.18)}$$

所以，当且仅当(3.2.5.6)式右边的函数矩阵满足(3.2.5.18)式，则以上的参数变换函数$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})$存在.

注意以上所确定的$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{v}}$矩阵是带有随意性的. 因此，可以想见，随意确定的$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{v}}$矩阵，不一定满足可积性条件. 其次，也可以想见，要求$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{v}}$是正交且归一的矩阵，对于曲面显然是不可能的条件. 故而，可以更符合实际地将以上$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})$变换表述如下.

若正则参数曲面片存在用$\boldsymbol{z}$参数表示的函数$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{z})$，且$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{z}}$是列正交的(但不是归一的)，则曲面片的任一$\boldsymbol{u}$参数表示的函数$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$，可经以下变换

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}} = \boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{u}) \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{v}} T(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}} T(\boldsymbol{u}) \quad T(\boldsymbol{u}) \in R^{(m-1)\times(m-1)} \qquad \text{—(3.2.5.19)}$$

使

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{z}}$$

---

[1] 当$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}}$可积时，这一符号可视为偏导数(矩阵)，否则，只是一个矩阵的符号.

其中 T 是$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{v}}$到$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{z}}$的过渡矩阵，也就是$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}}$到$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}}$的过渡矩阵

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{z}}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{v}}T(\boldsymbol{u})$$

且(3.2.5.19)式等号右边的函数矩阵满足可积性条件.

换句话说，如果正则参数曲面片 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 能够经适当选择参数，使得曲面片能在正交的曲线坐标网上得到表示，那么，充要条件是存在一个矩阵 T，使(3.2.5.16)式右边的函数矩阵在 T 的(右乘)作用下满足可积性条件. 由于过渡矩阵 T 的右乘，(3.2.5.19)式得到的变换矩阵$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}}$就不再一定是上三角矩阵.

(3.2.5.19)式给出的变换 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})$，与曲面之间的保角对应(共形映照)和等温参数变换有关，对此不再详述. 仅给以下示例予以说明.

例 3.2.5.1 R^3 空间上的单位球面

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})=\begin{bmatrix}\cos u_1\cos u_2\\ \cos u_1\sin u_2\\ \sin u_1\end{bmatrix}$$

求变换$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}}$，使其成为等温参数形式.

解:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}=\begin{bmatrix}-\sin u_1\cos u_2 & -\cos u_1\sin u_2\\ -\sin u_1\sin u_2 & \cos u_1\cos u_2\\ \cos u_1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \cos^2 u_1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{I}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \cos^{-2} u_1\end{bmatrix}$$

易知

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{v}}=\begin{bmatrix}-\sin u_1\cos u_2 & -\sin u_2\\ -\sin u_1\sin u_2 & \cos u_2\\ \cos u_1 & 0\end{bmatrix}$$

故

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}}=\boldsymbol{I}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{v}}T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \cos^{-1} u_1\end{bmatrix}\cdot T=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}}T$$

现在易知如果取 $T=I_2$，则上式给出的$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}}$不满足可积性条件，因为此时[1]

[1] 以下的二阶偏导数符号仅有形式上的意指，只为了简化表述.

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial v_1 \partial \boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial v_1^2} & \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial v_1 \partial v_2} \\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial v_1^2} & \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial v_1 \partial v_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \cos^{-2} u_1 \sin u_1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial v_2 \partial \boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial v_2 \partial v_1} & \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial v_2^2} \\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial v_2 \partial v_1} & \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial v_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial v_1 \partial v_2} = \cos^{-2} u_1 \sin u_1 \neq \frac{\partial^2 u_2}{\partial v_2 \partial v_1} = 0$$

显然，若取

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \cos u_1 \\ \cos u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

则

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} 0 & \cos u_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

易证这样的$\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}}$满足可积性条件. 并且，知

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{z}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} -\cos u_1 \sin u_2 & -\cos u_1 \sin u_1 \cos u_2 \\ \cos u_1 \cos u_2 & -\cos u_1 \sin u_1 \sin u_2 \\ 0 & \cos^2 u_1 \end{bmatrix}$$

得

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{z}) = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{z}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} \cos^2 u_1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u_1 \end{bmatrix}$$

为等温参数形式的第一基本二次型矩阵[1]. 还可以知道，若要求$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{z}}$的列向量是归一的，则$\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}}$就仍不能满足可积性条件.

---

[1] $\dfrac{\partial \boldsymbol{u}^{-1}}{\partial \boldsymbol{z}}$ 变换就是 Mercator 映射.

由此例可见，求解正交曲线网上的正则参数曲面函数 $\boldsymbol{r}(z)$ 可转变为求过渡矩阵 T，使 $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}}T$ 满足可积性条件. 但这在 R^m 空间上仍是很困难的.

由于曲面上任一点处均有 $m-1$ 条正交的曲率线(见下文)，故在局部，曲面可以用正交的曲率线作为其参数表示. 在这个(局部的)意义上，上述的 $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}}$ 这样的可积的变换矩阵是存在的.

因此，在 $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}}$ 矩阵变换下，

$$\begin{cases} \boldsymbol{I}(z) = \dfrac{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{z}} \boldsymbol{I}(\boldsymbol{u}) \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}} = \operatorname{diag}(g_{11}, g_{22}, \cdots, g_{(m-1)(m-1)}) \\ \boldsymbol{II}(z) = \dfrac{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{z}} \boldsymbol{II}(\boldsymbol{u}) \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}} = \operatorname{diag}(c_{11}, c_{22}, \cdots, c_{(m-1)(m-1)}) \\ W(z) = \dfrac{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{z}} W(\boldsymbol{u}) \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^{-1} = \operatorname{diag}(c_{11} g_{11}^{-1}, c_{22} g_{22}^{-1}, \cdots, c_{(m-1)(m-1)} g_{(m-1)(m-1)}^{-1}) \end{cases}$$

—(3.2.5.20)

这里不成立 $g_{ii} \equiv 1$，$\forall i$，一般也不成立 $g_{ii} \equiv g_{jj}$ $\forall i, j$，因此 c_{ii} 不是主法曲率，而主法曲率 $\kappa_i = c_{ii}/g_{ii}$. 注意在(3.2.5.20)式中，$\boldsymbol{I}$、$\boldsymbol{II}$ 之间的变换是合同变换，而 W 矩阵之间的变换则是相似变换.

只有将 $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{u})$、$\boldsymbol{II}(\boldsymbol{u})$ 看成是 $\boldsymbol{u}$ 参数向量已给定某个值的条件下的数值矩阵，则可经(3.2.5.11)式，由数值的变换矩阵 Q_t，得到对角化的 $Q_t^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I} Q_t$、$Q_t^{\mathrm{T}} \boldsymbol{II} Q_t$ 矩阵，且前者为单位阵，后者的主对角元素就是主法曲率.

曲面的以上性质与曲面上一点处的主法方向向量之间的相互关系有关. 在本书以上的分析中，其实给出了意义上有差异的又相关的三个不同的主法方向向量的概念. 它们都表示为矩阵的特征向量(拟特征向量).

(1) Weingarten 映射矩阵 W 的(非 0)特征向量，用 $\hat{\boldsymbol{t}}_i$ 表示. $\hat{\boldsymbol{t}}_i$ 满足

$$W \hat{\boldsymbol{t}}_i = \lambda_i \hat{\boldsymbol{t}}_i \qquad \text{—(3.2.5.21)}$$

(2) Weingarten 映射(行列式)的(非 0)特征向量，用 $\hat{\boldsymbol{u}}_i$ 表示. $\hat{\boldsymbol{u}}_i$ 满足

$$\boldsymbol{II} \hat{\boldsymbol{u}}_i = \lambda_i \boldsymbol{I} \hat{\boldsymbol{u}}_i \qquad \text{—(3.2.5.22)}$$

(3) 加边 Hessian 矩阵的(非 0)拟特征向量，用 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 表示. $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 满足

$$[\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) - \mu_i I_m] \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i + \gamma_i \nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \qquad \text{—(3.2.5.23)}$$

其中 λ_i、μ_i 分别指特征值、拟特征值.

这三个(拟)特征向量之间存在以下关系(参见(1.2.32a)式),

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{u}}_i = \boldsymbol{I}^{-1}\hat{\boldsymbol{t}}_i \quad \hat{\boldsymbol{t}}_i = \boldsymbol{I}\,\hat{\boldsymbol{u}}_i \\ \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\hat{\boldsymbol{u}}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{I}^{-1}\hat{\boldsymbol{t}}_i\end{cases} \quad \text{—(3.2.5.24)}$$

注意以上未考虑$\hat{\boldsymbol{t}}_i$, $\hat{\boldsymbol{u}}_i$, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 的归一化.

由于在$\boldsymbol{I}$、$\boldsymbol{II}$不同为对角矩阵时,W 矩阵不是对称矩阵,故一般地,$\hat{\boldsymbol{t}}_i$向量之间($\hat{\boldsymbol{u}}_i$ 也一样)不会是正交的. 只有$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 向量之间总可以保持正交性. 当然,在给定$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面函数的参数 $\boldsymbol{u}$ 的某个数值时,将$\boldsymbol{I}$、$\boldsymbol{II}$看成数值矩阵,那么,可以由前述的 Q_i 矩阵变换,得到全部正交的$\hat{\boldsymbol{t}}_i$、$\hat{\boldsymbol{u}}_i$ 和$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 向量组,并可以同时使它们归一化.

在$\boldsymbol{I}$、$\boldsymbol{II}$均为函数矩阵的条件下,由于不存在可积的$\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}}$变换,使曲面的第一基本二次型矩阵成为单位阵,故,不可能使$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$、$\hat{\boldsymbol{u}}_i$、$\hat{\boldsymbol{t}}_i$对所有下标 i 同时归一化,并且保持(3.2.5.24)式成立.

只有在局部的意义上,利用前述的$\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}}$变换,由(3.2.5.20)式,可以得到对角化的 $W(\boldsymbol{z})$矩阵,这时,$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$, $\hat{\boldsymbol{u}}_i$ 和$\hat{\boldsymbol{t}}_i$向量组均是正交向量组. 但这三者依旧不能在保持(3.2.5.24)式关系的条件实现同时归一化. 且由 $W(\boldsymbol{z})$与 $W(\boldsymbol{u})$矩阵间的相似变换关系,知二者具有相同的特征值,但特征向量间有关系

$$\hat{\boldsymbol{t}}_i(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{z}}\hat{\boldsymbol{t}}_i(\boldsymbol{z}) \quad \text{—(3.2.5.25)}$$

余可类推.

再考虑拟特征值 μ_i、拟特征向量$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 的可微性问题. 由于拟特征值(向量)本质上等价于特征值(向量),故有关函数矩阵特征值(向量)的可微性定理,可以直接移用于拟特征值(向量).

设 $\boldsymbol{x}(t) \in C^n \quad A(t) \in C^{n\times n}$ 是复 Euclid 空间上连续可微的函数向量、矩阵[1].

* **定理 3.2.5.3** 特征值是连续地依赖于矩阵的,其含义如下:如果$\{A_m\}$是收敛的 $n\times n$ 矩阵序列, $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = A$,那么,$A_m$ 的特征值集收敛于A 的特征值集. 换句话说,对每个 $\epsilon > 0$,存在正整数 k,使得当 $m > k$ 时,A_m 的所有特征值属于 A 的各特征值以其自身为中心以 ϵ 为半径的圆盘之并. ■

---

〔1〕 以下关于特征值、特征向量的可微性的分析,均引自《特殊矩阵》,陈景良、陈向晖,同前注,§9.5 节有关内容. 所引用的定理的证明(若未写出的),具体可见原著,所引用的定理以"*"上标注明.

·定理 3.2.5.4 设 $A(t)$是实变量 t 的可微 $n\times n$ 矩阵值函数,$A(0)$有单重特征值 λ_0,其含义为 λ_0 是 $A(0)$的特征多项式的单根,则对于足够小的 t, $A(t)$有一个特征值 $\lambda(t)$. 它对 t 可微,而且 $\lambda(0)=\lambda_0$. ■

证明: $A(t)$的特征多项式

$$f(\lambda,\ t)\equiv\det(\lambda I-A(t))$$

是 λ 的 n 次多项式,其系数是 t 的可微函数. λ_0 是 $A(0)$的单重特征值的假设,蕴涵着

$$f(\lambda_0,\ 0)=0,\ \frac{\partial}{\partial\lambda}f(\lambda,\ 0)\bigg|_{\lambda=\lambda_0}\neq 0$$

根据隐函数定理,在如此条件下,方程

$$f(\lambda,\ t)=0$$

有解 $\lambda=\lambda(t)$,而且这个解在 $t=0$ 的一个邻域中对 t 可微,即证.

在定理 3.2.5.4 的条件下,可以选取属于特征值 $\lambda(t)$的特征向量对 t 是可微的. 这里的"可以选取"说法的意思是因为特征向量总可以差一个不可微的纯量函数因子. 这一结论可表述为以下定理:

·定理 3.2.5.5 设 A 是定理 3.2.5.4 中描述的矩阵值函数,$\lambda(t)$是那里描述的 $A(t)$的特征值,则可选取 $A(t)$属于 $\lambda(t)$的特征向量 $\boldsymbol{x}(t)$是对 t 可微的. ■

证明从略.

以上所引的这三个定理中,对于所指的矩阵 A,并没有是自伴矩阵这一要求. 但对于矩阵的多重特征值的可微性问题,情况就会很复杂,通常只能限定在 A 矩阵是自伴矩阵的场合. 但这一限制,对于本书所分析的问题已足够了. 因为曲面函数的 Hessian 矩阵或其第一、二基本矩阵均是自伴(对称)矩阵.

·定理 3.2.5.6 设 $A(t)=[a_{ij}(t)]$是自伴矩阵,其每个元素 a_{ij} 是实变量 t 的可微函数. 假定在 $t=0$, $A(0)$ 有 $k>1$ 重特征值 λ_0. 用 $\mathcal{N}$表示 $A(0)$ 属于 λ_0 的特征向量生成的 k 维空间, P 表示映射至 $\mathcal{N}$ 上的正交投影. 假定 $\mathcal{N}$ 到 $\mathcal{N}$ 的自伴映射 $P\dot{A}(0)P$ 有 k 个不同的特征值

$$\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_k$$

并用

$$\boldsymbol{y}^{(1)},\ \cdots,\ \boldsymbol{y}^{(k)}$$

表示相应的规范化的特征向量,则对足够小的 t,$A(t)$有 k 个特征值

$$\lambda_1(t),\ \cdots,\ \lambda_k(t)$$

近乎于 λ_0,具有如下性质:

(1) 每个 $\lambda_i(t)$ 可微地依赖于 t，而且随 $t\to 0$ $\lambda_i\to\lambda_0$.

(2) 当 $t\neq 0$ 时，$\lambda_1(t)$, …, $\lambda_k(t)$ 是不同的.

(3) $A(t)$ 属于 $\lambda_i(t)$ 的特征向量 $\boldsymbol{x}^{(i)}(t)$，

$$A(t)\boldsymbol{x}^{(i)}(t)=\lambda_i(t)\boldsymbol{x}^{(i)}(t)$$

可以如此规范化，使得 $\boldsymbol{x}^{(i)}(t)\to\boldsymbol{y}^{(i)}$，当 $t\to 0$. ■

证明从略. 但应说明，当 t 充分小时，以上所述的特征值

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_i(t)\right|_{t=0}$$

存在，即 $\lambda_i(t)$ 是可微的. 并且，以上定理的结论可见，当 t 充分小但不为 0 时，矩阵 $A(t)$ 近乎于 k 重特征值 λ_0 的有 k 个单根特征值 $\lambda_i(t)$ 以及 $\lambda_i(t)$ 所对应的特征向量 $\boldsymbol{x}^{(i)}(t)$. 当 $t\to 0$，$\lambda_i(t)\to\lambda_0$，$\boldsymbol{x}^{(i)}(t)\to\boldsymbol{y}^{(i)}$，由单根特征值对应的特征向量的可微性(定理 3.2.5.5)，可推知这里的 $\boldsymbol{x}^{(i)}(t)$ 在 t 充分小时是可微的.

由于 $A(t)$ 是自伴矩阵，故 $A(t)$ 的 $k>1$ 重特征值 λ_0 的特征向量可生成 k 维子空间，记其为 $\mathcal{N}$. 当特征向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 连续变化时，如果其可微，则对

$$A(t)\boldsymbol{x}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{x}(t)$$

求导，并在 $t=0$ 取值，有

$$\dot{A}(0)\boldsymbol{x}(0)+A(0)\dot{\boldsymbol{x}}(0)=\dot{\lambda}(0)\boldsymbol{x}(0)+\lambda(0)\dot{\boldsymbol{x}}(0) \qquad \text{—(3.2.5.26)}$$

其中

$$\dot{A}(t)=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{ij}(t)\right]$$

用 P 表示映射至 $\mathcal{N}$ 上的正交投影，应有

$$PA(0)=\lambda(0)P$$

而且 $\mathcal{N}$ 中的特征向量 $\boldsymbol{x}(0)$ 满足

$$P\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}(0)$$

故将 P 作用于(3.2.5.26)式有

$$P\dot{A}(0)P\boldsymbol{x}(0)+\lambda(0)P\dot{\boldsymbol{x}}(0)=\dot{\lambda}(0)\boldsymbol{x}(0)+\lambda(0)P\dot{\boldsymbol{x}}(0)$$

亦即

$$P\dot{A}(0)P\boldsymbol{x}(0)=\dot{\lambda}(0)\boldsymbol{x}(0) \qquad \text{—(3.2.5.27)}$$

因 $A(t)$ 自伴，故 $\dot{A}(0)$ 自伴，又因 P 自伴，故 $P\dot{A}(0)P$ 也就是自伴的. 所以，上式

表示 $P\dot{A}(0)P$ 映射 $\mathcal{N}$ 到 $\mathcal{N}$，并且 $\dot{\lambda}(0)$ 必须是 $P\dot{A}(0)P$ 在 $\mathcal{N}$ 上的一个特征值，而 $\boldsymbol{x}(0)$ 是 $\dot{\lambda}(0)$ 的一个相应的特征向量.

故(3.2.5.27)式所表示的关系就构成了定理 3.2.5.6 中的一个条件[1].

由定理 3.2.5.3～6 所给出的条件与结论下，可以说，曲面函数 $f(\boldsymbol{x})=0$ 给出的加边 Hessian 矩阵的拟特征值 μ_i，拟特征值向量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 对 $\boldsymbol{x}$ 变量在 μ_i 为单重拟特征值时，μ_i、$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 是可微的，在 μ_i 是 $k>1$ 重拟特征值时，在 $\boldsymbol{x}$ 的领域，可将 μ_i 近乎于看成是 k 个单重拟特征值 $\mu_i^{(j)}$，并且，$\mu_i^{(j)}$ 对应特征向量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i^{(j)}$ $j=1,2,\cdots,k$，从而，$\mu_i^{(j)}$、$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i^{(j)}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 是可微的. 因此，以下总是不加区别地假设在正则曲面上的任一点 $\boldsymbol{x}$ 的邻域，拟特征值 μ_i、拟特征向量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 可微. 只是当 μ_i 是 $k>1$ 重拟特征值时，均用上述的 $\mu_i^{(j)}$、$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i^{(j)}$ 来近似地表示与 μ_i、$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 等价的量.

附带指出，对于 $A\in R^{n\times n}$，且 λ 是 A 的单根特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是其对应的特征向量，则(3.2.5.27) 式可表成以下关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\boldsymbol{\alpha}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda\boldsymbol{\alpha}$$

$$\dot{A}\boldsymbol{\alpha}+A\dot{\boldsymbol{\alpha}}=\dot{\lambda}\boldsymbol{\alpha}+\lambda\dot{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\dot{A}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A\dot{\boldsymbol{\alpha}}=\dot{\lambda}+\lambda\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\alpha}}$$

因为

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\alpha}}\equiv 0$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A\dot{\boldsymbol{\alpha}}=\lambda\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\alpha}}\equiv 0$$

故

$$\dot{\lambda}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\dot{A}\boldsymbol{\alpha}\qquad\text{—(3.2.5.28)}$$

但(3.2.5.28)式在拟特征值 μ 不同时是 A 矩阵的特征值时，一般是不成立的，因为此时有

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\dot{A}\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\dot{\mu}-2\gamma\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{b}}$$

故当 $\dot{\boldsymbol{b}}\neq\boldsymbol{0}$ or $\gamma\neq 0$（即 μ 不同时是 $A(t)$ 的特征值），就得不到总成立

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\dot{A}\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\dot{\mu}$$

〔1〕 定理 3.2.5.6 以下自此的论述亦引自《特殊矩阵》，同前注，§3.13 节. 具体证明可见原著.

的关系．这里$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$是$\mu$对应的$A_b$矩阵的拟特征向量[1]．

推论 3.2.5.7　R^m空间上的正则（参数）曲面（或曲面片）的$\boldsymbol{x}$点处的$m-1$个主法曲率κ_f^i（或κ_i）及其对应的主法方向向量$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$，作为自伴的 Weingarten 映射矩阵的特征值、特征向量所构造的拟特征向量，在定理 3.2.5.3～6 所指的条件和结论意义上是可微（或近乎于可微）的．■

§3.2.6　加边正定矩阵拟特征值的积分特性

由矩阵分析已知，$A \in R^{n\times n}$是正定矩阵，则有以下关于二次型$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$的积分关系[2]，

$$\int_{R^n} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}} \qquad —(3.2.6.1)$$

以下推广这一关系使其运用到加边正定矩阵的情形．

为此设

$$\begin{cases} z = f(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x} \in D_x \subset R^m \\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) & \boldsymbol{u} \in D_u \subset R^n \end{cases} \qquad —(3.2.6.2)$$

给出一个 Mogne 形式的函数和n维正则参数曲片．则积分

$$a = \int_{\Omega} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}V \quad \Omega = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) \quad \boldsymbol{u} \in S \subset D_u\} \quad —(3.2.6.3)$$

称为函数$f(\boldsymbol{x})$关于曲面$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的面积的积分．$\mathrm{d}V$是$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$决定的正则参数曲面片上的微元超立方面积（也可称为体积），S是属于D_u的一个闭子集且是n个闭区间的直积集合．

（3.2.6.3）式的积分也就是普通的多重积分的定义．所以这里不再从S集合的任意的无限划分再求和去给予分析，而只是利用 Gram 矩阵的性质直接给出（3.2.6.2）式中微元体积$\mathrm{d}V$的表达式．

设$\boldsymbol{u}^0 = (u_i^0) \in S$，则

$$\boldsymbol{r}^i = \boldsymbol{r}(u_1^0, \cdots, u_{i-1}^0, u_i, u_{i+1}^0, \cdots, u_n^0) \qquad —(3.2.6.3)$$

对$i = 1, 2, \cdots, n$，构成了在$\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}^0)$点的$n$维曲面上的一个曲线坐标网（不一定是正交的）．因为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^i}{\mathrm{d}u_i}\right|_{u_i=u_i^0} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}\right|_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^0} = \dot{\boldsymbol{r}}_i(\boldsymbol{u}^0) \quad i = 1, \cdots, n$$

---

［1］　这里使用了L—乘子γ也是可微的假设．

［2］　引自《特殊矩阵》，陈景良、陈向晖，见前注．第 211～213 页，定理 3.10.8 及其证明．

是这一曲线坐标网在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切方向向量. 故 $\dot{\boldsymbol{r}}_i(\boldsymbol{u}^0)$ 构成了 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的一个 n 维仿射坐标系. 这个仿射坐标系位于 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切超平面上. 这个仿射坐标系以 $\dot{\boldsymbol{r}}_1(\boldsymbol{u}^0)$, $\dot{\boldsymbol{r}}_2(\boldsymbol{u}^0)$, $\cdots$, $\dot{\boldsymbol{r}}_n(\boldsymbol{u}^0)$ 为基向量组. 则对正的微元增量 $\mathrm{d}u_1$, $\mathrm{d}u_2$, $\cdots$, $\mathrm{d}u_n>0$,作

$$\boldsymbol{x}^1=\dot{\boldsymbol{r}}_1(\boldsymbol{u}^0)\mathrm{d}u_1+\dot{\boldsymbol{r}}_2(\boldsymbol{u}^0)\mathrm{d}u_2+\cdots+\dot{\boldsymbol{r}}_n(\boldsymbol{u}^0)\mathrm{d}u_n \qquad —(3.2.6.4)$$

给出了这个仿射坐标系上的充分接近 $\boldsymbol{x}^0$ 点的另一个点 $\boldsymbol{x}^1$. 将 $\boldsymbol{x}^0$、$\boldsymbol{x}^1$ 看成是仿射坐标系上的一个平行四边形超立方体的 2 个对顶点. 因为这个仿射坐标系以 $\boldsymbol{x}^0$ 为原点,所以,向量 $\boldsymbol{x}^1-\boldsymbol{x}^0$ 在仿射坐标系上就是 $\boldsymbol{x}^1$ 即(3.2.6.4)式. 这样, $\dot{\boldsymbol{r}}_i(\boldsymbol{u}^0)\mathrm{d}u_i$ 就是这个超立方体的 n 个棱边. 由 Gram 矩阵的几何意义,这个 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切超平面上的 n 维超立方体的体积的平方是

$$\mathrm{d}V^2=\left|\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{r}}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}^0)\mathrm{d}u_1\\ \vdots\\ \dot{\boldsymbol{r}}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}^0)\mathrm{d}u_n\end{bmatrix}\cdot[\dot{\boldsymbol{r}}_1(\boldsymbol{u}^0)\mathrm{d}u_1,\ \cdots,\ \dot{\boldsymbol{r}}_n(\boldsymbol{u}^0)\mathrm{d}u_n]\right| \qquad —(3.2.6.5)$$

且由于 $\boldsymbol{u}^0$ 是任选的,故对任一 $\boldsymbol{u}\in S$,在 $\boldsymbol{u}$ 处 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面上的微元体积(用切超平面来近似代替曲面)就是

$$\mathrm{d}V^2=\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{u}}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{u}}\right|\mathrm{d}u_1^2\mathrm{d}u_2^2\cdots\mathrm{d}u_n^2 \qquad —(3.2.6.6)$$

(3.2.6.6)式可以从(3.2.6.5)式等号右边的 Gram 矩阵行列式的展开式通项中直接得到.

对(3.2.6.6)式作开方,并注意到 $\mathrm{d}V>0$, 就有

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}V&=\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{u}}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{u}}\right|^{1/2}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n\\ \text{即}\qquad \mathrm{d}V&=|\boldsymbol{I}|^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n\end{aligned}\right\} \qquad —(3.2.6.7)$$

这里 $\mathrm{d}u_i$ $i=1,\cdots,n$ 可以从关于 S 积分区域的任何一个(无限)划分中给出.

将(3.2.6.7)式代入(3.2.6.3)式,并将其写成通常的重积分形式,就是

$$a=\int\int_{\boldsymbol{u}\in S}\cdots\int f(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}))\,|\boldsymbol{I}|^{1/2}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n \qquad —(3.2.6.8)$$

当 $\boldsymbol{I}=I_m$, (3.2.6.8)式就是普通的 m 重积分.

对(3.2.6.8)式再作可微的 1—1 变换

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})\quad \boldsymbol{v}=(v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n)^{\mathrm{T}}$$

从(3.2.6.7)式中直接得到

$$dV = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{v}}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{v}}\right|^{1/2} dv_1 dv_2 \cdots dv_n$$

因为

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}}$$

故

$$dV = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|^{1/2} \left|\left(\left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}}\right|\right)\right| dv_1 dv_2 \cdots dv_n \qquad —(3.2.6.9)$$

这里 $\left|\left(\left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}}\right|\right)\right| = \operatorname{sign}\left(\left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}}\right|\right) \cdot \left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}}\right|$ 即取行列式绝对值[1].

从而,在给予参数变换的形式下,(3.2.6.8)式就是

$$a = \int \int_{\boldsymbol{v}\in S_v} \cdots \int f(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}))) \mid \boldsymbol{I} \mid^{\frac{1}{2}} \left|\left(\left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{v}}\right|\right)\right| dv_1 dv_2 \cdots dv_n \quad \boldsymbol{I} = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$$

—(3.2.6.10)

S_v 由逆变换 $\boldsymbol{u}^{-1}(S) \to S_v$ 决定.

(3.2.6.8)式、(3.2.6.10)式就是 R^{m+1} 空间上的函数 $z=f(\boldsymbol{x})$ 关于 n 维曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 上的面积积分公式[2].

特别地如果是 $f(\boldsymbol{x})$ 函数关于

$$F(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$$

决定的一般形式曲面函数曲面上的面积积分,应有

$$a = \int \int_{\left(\substack{\boldsymbol{x}\in S \\ F(\boldsymbol{x})=0}\right)} \cdots \int f(\boldsymbol{x}) \frac{\| \nabla F(\boldsymbol{x}) \|}{\left|\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|} dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_m$$

$$\left(\frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \neq 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in S\right) \qquad —(3.2.6.11)$$

如果 $F(\boldsymbol{x})$ 是由 Monge 形式的函数给出

$$z = F(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$$

则

---

[1] 这一点在传统文献中往往未予强调而仅是以变换 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})$ 保持右手性定向不变来表示的.

[2] 参见《微积分和数学分析引论》, R · Courant、F · John, 见前注,第二卷第二分册第4、5章内容.

$$a = \int\limits_{(x,\ z)\in S} f(\boldsymbol{x},\ z)\mathrm{d}V = \int\int\limits_{\boldsymbol{x}\in S_x}\cdots\int f(\boldsymbol{x},\ F(\boldsymbol{x}))\ \|\ 1+\nabla F^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\nabla F(\boldsymbol{x})\ \|\ \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m$$

—(3.2.6.12)

(3.2.6.11～12)式可由(2.4.5.20～21)式导出.

利用(3.2.6.8)式,可得关于约束正定矩阵 $A\in R^{m\times m}$ 的二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$ 函数的以下积分关系

$$\int\limits_{\boldsymbol{x}\in R^m,\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}\mathrm{d}x = \frac{\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{-\det A_b}} \qquad —(3.2.6.13)$$

其中 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=1,\ A_b=\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}$ 且 A_b 的拟特征值 $\mu_i>0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$.

证明:利用 A_b 的拟特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 作 A 的拟特征值谱分解变换,

$$\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{u}\quad Q=[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_{m-1}]\in R^{m\times(m-1)},\ \boldsymbol{u}\in R^{m-1}$$

将上式看成是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})=Q\boldsymbol{u}$ 决定的一个正则参数曲面片.将(3.2.6.13)式的左边看成是 $\mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}^{T}A\boldsymbol{x}}$ 关于 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面(平面)面积的积分,由(3.2.6.8)式,因为

$$|\ \boldsymbol{I}\ |=|\ Q^{\mathrm{T}}Q\ |=|\ I_{m-1}\ |=1\quad(\boldsymbol{x}\in R^m,\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0)\Leftrightarrow\boldsymbol{u}\in R^{m-1}$$

以及

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}AQ\boldsymbol{u}=\sum_{i=1}^{m-1}\mu_i u_i^2$$

得

$$\int\limits_{\boldsymbol{x}\in R^m,\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int\limits_{\boldsymbol{u}\in R^{m-1}}\mathrm{e}^{-\sum\mu_i u_i^2}\mathrm{d}\boldsymbol{u}$$

但

$$\int\limits_{\boldsymbol{u}\in R^{m-1}}\mathrm{e}^{-\sum\mu_i u_i^2}\mathrm{d}\boldsymbol{u}=\prod_{i=1}^{m-1}\int\limits_{u_i\in R}\mathrm{e}^{-\mu_i u_i^2}\mathrm{d}u_i$$

因为 $\mu_i>0$,再作变换

$$y_i=\sqrt{\mu_i}u_i\qquad\frac{\mathrm{d}y_i}{\sqrt{\mu_i}}=\mathrm{d}u_i$$

得

$$\int\limits_{u_i\in R}\mathrm{e}^{-\mu_i u_i^2}\mathrm{d}u_i=\frac{1}{\sqrt{\mu_i}}\int\limits_{y_i\in R}\mathrm{e}^{-y_i^2}\mathrm{d}y_i=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\mu_i}}$$

将此结果代入前一式,并注意到

$$\mu_1\mu_2 \cdot \cdots \cdot \mu_{m-1} = -\det A_b$$

即证得结果.

(3.2.6.13)式容易推广到多重约束的情形，即有以下积分关系，

$$\int\limits_{\substack{x\in R^m \\ b_i^{\mathrm{T}}x=0,\ i=1,\cdots,n}} \mathrm{e}^{-x^{\mathrm{T}}Ax}\mathrm{d}x = \frac{\pi^{\frac{m-n}{2}}}{\sqrt{\dfrac{(-1)^n\det A_{bb}}{|B^{\mathrm{T}}B|}}} \qquad —(3.2.6.14)$$

其中 $B=[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n]$，$A_{bb}=\begin{bmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$，条件仍是 A_{bb} 矩阵的全部拟特征值 $\mu_i > 0 \quad i=1, \cdots, m-n$.

(3.2.6.14)式由以上的分析及(3.1.2.16)式即可导出.

§3.3 拟特征值(向量)与曲面上的特殊曲线

§3.3.1 曲面上的(一般)曲线与曲率线

过曲面 f 上的 $\boldsymbol{x}^0$ 点且位于曲面 f 上的曲线 c 可由以下方程组表示，其中 s 是弧长参数，

$$c:\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} = \Lambda(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}(s) & \left\|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\right\| = 1 \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^0 \end{cases} \qquad —(3.3.1.1)$$

这里 $\boldsymbol{x}\in R^m \quad \Lambda\in R^{m\times(m-1)} \quad \boldsymbol{t}\in R^{m-1}$. 对于正则参数曲面片 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$，

$$\Lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \quad \boldsymbol{t}(s) = \dot{\boldsymbol{u}}(s) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\dot{\boldsymbol{u}} \qquad —(3.3.1.2)$$

对于一般曲面函数 $f(\boldsymbol{x})=0$，$\boldsymbol{x}\in D\subset R^m$，$\Lambda$ 可以是切超平面方程

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha} = 0$$

的任一个连续可微的基础解系函数矩阵 $\Lambda(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{t}(s)$是关于 s 连续可微的向量函数.

注意，这里并没有要求 $\Lambda(\boldsymbol{x})$矩阵满足(2.4.6.4)式的可积性条件. 具体地讲，(3.3.1.1)式有解的条件由以下定理给出[1].

---

[1] 引自《现代应用数学手册—分析与方程卷》，清华大学出版社，2006 年，第 532 页，定理 23.2.6.

定理 3.3.1.1 记 $x \in R^n$，$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = (f_1(t, \boldsymbol{x}), \cdots, f_n(t, \boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}$，则方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$$

的右端函数 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$在区域 $D \subset R^{n+1}$ 内连续，而且所有偏导数$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$，$\forall\, i, j$均有界，则对任一 $(t_0, \boldsymbol{x}^0) \in D$，该方程组存在唯一的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$，并满足初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$，而且此解都能向左右延展至 D 的边界. ■

由于基础解系矩阵 $\Lambda(\boldsymbol{x})$是(可微的)$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$函数经代数运算所构造，故 $\Lambda(\boldsymbol{x})$总是关于 $\boldsymbol{x}$ 连续可微的. 因此，任取可微的 $\boldsymbol{t}(s)$向量，并确定以下区域，

$$\begin{cases} D_x = \{\boldsymbol{x} \mid \Lambda^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\Lambda(\boldsymbol{x}) = I_{m-1} \quad \boldsymbol{x} \in D\} \\ D_s = \{s \mid \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{t}(s) = 1 \quad s \in R\} \end{cases}$$

则显然因为

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Lambda^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\Lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \Lambda^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\Lambda(\boldsymbol{x}) + \Lambda^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\frac{\partial \Lambda(\boldsymbol{x})}{\partial x_k} = [0] \quad k = 1, \cdots, m$$

有定值，故

$$\left\| \frac{\partial \Lambda(\boldsymbol{x})}{\partial x_k} \right\| < +\infty$$

因此，在 $D_x \times D_s \in R^{m+1}$ 上 $\Lambda(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}(s)$ 关于 x_k 的偏导数必有界，从而(3.3.1.1)式在 $\boldsymbol{x} \in D_x$ 上有唯一解 $\boldsymbol{x}(s)$. 这里 D_x 非空显然易见. 并且可知(3.3.1.1)式的解 $\boldsymbol{x}(s)$ 一定就是满足 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ 的曲线.

将(3.3.1.1)式的解表成

$$\boldsymbol{x}(s) = \int_0^s \Lambda(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}(s)\mathrm{d}s + \boldsymbol{x}^0$$

并设

$$f(\boldsymbol{x}(s)) = c_0$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}f(\boldsymbol{x}(s)) = \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) \cdot \Lambda(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}(s) = 0$$

故 c_0 是与 s 无关的常数. 所以

$$f(\boldsymbol{x}(0)) = f(\boldsymbol{x}^0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$$

即知 $\boldsymbol{x}(s)$满足 $f(\boldsymbol{x}(s))=0$.

在(3.3.1.1)式中,$\boldsymbol{t}(s)$决定了过 $\boldsymbol{x}^0$ 点的一条曲线的切方向. 故 $\boldsymbol{x}(s)$曲线是有向的曲线. 其正向由 $\Lambda(\boldsymbol{x})$、$\boldsymbol{t}(s)$共同给定. 用$-\Lambda(\boldsymbol{x})$代替 $\Lambda(\boldsymbol{x})$,或用$-\boldsymbol{t}(s)$代替 $\boldsymbol{t}(s)$,则 $\boldsymbol{x}(s)$都将在形状、位置均不变的状态下改变其定向.

例 3.3.1.1 在 R^3 空间的单位球面

$$f:\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$$

上,过 $x_3\neq 0$ 的点的切平面方程的基础解系矩阵,取为

$$\Lambda(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -\dfrac{x_1}{x_3} & -\dfrac{x_2}{x_3}\end{bmatrix}$$

将 Λ 表成归一化的列正交矩阵,有

$$\Lambda(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_3^2}}\begin{bmatrix}x_3 & -x_1x_2\\ 0 & x_1^2+x_3^2\\ -x_1 & -x_2x_3\end{bmatrix}$$

显然 $\Lambda^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\Lambda(\boldsymbol{x})=I_2$ 成立的条件是 $x_1^2+x_3^2\neq 0$, 不妨取

$$D_x=(-1,\ 1)\times(-1,\ 1)\times(0,\ 1)$$

在 $\boldsymbol{x}\in D_x$ 上$\dfrac{\partial\Lambda(\boldsymbol{x})}{\partial x_k}$ $k=1,2,3$ 的有界性显然. 则对任取的 $\boldsymbol{t}(s)\in R^2$ 可微向量, $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}=1$,以及给定的 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}^0$, $(x_3^0\neq 0)$ 初值条件,便决定过 $\boldsymbol{x}^0$ 点且位于球面上的一条曲线.

如简单地设 $\boldsymbol{t}=(1,\ 0)^{\mathrm{T}}$ $\boldsymbol{x}^0=(c_1,\ c_2,\ c_3)$ $c_3\neq 0$ $c_1^2+c_2^2+c_3^2=1$ 有

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s}=ax_3$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}=0\qquad a=\frac{1}{\sqrt{1-c_2^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}s}=-ax_1$$

便有解

$$c:\begin{cases}x_1=c_1\cos as+c_3\sin as\\ x_2=c_2\\ x_3=c_3\cos as-c_1\sin as\end{cases}$$

c 是以 x_2 轴为极轴的纬圆曲线族.

定义 3.3.1.1 设 c 是正则曲面 f 上的一条曲线,如果 c 曲线上的任一点的

切方向同时是曲面 f 在该点的一个主法(曲率)方向,则称 c 是曲面 f 的曲率线. ■

在正则参数曲面片 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})\ \boldsymbol{u}\in D_u\subset R^{m-1}$ 上,设曲率线 c 由 $\boldsymbol{x}(s)$ 表示,则由 W 映射的性质及以上定义,有

$$W\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}=-\frac{\partial \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\Rightarrow\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}}=-\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}W^{\mathrm{T}}$$

且有 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}$,故

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s}=-\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}W^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s}$$

当 $\boldsymbol{x}(s)$ 是曲率线,故 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s}$ 是 W 映射(行列式)的特征向量,$\boldsymbol{I\!I}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s}=\lambda\,\boldsymbol{I}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s}$,于是

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s}=-\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{I}^{-1}\boldsymbol{I\!I}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s}=-\lambda\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s}=-\lambda\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\qquad —(3.3.1.3)$$

这里 W 是 Weingraten 映射矩阵(或理解映射本身均可),$\boldsymbol{n}$ 是 $\boldsymbol{r}$ 的单位法向量(由多重矢量积决定),λ 是 W 映射矩阵的特征值即 $\boldsymbol{r}$ 的主法曲率(函数).

定理 3.3.1.2(Rodriques 定理) R^m 空间的曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 上的一条曲线 c 是曲率线的充要条件是对曲线 c 上的任一点均成立

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s}=-\lambda\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}$$

其中 λ 是曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 沿 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}$ 切方向的法截曲率,且 λ 同时是主法曲率. ■

在一般曲面函数表示的曲面 f 上,由

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}=\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

则在 $\boldsymbol{x}(s)$ 表示的曲率线上,由曲率线的定义

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}=\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i\qquad —(3.3.1.4)$$

$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 是加边 Hessian 矩阵的(非 0)拟特征向量(不一定要求归一). 另由

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{N}}}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\|\nabla f\|}(I_m-\widetilde{\boldsymbol{N}}\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}})\nabla^2 f\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\|\nabla f\|}(I_m-\widetilde{\boldsymbol{N}}\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}})\nabla^2 f\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$$

由拟特征向量的定义,

$$\nabla^2 f\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i=\mu_i\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i-\gamma_i\nabla f$$

故

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{N}}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\|\nabla f\|}(I_m - \widetilde{\boldsymbol{N}}\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}})(\mu_i\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i - \gamma_i \nabla f)$$

$$= \frac{1}{\|\nabla f\|}(\mu_i\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i - \gamma_j \nabla f + \gamma_j \nabla f)$$

故知

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{N}}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mu_i}{\|\nabla f\|}\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i \qquad \text{—(3.3.1.5)}$$

因为

$$\kappa_f^i = -\frac{\mu_i}{\|\nabla f\|}$$

故总成立

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{N}}}{\mathrm{d}s} = -\kappa_f^i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} \qquad \text{—(3.3.1.6)}$$

(3.3.1.6)式就是 Rodriques 定理应用到一般形式的曲面函数上的形式，其中 κ_f^i 是主法曲率(之一).

设 $\boldsymbol{x}(s)$是正则参数曲面片 f 上的曲线，$\boldsymbol{x}(s)$的曲率 κ_x 由(2.2.2.6)式

$$\kappa_x = \|\nabla^2 \boldsymbol{x}(s)\| \qquad \nabla^2 \boldsymbol{x}(s) = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s^2}$$

由(3.3.1.2)式

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}\dot{u}_j \qquad \dot{u}_j = \frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}s}$$

以下用缩写符号 $\sum\limits_{i,j=1}^{N} \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}$ 余可类推. 有

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}s^2} = \sum_{k,j=1}^{m-1} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_k \partial u_j}\dot{u}_k\dot{u}_j + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}\ddot{u}_j \qquad \ddot{u}_j = \frac{\mathrm{d}^2 u_j}{\mathrm{d}s^2}$$

记

$$\nabla^2 x_i = \left[\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_k \partial u_j}\right] \qquad \nabla x_i = \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial x_i}{\partial u_{m-1}}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\dot{\boldsymbol{u}} = (\dot{u}_1, \dot{u}_2, \cdots, \dot{u}_{m-1})^{\mathrm{T}}$$

则

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = \nabla x_i^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{u}} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}s^2} = \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\nabla^2 x_i \dot{\boldsymbol{u}} + \nabla x_i^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{u}} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, m \qquad \text{—(3.3.1.7)}$$

其中 $$\ddot{\boldsymbol{u}} = (\ddot{u}_1, \ddot{u}_2, \cdots, \ddot{u}_{m-1})^{\mathrm{T}} \qquad \ddot{u}_i = \frac{\mathrm{d}^2 u_i}{\mathrm{d}s^2}$$

故

$$\nabla^2 \boldsymbol{x} = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s^2} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \nabla^2 x_1 \dot{\boldsymbol{u}} \\ \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \nabla^2 x_2 \dot{\boldsymbol{u}} \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \nabla^2 x_m \dot{\boldsymbol{u}} \end{bmatrix} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \ddot{\boldsymbol{u}} \qquad \text{—(3.3.1.8)}$$

再由自然标架方程组的(2.4.3.2)式

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \nabla^2 x_1 \dot{\boldsymbol{u}} \\ \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \nabla^2 x_2 \dot{\boldsymbol{u}} \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \nabla^2 x_m \dot{\boldsymbol{u}} \end{bmatrix} = \sum_{k,j=1}^{m-1} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u_k \partial u_j} \dot{u}_k \dot{u}_j$$

$$= \sum_{k,j,h=1}^{m-1} \Gamma_{kj}^h \dot{\boldsymbol{r}}_h \dot{u}_k \dot{u}_j + \sum_{k,j=1}^{m-1} C_{kj} \cdot \boldsymbol{n} \cdot \dot{u}_k \dot{u}_j$$

$$= \sum_{h=1}^{m-1} \dot{\boldsymbol{r}}_h \left(\sum_{k,j=1}^{m-1} \Gamma_{kj}^h \dot{u}_k \dot{u}_j \right) + \boldsymbol{n} \cdot \sum_{k,j=1}^{m-1} C_{kj} \dot{u}_k \dot{u}_j$$

利用 Gauss - Codazzi 方程推导中的符号规定

$$\sum_{h=1}^{m-1} \dot{\boldsymbol{r}}_h \left(\sum_{k,j=1}^{m-1} \Gamma_{kj}^h \dot{u}_k \dot{u}_j \right) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} (\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \Gamma \dot{\boldsymbol{u}}) \qquad \text{—(3.3.1.9)}$$

其中

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_{11} & \boldsymbol{\Gamma}_{12} & \cdots & \boldsymbol{\Gamma}_{1(m-1)} \\ \boldsymbol{\Gamma}_{21} & \boldsymbol{\Gamma}_{22} & \cdots & \boldsymbol{\Gamma}_{2(m-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{\Gamma}_{(m-1)1} & \boldsymbol{\Gamma}_{(m-1)2} & \cdots & \boldsymbol{\Gamma}_{(m-1)(m-1)} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\Gamma}_{ij} = (\Gamma_{ij}^1, \Gamma_{ij}^2, \cdots, \Gamma_{ij}^{m-1})^{\mathrm{T}}$$

$$\text{—(3.3.1.10)}$$

即 Γ 是以 $m-1$ 维向量 $\boldsymbol{\Gamma}_{ij}$ 为元素的矩阵. 故 $\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \Gamma \dot{\boldsymbol{u}}$ 也是 $m-1$ 维向量.

$$\sum_{k,j=1}^{m-1} C_{kj} \dot{u}_k \dot{u}_j = \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \, \mathbb{I}\!\mathbb{I} \, \dot{\boldsymbol{u}} \qquad \text{—(3.3.1.11)}$$

所以,

$$\nabla^2 \boldsymbol{x} = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} (\ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \Gamma \dot{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{n} \cdot (\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \, \mathbb{I}\!\mathbb{I} \, \dot{\boldsymbol{u}}) \qquad \text{—(3.3.1.12)}$$

(3.3.1.12)式将曲面 f 上的曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 的二阶导数向量 $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s^2}$ 分解为沿曲面切空间的分量部分(记为 $D\boldsymbol{x}(s)$)和法方向的分量部分(记为 $N\boldsymbol{x}(s)$).

这样

$$\begin{cases} D\boldsymbol{x}(s) = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}(\ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\Gamma\dot{\boldsymbol{u}}) \\ N\boldsymbol{x}(s) = \kappa_n \cdot \boldsymbol{n} \end{cases} \quad —(3.3.1.13)$$

这里,设曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 的参数 s 是弧长参数,故由

$$\|\nabla \boldsymbol{x}\| = \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{I}\ \dot{\boldsymbol{u}} = 1$$

可得沿 $\boldsymbol{x}(s)$ 的切方向上曲面 f 的法截曲率是

$$\kappa_n = \frac{\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{I\!I}\ \dot{\boldsymbol{u}}}{\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{I}\ \dot{\boldsymbol{u}}} = \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{I\!I}\ \dot{\boldsymbol{u}} \quad —(3.3.1.14)$$

与(3.3.1.12)式相比较即有(3.3.1.13)式的第2式.

所以

$$\nabla^2 \boldsymbol{x} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}(\ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\Gamma\dot{\boldsymbol{u}}) + \kappa_n \cdot \boldsymbol{n} = D\boldsymbol{x}(s) + N\boldsymbol{x}(s) \quad —(3.3.1.15)$$

显然 $D\boldsymbol{x}(s)$ 就是 $\nabla^2\boldsymbol{x}$ 的**协变导数**.

由曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 的(绝对)曲率 κ_x 的定义即知

$$\kappa_x = (\|D\boldsymbol{x}(s)\|^2 + \kappa_n^2)^{1/2} \quad —(3.3.1.16)$$

$$\|D\boldsymbol{x}(s)\| = \left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}(\ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\Gamma\dot{\boldsymbol{u}})\right\| \quad —(3.3.1.17)$$

当 $\boldsymbol{x}(s)$ 是曲面上的直线,必应有 $\kappa_x = 0$. 由(3.3.1.16)式即知应有 $\kappa_n = 0$, $\|D\boldsymbol{x}(s)\| = 0$. 曲面上直线的切方向的法截曲率 κ_n 无疑为0. 再由(3.3.1.17)式即知,由于 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$ 是列满秩矩阵,故 $\|D\boldsymbol{x}(s)\| = 0$ 就意味着曲面上的直线应满足以下微分方程.

$$\ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\Gamma\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0} \quad —(3.3.1.18)$$

由以下分析可见(3.3.1.18)式同时就是曲面上的测地线方程.

由以上分析可见(3.3.1.18)式的分量方程的形式就是

$$\ddot{u}_h + \sum_{i,j=1}^{m-1}\Gamma_{ij}^h\dot{u}_i\dot{u}_j = 0 \quad h = 1, \cdots, m-1 \quad (3.3.1.18a)$$

并可知对任一个 h, $\ddot{u}_h + \sum_{i,j=1}^{m-1}\Gamma_{ij}^h\dot{u}_i\dot{u}_j$ 就是曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 二阶导数向量 $\nabla^2\boldsymbol{x}(s)$ 在

曲面自然标架系($\dot{r}_1$, $\dot{r}_2$, …, $\dot{r}_{m-1}$, n)上的切空间的基向量 $\dot{r}_\kappa$ 上的分量.

当曲面上的直线的切方向给出的曲面法截曲率 $\kappa_n = 0$ 就是曲面在该直线上的(任一点处的)主法曲率(之一),那么,这一直线就同时是曲面的曲率线.

推论 3.3.1.3 设在 R^m 空间的正则曲面 $f(x)=0$ 上的曲线 $x(s)$ 是一条直线,且 $x(s)$ 同时又是曲面 f 的曲率线的充要条件是 $\nabla x(s)$ 是 $\nabla^2 f(x)$ 矩阵的特征向量. ■

证明: 不妨设 s 是弧长参数,已知曲面 f 上的曲线 $x(s)$ 是直线,故曲面 f 沿 ∇x 切方向的法截曲率

$$\kappa_n = \nabla x^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(x) \nabla x \equiv 0$$

但同时 ∇x 又是曲面 f 的切向量,故总有 $\nabla f^{\mathrm{T}}(x) \nabla x \equiv 0$. 因此,当 ∇x 就是 $\nabla^2 f$ 的特征向量,即知与 ∇x 对应的特征值 λ_i 是

$$\lambda_i = \nabla x^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(x) \nabla x = 0$$

因此,取 $\gamma_i = 0$, 则 ∇x 又是以下拟特征向量方程组的解

$$\begin{cases} [\nabla^2 f(x) - \mu_i I_m] \nabla x + \gamma_i \nabla f & = \mathbf{0} \\ \nabla f^{\mathrm{T}} \nabla x & = 0 \\ \nabla x^{\mathrm{T}} \nabla x & = 1 \end{cases}$$

这里必可取 $\mu_i = \lambda_i = 0$ 使上式成立. 由此即知, $f(x)$ 的加边 Hessian 矩阵 H_∂ 有拟特征值 $\mu_i = 0$. 所以,曲面 f 沿 $x(s)$ 直线的任一点处的主法曲率 κ_f^i 中有 0 主法曲率. 因而直线 $x(s)$ 沿 ∇x 方向的曲面 f 的法截曲率 κ_n 就是 0 主法曲率,即知 $x(s)$ 直线同时就是曲率线. 充分性即证.

反之,设 $x(s)$ 是曲面 f 上的直线曲率线. 那么, ∇x 应是 H_∂ 矩阵的拟特征向量, 0 是 H_∂ 矩阵的拟特征根. 如果 0 是 H_∂ 的单重拟特征根,由(3.2.5.4)式等号右边行列式总能表示为

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & & & & & -\gamma_1 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & 0 & & & -\gamma_k \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \mu_{m-1} & -\gamma_{m-1} \\ -\gamma_1 & \cdots & -\gamma_k & \cdots & -\gamma_{m-1} & \nabla f^{\mathrm{T}} \nabla^2 f \nabla f \end{vmatrix} = 0$$

这里设 0 是 H_∂ 的(从小到大排序的)第 k 个拟特征值,从而总有

$$\gamma_k^2 \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m-1} \mu_i = 0 \quad \text{且}\ \mu_i \neq 0 \quad \text{当}\ i \neq k$$

故必有 $\gamma_k = 0 \Rightarrow 0$ 是 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ 的特征根 $\Rightarrow \nabla \boldsymbol{x}$ 是 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ 的 0 特征值对应的特征向量.其次,如果 0 是 H_∂ 矩阵的 $p > 1$ 重拟特征根,则由 H_∂ 的拟特征值与 H 的特征值间的隔离关系,即知 0 同时也必是 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ 的特征值,所以 $\nabla \boldsymbol{x}$ 也必是 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ 的特征向量.即证必要性.

以上推论说明曲面上存在的直线不一定都是曲面上的曲率线,对此可以由下例予以说明.

例 3.3.1.2 R^3 上的鞍面,可用以下方程表示

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

将它表成一般形式

$$f(\boldsymbol{x}) = z - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

有

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left(-\frac{2x}{a^2},\ \frac{2y}{b^2},\ 1\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在曲面上任一点的 Gauss 曲率可表成

$$\kappa = -\begin{vmatrix} -\frac{2}{a^2} & 0 & 0 & -\frac{2x}{a^2} \\ 0 & \frac{2}{b^2} & 0 & \frac{2y}{b^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & 1 & 0 \end{vmatrix} \Big/ \|\nabla f\|^4 = -\frac{\frac{4}{a^2 b^2}}{\left(1 + 4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)\right)^2} < 0$$

所以曲面上任一点处的主法曲率中总是一个正数另一个负数,没有 0.但鞍面上存在以下两组直(母)线族

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2}\left(c + \frac{t}{c}\right) \\ y = \frac{b}{2}\left(c - \frac{t}{c}\right) \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{a}{2}\left(dt + \frac{1}{d}\right) \\ y = \frac{b}{2}\left(dt - \frac{1}{d}\right) \\ z = t \end{cases} \quad (c,\ d \neq 0,\ t \text{ 为参数})$$

故这些直线均不可能是鞍面上的曲率线.

附带地,这里先给出以下两个定义:

定义 3.3.1.2 设 $\boldsymbol{x}(s)$是曲面 f 上的一条曲线,如果 $\boldsymbol{x}(s)$上的任一点处切方向决定的曲面 f 的法截曲率为 0,则称其为渐近线. ■

由定义即知曲面上的直线都是渐近线,反之不尽然.

定义 3.3.1.3 设 $\boldsymbol{x}(s)$是曲面 f 上的一条直线,如果 $\boldsymbol{x}(s)$同时又是曲面 f 的曲率线,则称其为线性方向线,否则,称其为渐近方向线. ■

线性方向(直)线、渐近方向(直)线都是渐近线.二者的区别在本节(附录一)中予以说明.一般的渐近线(曲线)则放在下一节予以说明.这里仅指出,曲面上的渐近线是曲面的凹面部分与凸面部分的分界线.这里所说"凹"、"凸"是由曲面上一点处的法截曲率符号给出的.

这里还应指出,由(3.3.1.16)式,κ_x 的表达式中含有曲面法截曲率 κ_n 因子,而 κ_n 与第二基本不变量有关,故 κ_x 不是曲面内蕴的几何量.

§3.3.2 曲面上曲线的测地标架——Darboux 标架

在 $m=3$ 的 R^3 空间上,对于一条位于曲面 f 上的曲线 $\boldsymbol{x}(s)$上的一点 $\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{x}(s^0)$ 处,可得到如图 3.3.2.1 所示的关系.其中 L_f 是曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切平面,$\nabla\boldsymbol{x}$ 是曲面上的有向曲线 $\boldsymbol{x}(s)$在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切向量.$\nabla\boldsymbol{x}$ 的方向代表了 $\boldsymbol{x}(s)$的正向,$\nabla\boldsymbol{x}$ 位于切平面 L_f 上,且 $\|\nabla\boldsymbol{x}\|=1$. $\boldsymbol{n}$ 是曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的单位法向量. $\boldsymbol{n}\perp\nabla\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{n}$ 与$\nabla\boldsymbol{x}$ 可决定 L_x 平面. $\nabla^2\boldsymbol{x}$ 是曲线 $\boldsymbol{x}(s)$在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的主法方向向量. $\nabla^2\boldsymbol{x}\perp\nabla\boldsymbol{x}$,$\nabla^2\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 可决定平面 L_π.这样在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处正交的 L_f、L_x、L_π 可构造原点在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的局部坐标平面.即将 L_f 理解为是 $\boldsymbol{x}_1$ 曲线的密切平面,L_π 理解为是法平面,L_x 理解为是从切平面.而 $\boldsymbol{x}_1$ 曲线的意义则是将曲线 $\boldsymbol{x}(s)$正投影(在图中是沿 $-\boldsymbol{n}$ 方向)到切平面 L_f 上,得到 $\boldsymbol{x}_1$ 表示的投影曲线. $\boldsymbol{x}_1$ 是平面曲线. $\boldsymbol{x}_1$ 曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的曲率是平面曲线上的一个(相对)曲率,以下用 κ_s 表示这个曲率. $\boldsymbol{x}_1$ 曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的法方向,应当就是$\nabla^2\boldsymbol{x}$ 在切平面上的投影得到的向量 $\boldsymbol{\beta}$ 所指向的方向. $\boldsymbol{\beta}$ 显然是与$\nabla\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{n}$ 正交的向量.

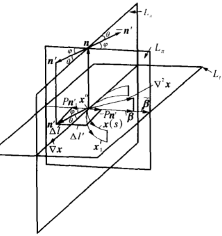


图 3.3.2.1

由曲线曲率的定义可知,

$$\kappa_s=\pm\|\boldsymbol{\beta}\| \qquad —(3.3.2.1)$$

取 $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|}$，且规定，若$(\nabla \boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{n})$刚好是右手系的关系(如图 3.3.2.1)，则取

$$\kappa_s = \|\boldsymbol{\beta}\| \qquad —(3.3.2.2)$$

否则，取 $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = -\frac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|}$，则$(\nabla \boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{n})$构成右手系的关系，并取

$$\kappa_s = -\|\boldsymbol{\beta}\| \qquad —(3.3.2.3)$$

以上关于 κ_s 取符号的说法，可以反过来规定：在曲面的 $\boldsymbol{x}^0$ 点处，构造右手系的局部坐标系$(\nabla \boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{n})$，则若$\nabla^2 \boldsymbol{x}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 的夹角为锐角 $\kappa_s > 0$，即投影曲线凹向 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 方向，反之，$\kappa_s < 0$，即 $\boldsymbol{x}_1$ 凸向 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 方向.

至于取得可构造右手系局部坐标的 $\boldsymbol{\beta}$ 方向向量，可从矢量积(与逆矩阵的行向量的关系)中得到

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \begin{vmatrix} x_1' & \boldsymbol{i} & n_1 \\ x_2' & \boldsymbol{j} & n_2 \\ x_3' & \boldsymbol{k} & n_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n_1 & x_1' & \boldsymbol{i} \\ n_2 & x_2' & \boldsymbol{j} \\ n_3 & x_3' & \boldsymbol{k} \end{vmatrix} = \boldsymbol{n} \times \nabla \boldsymbol{x}$$

其中 x_i'，n_i 分别是$\nabla \boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{n}$ 的分量，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是单位矩阵 I_3 的第 1，2，3 列向量. 由于$\nabla \boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{n}$ 均是单位向量且正交，故 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 也是归一化的. 这样构造的局部坐标系$(\nabla \boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{n})$显然等价于原点平移到 $\boldsymbol{x}^0$ 点并经适当旋转的标准坐标系$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$，其中 $\boldsymbol{e}_i$ 是 I_3 的第 i 列向量.

图 3.3.2.1 中

$$\boldsymbol{n}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s} \quad \boldsymbol{n}' \perp \boldsymbol{n} \qquad —(3.3.2.4)$$

$\boldsymbol{n}'$应平行于切平面 L_f. 在图中上方所标出的 $\boldsymbol{n}'$为作图方便，也将 $\boldsymbol{n}'$表示成 L_f 平面上的向量. $-\boldsymbol{n}'$是 $\boldsymbol{n}'$的反方向的向量. 之所以要标出$-\boldsymbol{n}'$，下文会看到其用意. $P\boldsymbol{n}'$则是 $\boldsymbol{n}'$(位于 L_f 平面上)在 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 轴上的投影.

$\boldsymbol{n}'$与$\nabla \boldsymbol{x}$ 的夹角 θ 显然含有反映了投影曲线 $\boldsymbol{x}_1$(从而也就间接地反映了曲面上的曲线 $\boldsymbol{x}(s)$)在 s 从 $s^0 \to s^0 + \Delta s$，$\Delta s > 0$ 时离开 L_x 平面的速率的意义. θ 角总取为锐角.

规定

$$\tau_s = \pm \|\boldsymbol{n}'\| \sin\theta \qquad —(3.3.2.5)$$

与(2.3.1.10)式相比较，τ_s 与挠率概念具有相似的几何意义. τ_s 的符号，由 $\boldsymbol{n}'$在 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 轴上的投影 $P\boldsymbol{n}'$的方向决定. 当 $P\boldsymbol{n}'$的方向与 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 的方向相反，τ_s 取正号，否则，

取负号[1]. 当曲线的定向改变,则因为(比如曲面 f 由参数函数表示),

$$\boldsymbol{n}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s}$$

则$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s}$将变成为$-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s}$,故 $\boldsymbol{n}'$将改变为$-\boldsymbol{n}'$,从而 τ_s 就将改变符号. 当曲面 f 的定向改变方向,则 $\boldsymbol{n}$ 将变成为$-\boldsymbol{n}$,故$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s}$也将改变符号,从而 τ_s 也将改变符号.

所以 τ_s 的符号与曲面 f 和曲线 $\boldsymbol{x}(s)$的定向均相关.

称(3.3.2.1)式规定的 κ_s 是曲面上的曲线 $\boldsymbol{x}(s)$在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的**测地曲率**,而称(3.3.2.5)式规定的 τ_s 为 $\boldsymbol{x}(s)$在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的**测地挠率**.

在局部坐标系($\nabla\boldsymbol{x}$, $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$, $\boldsymbol{n}$)上构造 **Darboux 标架**[2],

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\,\nabla\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} = 0 + a\tilde{\boldsymbol{\beta}} + b\boldsymbol{n} \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\beta}}}{\mathrm{d}s} = -a\,\nabla\boldsymbol{x} + 0 + c\boldsymbol{n} \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s} = -b\,\nabla\boldsymbol{x} - c\tilde{\boldsymbol{\beta}} + 0 \end{cases} \quad \cdots(3.3.2.6)$$

并由以下方式可决定上式中的 a, b, c 系数. 由

$$b = \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{d}\,\nabla\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2\boldsymbol{x} = \|\nabla^2\boldsymbol{x}\| \cdot \frac{\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}}{\|\nabla^2\boldsymbol{x}\|\ \|\boldsymbol{n}\|}$$

$$= \|\nabla^2\boldsymbol{x}\| \cdot \cos\angle(\boldsymbol{n},\ \nabla^2\boldsymbol{x})$$

故由 Meusnier 定理

$$b = \kappa_n$$

κ_n——$\boldsymbol{x}(s)$ 在 x^0 点处的法截曲率即曲面 f 沿$\nabla\boldsymbol{x}$ 切方向的法截曲率.

$$a = \tilde{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{d}\,\nabla\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} = \tilde{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2\boldsymbol{x} = \|\nabla^2\boldsymbol{x}\| \cdot \frac{\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\beta}}}{\|\nabla^2\boldsymbol{x}\|\ \|\tilde{\boldsymbol{\beta}}\|}$$

$$= \|\nabla^2\boldsymbol{x}\| \cos\angle(\tilde{\boldsymbol{\beta}},\ \nabla^2\boldsymbol{x})$$

显然

$$a = (\pm)\,\|\boldsymbol{\beta}\| \quad \boldsymbol{\beta} = \|\nabla^2\boldsymbol{x}\| \cos\angle(\tilde{\boldsymbol{\beta}},\ \nabla^2\boldsymbol{x})$$

---

〔1〕 参见《数学手册》,人民教育出版社,1979 年,第 409 页.

〔2〕 Darboux 标架是 Frenet 标架的变形. 见《曲线与曲面的微分几何》do Carmo, M. P., 见前注,第 190~191 页,题 14.

由(3.3.2.1)式

$$a = \kappa_s$$

$$c = -\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s} = \tilde{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{n}') = \pm \| -\boldsymbol{n}' \| \cdot \cos\angle(-\boldsymbol{n}', \tilde{\boldsymbol{\beta}})$$

由图 3.3.2.1 的关系可知(注意这里使用了$-\boldsymbol{n}'$向量)

$$\cos\angle(-\boldsymbol{n}', \tilde{\boldsymbol{\beta}}) = \cos\varphi = \sin\theta$$

$$\| -\boldsymbol{n}' \| \cdot \cos\varphi = \| -P\boldsymbol{n}' \| = \| P\boldsymbol{n}' \| = \| \boldsymbol{n}' \| \sin\theta$$

故

$$c = \pm \| \boldsymbol{n}' \| \sin\theta$$

在图 3.3.2.1 上，c 在绝对值上就是 Δl 线段的长度，也就是 $\| P\boldsymbol{n}' \|$ 的值. 但由于这里用的是$-P\boldsymbol{n}'$方向(此方向与 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 方向同向)上的度量，故 c 应为 $\Delta l'$线段的长度. 而 $\Delta l'$的长度显然就是$\boldsymbol{x}(s)$曲线偏离 L_x 平面速率的一个度量. 所以，这样给出 c 具有挠率的几何意义，并且，由于它的测度利用了曲线 $\boldsymbol{x}(s)$法向量 $\nabla^2\boldsymbol{x}$ 的投影向量$\boldsymbol{\beta}$，故，称它为测地挠率是很恰当的. 由(3.3.2.5)式，

$$c = \tau_s$$

再由$\nabla\boldsymbol{x}$，$\tilde{\boldsymbol{\beta}}$，$\boldsymbol{n}$ 的正交性和归一性，即知(3.3.2.6)式等式右边的系数矩阵的反对称性一定成立.

故有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,\nabla\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} = 0 + \kappa_s\tilde{\boldsymbol{\beta}} + \kappa_n\boldsymbol{n} \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\beta}}}{\mathrm{d}s} = -\kappa_s\,\nabla\boldsymbol{x} + 0 + \tau_s\boldsymbol{n} \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s} = -\kappa_n\,\nabla\boldsymbol{x} - \tau_s\tilde{\boldsymbol{\beta}} + 0 \end{cases} \qquad —(3.3.2.7)$$

以上关于测地曲率、测地挠率概念的导出以及 Darboux 标架的推导稍嫌繁琐，但这对于说明一些细节问题仍是有帮助的.

现在再将测地曲率、测地挠率的概念推广到 R^m 空间上去. 对于 R^m 空间上由一般曲面函数 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ 给出的一个正则曲面，$\boldsymbol{x}(s)$ 是该曲面上过 $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}(s^0)$ 点的曲线. 曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的法向量由$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$ 给出. $\nabla\boldsymbol{x}$，$\nabla^2\boldsymbol{x}$(在 $s = s^0$ 点处取值)分别是曲线 $\boldsymbol{x}(s)$的切向量和主法向量. 但现在不再能利用 R^m 空间上的矢量积 $\nabla f\times\nabla\boldsymbol{x}$ 来确定$\boldsymbol{\beta}$ 向量. 故$\boldsymbol{\beta}$向量只能以极值规划方式求得. 由于$\boldsymbol{\beta}$向量是$\nabla^2\boldsymbol{x}$ 在切平面上的正投影决定的方向向量，故它应当类似(2.3.2.5～15)式分析所给出的向量. 但这里的情况与那里的分析还是有些区别，所以，有必要写出较完整的

推导. 并且，为具有更广泛的适用性，以下的推导，将曲面 f 上的曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 看成是非弧长参数给出的函数.

与(2.3.2.5)式相似，构造以下 2 维平面

$$Oph = \{\boldsymbol{x}(p,h) \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s^0) + \nabla\tilde{\boldsymbol{x}}(s^0)p + \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u})h \quad p、h \in R \quad \boldsymbol{u} \in R^{m-1}\} \qquad \text{—(3.3.2.8)}$$

其中

$$\nabla\tilde{\boldsymbol{x}} = \frac{\nabla\boldsymbol{x}}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|} \quad \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u}) = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|} \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{u}) = \Pi_x(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R^{m-1}$$

Π_x 是 $\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0$ 的任一个基础解系矩阵，并在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 取值，$\Pi_x \in R^{m\times(m-1)}$.

由此可得 $\boldsymbol{x}(s)$ 在 Oph 平面上的投影曲线的参数形式

$$\begin{cases} p(s) = (\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}(s^0))^{\mathrm{T}}\,\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}(s^0) \\ h(s,\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}(s^0))^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u}) \end{cases} \qquad \text{—(3.3.2.9)}$$

可得到在 $s = s^0$ 处的关于 s 的一、二阶导数

$$\dot{p} = \nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\cdot\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}(s^0)\,|_{s=s^0} = \|\nabla\boldsymbol{x}(s^0)\|$$

$$\ddot{p} = \nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\,\nabla\boldsymbol{x}(s^0)\,|_{s=s^0} = \nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0)\,\nabla\boldsymbol{x}(s^0)$$

$$\dot{h} = \nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u})\,|_{s=s^0} = 0$$

$$\ddot{h} = \nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u})\,|_{s=s^0} = \nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0)\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u})$$

由曲率公式

$$\kappa_s = \frac{\dot{p}\ddot{h} - \ddot{p}\dot{h}}{(\dot{p}^2 + \dot{h}^2)^{3/2}} = \frac{\ddot{h}}{\dot{p}^2} = \frac{\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0)\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u})}{\|\nabla\boldsymbol{x}(s^0)\|^2} \qquad \text{—(3.3.2.10)}$$

现应要求 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u})$ 是与 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$ 正交的，故构造以下极值规划

$$\begin{cases} \text{极值} \quad \dfrac{\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s^0)\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u})}{\|\nabla\boldsymbol{x}(s^0)\|^2} \\ \text{s.t.} \quad \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u}) = 0 \end{cases} \qquad \text{—(3.3.2.11)}$$

构造 Lagrange 函数，并省略上式中的“$(\boldsymbol{x}^0)$”和“(s^0)”，

$$L = \frac{\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u})}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2} + \zeta\nabla f^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u}) \qquad \text{—(3.3.2.12)}$$

ζ 是乘子. 由极值条件

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$$

可得到极值处应满足

$$\left(\frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|^2}+\zeta \nabla f^{\mathrm{T}}\right)\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}=\mathbf{0}$$

由(2.3.2.11)式，又可得

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}\|}\left(\left(\frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|^2}+\zeta \nabla f^{\mathrm{T}}\right)\Pi_x-\left(\frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|^2}+\zeta \nabla f^{\mathrm{T}}\right)\tilde{\boldsymbol{\beta}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\Pi_x\right)=\mathbf{0}$$

其中 Π_x 仍是 $\nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$ 的任一个基础解系矩阵(见(2.3.2.1)式). 从上式可得到，

$$\Pi_x^{\mathrm{T}}\left(\frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|^2}+\zeta \nabla f\right)=\left(\frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|^2}+\zeta \nabla f^{\mathrm{T}}\right)\tilde{\boldsymbol{\beta}}\cdot \Pi_x^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\beta}}$$

记极值处的 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 是 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}^*=\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{u}^*)$，则将上式写成

$$\Pi_x^{\mathrm{T}}\left(\frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|^2}+\zeta \nabla f\right)=\left(\frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|^2}+\zeta \nabla f^{\mathrm{T}}\right)\tilde{\boldsymbol{\beta}}^*\cdot \Pi_x^{\mathrm{T}}\Pi_x\frac{\boldsymbol{u}^*}{\|\boldsymbol{\beta}^*\|}$$

再从上式用 $\Pi_x(\Pi_x^{\mathrm{T}}\Pi_x)^{-1}$ 左乘等式两边，得

$$P_x\cdot\left(\frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|^2}+\zeta \nabla f\right)=\left(\frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|^2}+\zeta \nabla f^{\mathrm{T}}\right)\tilde{\boldsymbol{\beta}}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{\beta}}^*$$

其中

$$P_x=\Pi_x(\Pi_x^{\mathrm{T}}\Pi_x)^{-1}\Pi_x^{\mathrm{T}} \qquad \text{—(2.3.2.20a)}$$

是正投影矩阵. 从而得到

$$\frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\beta}}^*}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|^2}\cdot\tilde{\boldsymbol{\beta}}^*=P_x\cdot\left(\frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|^2}+\zeta \nabla f\right) \qquad \text{—(3.3.2.13)}$$

用$\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 左乘上式等号两边，得

$$\frac{(\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\beta}}^*)^2}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|^2}=\frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P_x\nabla^2 \boldsymbol{x}}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|^2}+\zeta\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P_x\nabla f$$

故

$$\frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\beta}}^*}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|}=\pm\left(\frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P_x\nabla^2 \boldsymbol{x}}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|^2}+\zeta\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P_x\nabla f\right)^{1/2} \qquad \text{—(3.3.2.14)}$$

将(3.3.2.14)式代回到(3.3.2.13)式，并经整理，得

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^*}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|}=\pm\frac{P_x\cdot\left(\dfrac{\nabla^2 \boldsymbol{x}}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|^2}+\zeta\nabla f\right)}{\left(\dfrac{\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\nabla^2 \boldsymbol{x}}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|^2}+\zeta\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P_x\nabla f\right)^{1/2}} \qquad \text{—(3.3.2.15)}$$

(3.3.2.14～15)式在意义上有类似于(2.3.2.13～14)式的地方.

由正投影矩阵 P_x 是将 $\boldsymbol{x}^0$ 点处出发的向量沿$\nabla\boldsymbol{x}$ 方向投影到$\nabla\boldsymbol{x}$ 的正交补空间超平面(如图 3.3.2.1 中的 L_π 平面),即知

$$P_x \nabla\boldsymbol{x}^2 = \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} \qquad —(3.3.2.16)$$

这里的$\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}$ 由(2.2.2.16)式给出:

$$\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \nabla\tilde{\boldsymbol{x}} = \frac{\nabla^2 \boldsymbol{x} - a \cdot \nabla\boldsymbol{x}}{\| \nabla\boldsymbol{x} \|} \quad a = \frac{\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2 \boldsymbol{x}}{\| \nabla\boldsymbol{x} \|^2} \qquad —(2.2.2.16)$$

即$\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}$ 就是由$\nabla\boldsymbol{x}$、$\nabla^2\boldsymbol{x}$ 按 Schmidt 正交化方法得到的与$\nabla\boldsymbol{x}$ 正交的那个向量.

注意正投影矩阵 P 是对称的、幂等的,

$$P^2 = P^{\mathrm{T}} P = P$$

并注意到∇f 向量本身就是$\nabla\boldsymbol{x}$ 的正交补空间上的向量,故应有

$$P_x \nabla f = \nabla f$$

则从(3.3.2.15)式中可得到

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^*}{\| \nabla\boldsymbol{x} \|} = \pm \frac{\dfrac{P_x \nabla^2 \boldsymbol{x}}{\| \nabla\boldsymbol{x} \|^2} + \zeta \nabla f}{\left(\dfrac{\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} P_x^{\mathrm{T}} P_x \nabla^2 \boldsymbol{x}}{\| \nabla\boldsymbol{x} \|^2} + \zeta \nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} P_x^{\mathrm{T}} \nabla f \right)^{1/2}}$$

从而有

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^*}{\| \nabla\boldsymbol{x} \|} = \pm \frac{\dfrac{\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}}{\| \nabla\boldsymbol{x} \|^2} + \zeta \nabla f}{\left(\dfrac{\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}}{\| \nabla\boldsymbol{x} \|^2} + \zeta \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \nabla f \right)^{1/2}} \qquad —(3.3.2.17)$$

再由约束条件 $\nabla f^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{\beta}}^* = 0$,即得到

$$\zeta = - \frac{\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \nabla f}{\| \nabla\boldsymbol{x} \|^2 \nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f} \qquad —(3.3.2.18)$$

最终得到 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}^*$ 的表达式

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}^* = \pm \frac{\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} - (\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{N}}) \widetilde{\boldsymbol{N}}}{(\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} - (\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{N}})^2)^{1/2}} \quad \widetilde{\boldsymbol{N}} = \frac{\nabla f}{\| \nabla f \|}, \text{且} \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} \neq (\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{N}})^2$$

$$—(3.3.2.19)$$

由(3.3.2.10)式，得到测地曲率 κ_s 的表达式

$$\kappa_s = \pm \frac{1}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|^2} \cdot \frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} - (\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{N}})(\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{N}})}{(\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} - (\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{N}})^2)^{1/2}} \qquad \text{—(3.3.2.20)}$$

应注意(3.3.2.10)式中$\nabla^2 \boldsymbol{x}$、$\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}$ 符号在 $\boldsymbol{x}(s)$ 曲线参数的 s 参数不是弧长参数时的区别. 而当 s 是弧长参数时，$\|\nabla \boldsymbol{x}\| = 1$, $\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} = \nabla^2 \boldsymbol{x}$，则上式就简化为

$$\kappa_s = \pm (\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2 \boldsymbol{x} - (\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{N}})^2)^{1/2} \qquad \text{—(3.3.2.21)}$$

注意到当 s 是弧长参数时

$$\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2 \boldsymbol{x} = \kappa_x^2$$

$$(\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{N}})^2 = \left(\|\nabla^2 \boldsymbol{x}\| \cdot \frac{\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \widetilde{\boldsymbol{N}}}{\|\nabla^2 \boldsymbol{x}\| \ \|\widetilde{\boldsymbol{N}}\|} \right)^2 = \kappa_n^2$$

故(3.3.2.21)式表示在曲面 f 沿$\nabla \boldsymbol{x}$ 方向的法截曲率 κ_n、曲线 $\boldsymbol{x}(s)$的(绝对)曲率 κ_x 和其测地曲率 κ_s 之间，成立以下人所熟知的关系，

$$\kappa_x^2 = \kappa_s^2 + \kappa_n^2 \qquad \text{—(3.3.2.22)}$$

显然，$\widetilde{\boldsymbol{N}}$ 也可以用正则参数曲面片 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的一阶偏导数$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$的列向量由多重矢量积方式决定的单位法向量 $\boldsymbol{n}_r$ 代替.

由(3.3.1.16)式和(3.3.2.22)式，直接得到

$$\kappa_s = \pm \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} (\ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \Gamma \dot{\boldsymbol{u}}) \right\| = \pm \|D\boldsymbol{x}(s)\| \qquad \text{—(3.3.2.23)}$$

所以测地曲率 κ_s 是内蕴几何性质的度量. 它只与曲面的第一基不变量及其偏导数以及 $\dot{\boldsymbol{u}}$、$\ddot{\boldsymbol{u}}$ 导数有关.

式形式的 Darboux 标架. 设曲面 f 上的曲线 $\boldsymbol{x}(s)$(s 是弧长参数)上可得到

$$(\nabla \boldsymbol{x},\ \tilde{\boldsymbol{\beta}}_1,\ \tilde{\boldsymbol{\beta}}_2,\ \cdots,\ \tilde{\boldsymbol{\beta}}_{m-2},\ \boldsymbol{n}) \qquad —(3.3.2.25)$$

这样一组正交且归一的基向量组. 则 R^m 空间上的 Darboux 标架是指

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,\nabla \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} = 0 + \kappa_s^1 \tilde{\boldsymbol{\beta}}_1 + \kappa_s^2 \tilde{\boldsymbol{\beta}}_2 + \cdots + \kappa_s^{m-2} \tilde{\boldsymbol{\beta}}_{m-2} + \kappa_n \boldsymbol{n} \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1}{\mathrm{d}s} = -\kappa_s^1 \nabla \boldsymbol{x} + 0 + \sigma_{12} \tilde{\boldsymbol{\beta}}_2 + \cdots + \sigma_{1(m-2)} \tilde{\boldsymbol{\beta}}_{m-2} + \tau_s^1 \boldsymbol{n} \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2}{\mathrm{d}s} = -\kappa_s^2 \nabla \boldsymbol{x} - \sigma_{12} \tilde{\boldsymbol{\beta}}_1 + 0 + \cdots + \sigma_{2(m-2)} \tilde{\boldsymbol{\beta}}_{m-2} + \tau_s^2 \boldsymbol{n} \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s} = -\kappa_n \nabla \boldsymbol{x} - \tau_s^1 \tilde{\boldsymbol{\beta}}_1 - \tau_s^2 \tilde{\boldsymbol{\beta}}_2 - \cdots - \tau_s^{m-2} \tilde{\boldsymbol{\beta}}_2 + 0 \end{cases} \qquad —(3.3.2.26)$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 f 在曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 上的单位法向量. (3.3.2.25～26)式中的各 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_i$ 基向量组, 仍需由 $\boldsymbol{x}(s)$ 的各阶导数(向量)予以构造. κ_s^i、τ_s^i 符号的"i"不是幂指数而是上标.

但这里必须注意这样一点, 即向量组

$$\nabla \boldsymbol{x},\ \nabla^2 \boldsymbol{x},\ \cdots,\ \nabla^{m-1} \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{n}$$

其中$\nabla^d \boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{x}(s)$ 的第 d 阶导函数向量, 可能是(函数)相关的. 比如, 在 $\boldsymbol{x}(s)$ 曲线上, 若有

$$\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} \neq (\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n})^2 \qquad —(3.3.2.27)$$

成立, 则 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1$ 基向量即可由(3.3.2.19)式给出. 但若成立

$$\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}} = (\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n})^2 \Leftrightarrow \kappa_x = \pm \kappa_n$$

由下文可知, $\nabla^2 \boldsymbol{x}$ 就是与 $\boldsymbol{n}$ 共线的向量, 即$\nabla^2 \boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 是相关的(如 $\boldsymbol{x}(s)$ 是曲面 f 的测地线时). 这时, $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1$ 基向量就不再能利用(3.3.2.19)式构造出来.

因此, 关于 Darboux 标架(3.3.2.26)式成立的条件, 是要解决在$\nabla^d \boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 向量间不存在相关性以及存在相关性时, Darboux 标架的构造性问题.

以下即分析 Darboux 标架的存在性问题, 同时给出(3.3.2.25～26)式中各 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_i$ 基向量的构造方法.

构造沿曲面 f 上一点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的法方向 $\boldsymbol{n}$ 到曲面的切空间 L_f 的正投影矩阵 P_n

$$P_n = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \boldsymbol{I}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \qquad —(3.3.2.28)$$

在曲面函数由一般函数形式 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ 给出时，P_n 可由

$$P_n = \Lambda(\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda)^{-1}\Lambda^{\mathrm{T}} \quad —(3.3.2.29)$$

给出，其中 Λ 是 $\nabla f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0$ 的任一个基础解系矩阵. $P_n \in R^{m\times m}$.

用下式表示 $\boldsymbol{x}(s)$的第 $1 \sim m-1$ 阶导数向量构造的 Wronski 矩阵，

$$D_x(m-1) = [\nabla\boldsymbol{x},\ \nabla^2\boldsymbol{x},\ \cdots,\ \nabla^{m-1}\boldsymbol{x}] \quad —(3.3.2.30)$$

各$\nabla^d\boldsymbol{x}$ 导数均在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 点处取值. $D_x(m-1) \in R^{m\times(m-1)}$.

根据矩阵乘积的秩关系[1]，有

$$\operatorname{rank}P_nD_x(m-1) = \operatorname{rank}D_x(m-1) - \dim(R(D_x(m-1)) \cap N(P_n)) \quad —(3.3.2.31)$$

其中 dim(·)是指维数，R(·)是指矩阵的列空间(值域)，N(·)是指矩阵的零度空间.

现在，将曲面 f 上的点 $\boldsymbol{x}^0$ 规定为 $\boldsymbol{x}(s)$曲线上的点 $\boldsymbol{x}^0(s)$，这样，P_n、$D_x(m-1)$矩阵都应看成是以 s 为参数的函数矩阵. 所以，说"函数矩阵的秩"的意思，是将 s 看成一个给定值(常数)时，P_n、$D_x(m-1)$ 或 $P_nD_x(m-1)$ 这样的矩阵，就可看成是常数矩阵，并可分析它们的秩.

现在

$$N(P_n) = \{\boldsymbol{x} \mid P_n\boldsymbol{x} = 0 \quad \boldsymbol{x} \in R^m\} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \zeta\boldsymbol{n} \quad \zeta \neq 0 \quad \zeta \in R\}$$

故

$$\dim N(P_n) = 1$$

所以

$$0 \leqslant \dim(R(D_x(m-1)) \cap N(P_n)) \leqslant 1$$

因此

$$\operatorname{rank}(P_nD_x(m-1)) = \begin{cases} \operatorname{rank}D_x(m-1) & \text{当 } \dim(R(D_x(m-1)) \cap N(P_n)) = 0 \\ \operatorname{rank}D_x(m-1) - 1 & \text{当 } \dim(R(D_x(m-1)) \cap N(P_n)) = 1 \end{cases} \quad —(3.3.2.32)$$

并且，若

$$\dim(R(D_x(m-1)) \cap N(P_n)) = 1$$

---

[1] 引自《常用的矩阵理论和方法》，倪国熙编，上海科技出版社，1984 年，第 20 页，定理 2.3.

即表明 $\boldsymbol{n}$ 与 $D_x(m-1)$ 的列向量组线性相关. 但已知 $\boldsymbol{n}\perp\nabla\boldsymbol{x}$,故这即表明 $\boldsymbol{n}$ 与 $\nabla^2\boldsymbol{x}, \nabla^3\boldsymbol{x}, \cdots, \nabla^{m-1}\boldsymbol{x}$ 向量组线性相关[1].

推论 3.3.2.1 $\boldsymbol{x}(s)\in R^m$ 是曲面 f 上的曲线, $D_x(m-1)$ 是 $\boldsymbol{x}(s)$的第 1～$m-1$阶导数向量组成的 Wronski 矩阵,P_n 是曲面 f 沿在 $\boldsymbol{x}(s)$处的法方向 $\boldsymbol{n}$ 到曲面切超平面的正投影矩阵,当 Wronski 矩阵是列满秩的,即

$$\mathrm{rank}D_x(m-1)=m-1$$

则

$$m-1\leqslant \mathrm{rank}[P_nD_x(m-1),\ \boldsymbol{n}]\leqslant m \qquad (3.3.2.33)$$

■

由(3.3.2.32)式即知此结论. 因为已设 $\mathrm{rank}D_x(m-1)=m-1$, 当

$$\dim(R(D_x(m-1))\cap N(P_n))=0$$

即表明 $\boldsymbol{n}$ 与$\nabla\boldsymbol{x}, \nabla^2\boldsymbol{x}, \cdots, \nabla^{m-1}\boldsymbol{x}$ 线性无关,故 $\boldsymbol{n}$ 与 $P_nD_x(m-1)$ 也是线性无关的,此时应有 $\mathrm{rank}[P_nD_x(m-1),\ \boldsymbol{n}]=m$.

当

$$\dim(R(D_x(m-1))\cap N(P_n))=1$$

则 $\boldsymbol{n}$ 与$\nabla^2\boldsymbol{x}, \nabla^3\boldsymbol{x}, \cdots, \nabla^{m-1}\boldsymbol{x}$ 线性相关,此时

$$\mathrm{rank}(P_nD_x(m-1))=m-2$$

但现在 $P_nD_x(m-1)$ 全部在曲面 f 的切空间上,故 $P_nD_x(m-1)$ 与 $\boldsymbol{n}$ 必是线性无关的,所以,

$$\mathrm{rank}[P_nD_x(m-1),\ \boldsymbol{n}]=(m-2)+1=m-1$$

这就是以上推论.

推论 3.3.2.2 $\boldsymbol{x}(s)$是 R^m 空间上曲面 f 上的曲线,若 $\boldsymbol{x}(s)$的第 1～$m-1$ 阶导数向量$\nabla\boldsymbol{x}, \nabla^2\boldsymbol{x}, \cdots, \nabla^{m-1}\boldsymbol{x}$ 是线性无关的,则 $\boldsymbol{x}(s)$的 Daxboux 标架是存在的. ■

证明:由推论 3.3.2.1,构造正投影矩阵 P_n,矩阵$[P_nD_x(m-1),\ \boldsymbol{n}]$的秩或为 m 或为 $m-1$. 若其秩为 m,则对其列向量组作正交化和归一化处理(详见下文),所得到的 m 个向量就是$\nabla\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_1, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_2, \cdots, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_{m-2}, \boldsymbol{n}$ 向量组. 这即为 Darboux 标架的基向量组. 若矩阵$[P_nD_x(m-1),\ \boldsymbol{n}]$的秩为 $m-1$, 则

---

[1] 确切地说,这里的"线性相关"应理解成"函数相关". 但将 s 参数看成为给定的值,而将 $\boldsymbol{n}, \nabla\boldsymbol{x}\cdots$看成是常数向量,则函数相关在意义上等价于线性相关.

$$\text{rank}P_n D_x(m-1) = m-2$$

那么,从 $P_n D_x(m-1)$ 中可取出 $m-2$ 个线性无关的列向量,记它们是

$$\nabla^{i_1}\boldsymbol{x}_p,\ \nabla^{i_2}\boldsymbol{x}_p,\ \cdots,\ \nabla^{i_{m-2}}\boldsymbol{x}_p, \qquad \nabla\boldsymbol{x}^{i_j}_p = P_n\nabla\boldsymbol{x}^{i_j} \qquad —(3.3.2.34)$$

显然,向量组

$$\nabla^{i_1}\boldsymbol{x}_p,\ \nabla^{i_2}\boldsymbol{x}_p,\ \cdots,\ \nabla^{i_{m-2}}\boldsymbol{x}_p,\ \boldsymbol{n}$$

是 $m-1$ 个线性无关的向量组成的向量组. 则记

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \nabla^{i_1}\boldsymbol{x}_p \times \nabla^{i_2}\boldsymbol{x}_p \times \cdots \times \nabla^{i_{m-2}}\boldsymbol{x}_p \times \boldsymbol{n} \qquad —(3.3.2.35)$$

则

$$\hat{\boldsymbol{\beta}},\ \nabla^{i_1}\boldsymbol{x}_p, \nabla^{i_2}\boldsymbol{x}_p,\ \cdots,\ \nabla^{i_{m-2}}\boldsymbol{x}_p,\ \boldsymbol{n}$$

是线性无关的向量组,对这一向量组作适当的排序(见下文)并经 Schmidt 正交化、归一化处理,就可以得到 Darboux 标架的基向量组. 即证.

推论 3.3.2.2 只是给出了 Darboux 标架的存在性条件,至于 Darboux 标架的系数矩阵的各系数的符号选取,可按以下方式决定.

(a) 若 $\text{rank}[P_n D_x(m-1),\ \boldsymbol{n}] = m$,则按右手性的要求,决定取 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1$ 或 $-\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1$ 以保证行列式

$$|\ \nabla\boldsymbol{x},\ \pm\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1,\ \tilde{\boldsymbol{\beta}}_2,\ \cdots,\ \tilde{\boldsymbol{\beta}}_{m-2},\ \boldsymbol{n}\ | = 1 \qquad —(3.3.2.36)$$

(b) 若 $\text{rank}[P_n D_x(m-1),\ \boldsymbol{n}] = m-1$,则令(3.3.2.34)式中的 $i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_{m-2}$ 是一个递增排序,且 i_1 是所有可以选取出的 $m-2$ 个线性无关的$\nabla^{i_j}\boldsymbol{x}_p$ 向量组中的最小数所在的那个子序列,并记

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_{j-1} = \nabla^{i_j}\boldsymbol{x}_p & j = 1,\ \cdots,\ k \\ \boldsymbol{\beta}_k = \hat{\boldsymbol{\beta}} & (\hat{\boldsymbol{\beta}}\ \text{由(3.3.2.35)式给出}) \\ \boldsymbol{\beta}_j = \nabla^{i_j}\boldsymbol{x}_p & j = k+1,\ \cdots,\ m-2 \end{cases} \qquad —(3.3.2.37)$$

且其中的 k 由下式决定

$$k = \min\{j \mid i_{j+1} - i_j \geqslant 2 \quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-3\} \quad —(3.3.2.38)$$

对按(3.3.2.37)式编号的

$$\boldsymbol{\beta}_0,\ \boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_{m-2},\ \boldsymbol{n}$$

向量组,作 Schmidt 正交化和归一化处理,得到

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_0,\ \tilde{\boldsymbol{\beta}}_1,\ \tilde{\boldsymbol{\beta}}_2,\ \cdots,\ \tilde{\boldsymbol{\beta}}_{m-2},\ \boldsymbol{n}$$

基向量组，则选取 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1$ 或 $-\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1$，以保证行列式

$$|\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_0, \pm\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_2, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_{m-2}, \boldsymbol{n}| = 1 \qquad —(3.3.2.39)$$

由上述的(a)或(b)方式所得到的就是 Darboux 标架的基向量组. 这里可以指出，按(3.3.2.37～39)式得到的 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_i$ 向量组，其中的 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_0$ 向量一定是$\nabla\boldsymbol{x}$. 这是因为 $\nabla\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{n}$，故 $\nabla\boldsymbol{x}$ 定是与 $\boldsymbol{n}$ 无关的. 故可以以 $(\nabla\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$ 为 2 个起始向量，在 $P_nD_x(m-1)$ 的列向量组中选取其他的与$\nabla\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{n}$ 线性无关的极大线性无关向量组$\nabla^{i_j}\boldsymbol{x}_p$. 由此构造出来的(3.3.2.39)式中的 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_0$ 肯定就是$\nabla\boldsymbol{x}$ 向量. 因此可以统一地把构造 Darboux 标架的基向量组表示为 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_0, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_{m-2}, \boldsymbol{n}$，其中 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_0 = \nabla\boldsymbol{x}$ 且 $\|\nabla\boldsymbol{x}\| = 1$.

以下假设已得到一组基向量组，为简化叙述，不妨设 $\boldsymbol{n}$ 与各$\nabla^d\boldsymbol{x}$ 向量无关，从而，$\nabla\boldsymbol{x}, \nabla^2\boldsymbol{x}, \cdots, \nabla^{m-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}$ 就是可构造 Darboux 标架的基向量组. 考虑对这一基向量组作满足 Darboux 标架要求的投影及正交化、归一化处理.

在实际应用中，不需要构造正投影矩阵 P_n，而可以由以下方式得到各$\nabla^d\boldsymbol{x}$ 向量在曲面 f 的切空间 L_f 上的投影向量$\nabla^d\boldsymbol{x}_p$，

$$\nabla^d\boldsymbol{x}_p = \nabla^d\boldsymbol{x} - (\nabla^d\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n} \quad d = 2, 3, \cdots, m-1 \qquad —(3.3.2.39a)$$

因为 $\nabla\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{n}$ 故$\nabla\boldsymbol{x}_p = \nabla\boldsymbol{x}$. 由此得到了以下基向量组

$$\nabla\boldsymbol{x}_p, \nabla^2\boldsymbol{x}_p, \cdots, \nabla^{m-1}\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{n}$$

对这一基向量组中的 $\nabla^d\boldsymbol{x}_p$, $d = 1, 2, \cdots, m-1$ 向量，用 Schmidt 正交化、归一化处理，即令

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_0 = \nabla\boldsymbol{x}_p = \nabla\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{\beta}_i = \nabla^{i+1}\boldsymbol{x}_p - \sum\limits_{j=0}^{i-1}\dfrac{\nabla^{i+1}\boldsymbol{x}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_j}{\boldsymbol{\beta}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_j}\boldsymbol{\beta}_j \quad i = 1, 2, \cdots, m-2\\ \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_k = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_k}{\|\boldsymbol{\beta}_k\|} \quad k = 0, 1, 2, \cdots, m-2\end{cases} \qquad —(3.3.2.39b)$$

最终即得到 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_0, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_{m-2}, \boldsymbol{n}$ 基向量组. 这就是 Darboux 标架所要求的基向量组.

设上述的 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_0, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_{m-2}, \boldsymbol{n}$ 已经确定. 则记

$$\widetilde{D}_p = [\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_0, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_{m-2}, \boldsymbol{n}]$$

并且设已选定$\pm\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1$，使 $|\widetilde{D}_p| = 1$. 那么，易知类似(2.3.1.28)式，由

$$\widetilde{D}_p' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\widetilde{D}_p$$

即得

$$\frac{1}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|}(\widetilde{D}_p')^{\mathrm{T}}\widetilde{D}_p=-\frac{1}{\|\nabla \boldsymbol{x}\|}\widetilde{D}_p^{\mathrm{T}}\widetilde{D}_p'$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & \kappa_s & 0 & \cdots & 0 & \kappa_n \\ -\kappa_s & 0 & \sigma_{12} & \cdots & 0 & \tau_s^1 \\ 0 & -\sigma_{12} & 0 & \cdots & 0 & \tau_s^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\kappa_n & -\tau_s^1 & -\tau_s^2 & \cdots & -\tau_2^{m-2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{—(3.3.2.40)}$$

便得到 Darboux 标架的系数矩阵. 注意(3.3.2.40)式中最右端的系数矩阵的前$(m-1)\times(m-1)$阶主子矩阵，由以上关于$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_i$向量组的构造方式即知，其形式上一定是类似 Frenet 标架的系数矩阵，即次对角线元素不恒为 0 且负对称. 至于(3.3.2.40)式中的σ_{ij}系数，是在R^m空间维数$m>3$时才会出现的. 可以称σ_{ij}系数为曲面f上曲线$\boldsymbol{x}(s)$的**测地交叉挠率**[1].

由此可得到以下关系(设$\boldsymbol{x}(s)$曲线函数中的s是弧长参数)

$$\begin{cases} \tau_s^i=-\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_i\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_i}{\mathrm{d}s} & i=1,2,\cdots,m-2 \\ \sigma_{ij}=\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_j^{\mathrm{T}}\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_i}{\mathrm{d}s}=-\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_i^{\mathrm{T}}\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_j}{\mathrm{d}s} & \begin{cases} i=1,2,\cdots,m-2 \\ j=i+1 \end{cases} \\ \kappa_s=\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1^{\mathrm{T}}\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}=-\nabla\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1}{\mathrm{d}s} \end{cases} \quad \text{—(3.3.2.41)}$$

注意，现在(3.3.2.41)式中，$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1$的确定在$\nabla^2\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}$与$\boldsymbol{n}$线性相关时，可由以上的(b)所述的方式，从多重矢量积中得到. 这种情形，所对应的实则就是曲面f上的曲线$\boldsymbol{x}(s)$是曲面测地线的情形. 对这一情形，可给出稍详细的说明.

推论 3.3.2.3　$\boldsymbol{x}(s)$是R^m空间上的曲面f的(非直线的)测地线的充要条件是$\nabla^2\boldsymbol{x}(s)$导数向量与曲面$f$在$\boldsymbol{x}(s)$处的法向量$\boldsymbol{n}$函数相关的. 这里，$s$是弧长参数. ■

这里"函数相关"的意思是指存在非 0 的因子λ(可能与s有关)，使$\nabla^2\boldsymbol{x}=\lambda\cdot\boldsymbol{n}$. 即$\nabla^2\boldsymbol{x}$是$\boldsymbol{n}$的共线向量.

证明： 若$\nabla^2\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{n}$线性相关，则有非 0 因子λ，使

$$\nabla^2\boldsymbol{x}=\lambda\cdot\boldsymbol{n}$$

则由(3.3.2.21)式，知，

---

[1] 其几何意义尚有待说明.

$$\kappa_s = \pm (\lambda^2 - \lambda^2)^{1/2} \equiv 0$$

故 $\boldsymbol{x}(s)$ 是曲面 f 的测地线. 反之,若 $\boldsymbol{x}(s)$ 是曲面 f 的测地线,则应有

$$(\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2 \boldsymbol{x} - (\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n})^2)^{1/2} = 0$$

而

$$(\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2 \boldsymbol{x} - (\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n})^2)^{1/2} = \| \nabla^2 \boldsymbol{x} - (\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{n} \|$$

故由 Euclid 范数的性质即知

$$\| \nabla^2 \boldsymbol{x} - (\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{n} \| = 0 \Rightarrow \nabla^2 \boldsymbol{x} - (\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$$
$$\Rightarrow \nabla^2 \boldsymbol{x} = \lambda \cdot \boldsymbol{n} \qquad \lambda = \nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}$$

即证.

由此即知,当 $\boldsymbol{x}(s)$ 是曲面上的(非直线)测地线时,就有

$$\nabla^2 \boldsymbol{x} = \lambda \cdot \boldsymbol{n} \quad \lambda \neq 0$$

从而

$$P_n \nabla^2 \boldsymbol{x} \equiv 0$$

并可有

$$\operatorname{rank} P_n D_x(m-1) = m-2$$
$$\operatorname{rank}[P_n D_x(m-1), \boldsymbol{n}] = m-1$$

这时,就不能利用(3.3.2.19)式来决定 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1$. 从而只能利用上述(b)的方式,用多重矢量积算法来确定 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1$,并以此确定 Darboux 标架.

可以恰当称 Darboux 标架是曲面 f 上的曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 的测地的 Frenet 标架.

当曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 的 $1 \sim m-1$ 阶导数向量矩阵 $D_x(m-1)$ 的秩 $< m-1$ 时,(3.3.2.40)式那样的 Darboux 标架是无法构造的. 但类似 Frenet 标架的情形,这时可以构造 k 维(或 $k-1$ 维)的测地标架. 只是这一标架上的系数矩阵只能是非负的,即是上文所说的“自然”的测地标架. 它依然可通过选取 $[P_n D_x(m-1), \boldsymbol{n}]$ 的极大线性无关列向量组的正交化和归一化得到.

这里附带地还应指出,当 $\kappa_s \neq 0$,由(3.3.2.19)式给出的 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\cdot}}$ 向量,与 $P_n D_x(m-1)$ 的列向量组经 Schmidt 正交化得到的 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_i$ 向量组中的 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1$ 向量完全一致.

这样,由(3.3.2.36)式或(3.3.2.39)式,就已经解决了(3.3.2.19)式中的符号选取问题. 而由(3.3.2.41)式,则可以给出全部的 τ_s^i,σ_{ij} 的符号.

以下给出 τ_s^i 的投影性质的表达式,记 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s} = \nabla \boldsymbol{n}$,$\dfrac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_i}{\mathrm{d}s} = \nabla \tilde{\boldsymbol{\beta}}_i$. 由(3.3.2.41)式

的第1式

$$\tau_s^i = -\tilde{\boldsymbol{\beta}}_i \nabla \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}} \nabla \tilde{\boldsymbol{\beta}}_i$$

由向量内积的几何意义，τ_s^i 是$\nabla \boldsymbol{n}$ 向量在$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_i$ 向量给出方向上的投影. 注意，$\nabla \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{n}$，故$\nabla \boldsymbol{n}$ 向量与$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_i$ 均是曲面 f 在 $\boldsymbol{x}(s)$处的切超平面上的方向向量. 因此，$|\tau_s^i|$是$\nabla \boldsymbol{n}$ 沿$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_i$ 的正交方向到$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_i$ 上的投影径长. 因此构造切超平面上到$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_i$ 的正投影矩阵 P_i，则 P_i 应是以下齐次方程组

$$\begin{cases} \nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} = 0 \\ \tilde{\boldsymbol{\beta}}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, m-2, j \neq i \end{cases} \qquad \text{—(3.3.2.42)}$$

的基础解系矩阵 Π_i 构造的正投影矩阵 P_i，

$$P_i = \Pi_i (\Pi_i^{\mathrm{T}} \Pi_i)^{-1} \Pi_i^{\mathrm{T}} \qquad \text{—(3.3.2.43)}$$

可得

$$|\tau_s^i| = \| P_i \nabla \boldsymbol{n} \| \qquad \text{—(3.3.2.44)}$$

(3.3.2.44)式，在 R^3 空间上的表示，可见图3.3.2.1所示. 那里的 $P\boldsymbol{n}'$向量就是(3.3.2.44)式中的 $P_i \nabla \boldsymbol{n}$ 向量.

由 P_i 矩阵的对称幂等性质，(3.3.2.44)式又可表成

$$\tau_s^i = \pm (\nabla \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}} P_i \nabla \boldsymbol{n})^{1/2} \quad i = 1, 2, \cdots, m-2 \qquad \text{—(3.3.2.45)}$$

τ_s^i的符号，当$-P_i \nabla \boldsymbol{n}$ 的方向与$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_i$ 相同时取+号否则取-号. 其几何意义已在图3.3.2.1的说明中给出. 由(3.3.2.45)式即可见，τ_s^i 依赖于$\nabla \boldsymbol{n}$ 向量，P_i 矩阵也依赖于 $\boldsymbol{n}$ 向量，故 τ_s^i不会是内蕴几何性质的度量.

类似地可知，测地交叉挠率 σ_{ij} 也可表示为

$$\sigma_{ij} = \pm (\nabla \tilde{\boldsymbol{\beta}}_j^{\mathrm{T}} P_i \nabla \tilde{\boldsymbol{\beta}}_j)^{1/2} \quad i = 1, 2, \cdots, m-2 \quad j = i+1 \qquad \text{—(3.3.2.46)}$$

其意义与符号的取法均类似于(3.3.2.45)式. 不再赘述.

应当指出，当曲面 f 上的曲线 $\boldsymbol{x}(s)$的参数 s 不是弧长参数时，(3.3.2.45～46)式等号右边应再乘上$\|\nabla \boldsymbol{x}\|^{-1}$因子.

(3.3.2.45)式也可以看成是以下条件极值规划的解.

$$\begin{cases} \text{极值} \quad \nabla \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta} \\ \text{s. t.} \begin{cases} \nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta} = 0 \\ \tilde{\boldsymbol{\beta}}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta} = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, m-2 \quad j \neq i \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta} = 1 \end{cases} \end{cases} \qquad \text{—(3.3.2.47)}$$

构造 L—函数

$$L=\nabla\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\mu(1-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})+\zeta_0\,\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m-2}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\zeta}_j$$

并记 $\boldsymbol{\beta}=\Pi_i\boldsymbol{u}\quad \Pi_i\in R^{m\times 2}\quad \boldsymbol{u}\in R^2$. 则$\dfrac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial\boldsymbol{u}}=\Pi_i$，并由极值条件

$$\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{u}}=(\nabla\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}-2\mu\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\zeta_0\,\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m-2}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_j^{\mathrm{T}}\zeta_j)\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial\boldsymbol{u}}=\mathbf{0}$$

可得

$$\nabla\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\Pi_i=2\mu\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\Pi_i$$

或写成

$$\Pi_i^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{n}=2\mu\Pi_i^{\mathrm{T}}\Pi_i\boldsymbol{u}$$

从而解出

$$\begin{cases}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_i=\pm\dfrac{P_i\,\nabla\boldsymbol{n}}{(\nabla\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}P_i\,\nabla\boldsymbol{n})^{1/2}}\\ \tau_s^i=\pm(\nabla\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}P_i\,\nabla\boldsymbol{n})^{1/2}\end{cases}\qquad —(3.3.2.48)$$

当然，(3.3.2.48)式要依赖于 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_j$ 向量组事先已给出的条件，故它不具有构造性的意义，而只在于说明 τ_s^i 仍具有极值意义(σ_{ij} 也一样). 故 Darboux 标架也是一个极值意义上的标架.

在 Darboux 标架(3.3.2.40)式的最后一式中，可得到

$$\nabla\boldsymbol{n}=-\kappa_n\,\nabla\boldsymbol{x}-\sum_{j=1}^{m-2}\tau_s^j\tilde{\boldsymbol{\beta}}_j\qquad —(3.3.2.49)$$

从而有

$$\nabla\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{n}=\kappa_n^2+(\tau_s^1)^2+(\tau_s^2)^2+\cdots+(\tau_s^{m-2})^2\qquad —(3.3.2.50)$$

由定义

$$\nabla\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{n}=\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\,\frac{\partial\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{u}}\,\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial\boldsymbol{u}}\dot{\boldsymbol{u}}$$

而

$$\frac{\partial\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{u}}\,\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial\boldsymbol{u}}=\mathrm{I\!I\!I}\qquad —(3.3.2.51)$$

其中$\mathrm{I\!I\!I}$ 即为曲面 f 的第三基本二次型矩阵. 故

$$\nabla \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{n} = \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \mathbb{III}\ \dot{\boldsymbol{u}} \qquad \text{—(3.3.2.52)}$$

由 Weingarten 映射的定义

$$-\frac{\partial \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} = W \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \qquad W = \mathbb{II}\ \mathbb{I}^{-1}$$

故有以下关系，

$$\mathbb{III} = W \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} W^{\mathrm{T}} = \mathbb{II}\ \mathbb{I}^{-1}\ \mathbb{I}\ \mathbb{I}^{-1}\mathbb{II} = \mathbb{II}\ \mathbb{I}^{-1}\mathbb{II} = W\ \mathbb{II} \qquad \text{—(3.3.2.53)}$$

第三基本二次型矩阵可由第一、二基本二次型矩阵构造出来.

由(3.2.5.11)式，利用那里定义的变换矩阵 Q_t（由拟特征向量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 构造），对 $\mathbb{III}$ 矩阵作变换，并将 $\mathbb{III}$ 看作给定点处的数值矩阵，

$$Q_t^{\mathrm{T}}\ \mathbb{III}\ Q_t = \begin{bmatrix} (\kappa_f^1)^2 & & & \\ & (\kappa_f^2)^2 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & (\kappa_f^{m-1})^2 \end{bmatrix} \qquad \text{—(3.3.2.54)}$$

其中 κ_f^i 是曲面 f 的主法曲率，故 $\mathbb{III}$ 矩阵是（半）正定矩阵.

(3.3.2.54)式可由以下方式推知. 将 $\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}}$ 也看作给定点处的数值矩阵，

$$Q_t^{\mathrm{T}}\ \mathbb{III}\ Q_t = Q_t^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} Q_t$$

在一般曲面函数 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ 上，$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$，而 $\boldsymbol{x}$ 又可由 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 参数形式表示.

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{1}{\|\nabla f\|} \nabla^2 f \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} - \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|^3} \cdot \left(\nabla f^{\mathrm{T}} \nabla^2 f \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{1}{\|\nabla f\|^2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \nabla^2 f \nabla^2 f \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\right) - \frac{1}{\|\nabla f\|^4}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \nabla^2 f \nabla f\right)\left(\nabla f^{\mathrm{T}} \nabla^2 f \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)$$

以及(3.2.5.10)式，$\Lambda \Leftrightarrow \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$，$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} Q_t = Q$. Q 是(3.2.5.1)式给出的加边 Hessian 矩阵的拟特征向量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 构造的 $m-1$ 阶谱分解矩阵. 从而有

$$Q_t^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} Q_t = \frac{1}{\|\nabla f\|^2}(Q^{\mathrm{T}} \nabla^2 f \nabla^2 f Q) - \frac{1}{\|\nabla f\|^4}(Q^{\mathrm{T}} \nabla^2 f \nabla f)(\nabla f^{\mathrm{T}} \nabla^2 f Q)$$

并易知

$$Q^{\mathrm{T}}\nabla^2 f=\begin{bmatrix}\mu_1\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1^{\mathrm{T}}-\gamma_1\nabla f^{\mathrm{T}}\\ \mu_2\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2^{\mathrm{T}}-\gamma_2\nabla f^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \mu_{m-1}\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{m-1}^{\mathrm{T}}-\gamma_{m-1}\nabla f^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\quad Q^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\,\nabla f=-\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_{m-1}\end{bmatrix}\cdot\|\nabla f\|^2$$

其中 μ_i 是拟特征值，γ_i 是 L—乘子(辅助参量).

所以，记 $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{m-1})^{\mathrm{T}}$，有

$$Q_t\frac{\partial\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{u}}\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial\boldsymbol{u}}Q_t=\frac{1}{\|\nabla f\|^2}\begin{bmatrix}\mu_1^2 & & & 0\\ & \mu_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_{m-1}^2\end{bmatrix}+\boldsymbol{\gamma\gamma}^{\mathrm{T}}\frac{\|\nabla f\|^2}{\|\nabla f\|^2}-\boldsymbol{\gamma\gamma}^{\mathrm{T}}\frac{\|\nabla f\|^4}{\|\nabla f\|^4}$$

再由

$$\kappa_f^i=-\frac{\mu_i}{\|\nabla f\|}$$

即有(3.3.2.54)式.

若将$\mathbb{I}\!\mathbb{I}\!\mathbb{I}$看成是函数矩阵，并由(3.2.5.19)式的参数变换矩阵$\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{z}}$给予变换，那么，

$$\mathbb{I}\!\mathbb{I}\!\mathbb{I}(\boldsymbol{z})=\frac{\partial\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{z}}\mathbb{I}\!\mathbb{I}\!\mathbb{I}(\boldsymbol{u})\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{z}}=\mathrm{diag}(c_{11}^2/g_{11},\ c_{22}^2/g_{22},\ \cdots,\ c_{(m-1)(m-1)}^2/g_{(m-1)(m-1)})$$

—(3.3.2.55)

对于参数曲面函数的情形，直接利用(3.2.5.25)式和(3.3.2.53)式即可得到(3.3.2.54)式.

在 $m=3$ 的情形，直接展开便可知有以下关系

$$\mathbb{I}\!\mathbb{I}\!\mathbb{I}=2h\mathbb{I}\!\mathbb{I}-\kappa\boldsymbol{I}\qquad\text{—(3.3.2.56)}$$

其中 h，κ 分别为平均曲率、Gauss 曲率，并且还可以导出

$$\nabla\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{n}=\kappa_n^2+(\tau_s^1)^2$$

简记 $\tau_s^1=\tau_s$，再由(3.3.2.52)式

$$\nabla\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{n}=\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\mathbb{I}\!\mathbb{I}\!\mathbb{I}\dot{\boldsymbol{u}}=2h\cdot\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\mathbb{I}\!\mathbb{I}\dot{\boldsymbol{u}}-\kappa\cdot\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{u}}$$

且在曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 上，应有 $\|\nabla\boldsymbol{x}\|=1\Rightarrow\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{u}}=1$，

$$\kappa_n=\frac{\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\mathbb{I}\!\mathbb{I}\dot{\boldsymbol{u}}}{\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{u}}}=\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\mathbb{I}\!\mathbb{I}\dot{\boldsymbol{u}}$$

从而有

$$\kappa_n^2 + \tau_s^2 - 2h\kappa_n + \kappa = 0 \qquad —(3.3.2.57)$$

其中 κ_n 是曲面 f 沿 $\boldsymbol{x}(s)$的切方向的法截曲率.

于是由曲率线的定义,若 $\boldsymbol{x}(s)$是曲面 f 的曲率线,则

$$\kappa_n \equiv \kappa_i \quad i = 1 \text{ or } 2$$

κ_i 是主法曲率,以及 $h = (\kappa_1 + \kappa_2)/2 \quad \kappa = \kappa_1\kappa_2$,从(3.3.2.57)式便可得到在曲率线上恒有 $\tau_s = 0$.

这即是 R^3 空间上曲面上的曲率线的测地挠率恒为 0 的结论. 但在 $m > 3$ 时,(3.3.2.56~57)式一般不能成立. 但可以通过以下分析来推知在曲率线上仍有 $\tau_s^i = 0$ 的结论. 即直接由 Rodriques 定理便得到在曲面的曲率线上,成立

$$\nabla\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{n} = \kappa_i^2\,\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla\boldsymbol{x} = \kappa_i^2 \qquad —(3.3.2.58)$$

再由(3.3.2.50)式,得

$$\kappa_i^2 + (\tau_s^1)^2 + \cdots + (\tau_s^{m-2})^2 = \kappa_i^2$$

便知

$$(\tau_s^1)^2 + \cdots + (\tau_s^{m-2})^2 = 0 \Rightarrow \tau_s^i = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m-2 \qquad —(3.3.2.59)$$

所以,可以用 $\tau_s^i = 0 \quad i = 1, \cdots, m-2$ 作为曲率线方程的一个条件. 这一条件由(3.3.2.44)式,知在非直线的曲率线上,必要成立

$$\nabla\boldsymbol{n} \in \bigcap_{i=1}^{m-2} \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = P_i\boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0 \quad \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{y} \in R^m\}$$

由正投影矩阵 P_i 的构造,

$$\bigcap_{i=1}^{m-2} \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = P_i\boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0 \quad \boldsymbol{y} \in R^m \quad \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}\}$$
$$= \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = c \cdot \nabla\boldsymbol{x} \quad c \in R \quad c \neq 0\}$$

即

$$\nabla\boldsymbol{n} \in \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = c \cdot \nabla\boldsymbol{x} \quad c \in R \quad c \neq 0\}$$

因此,在曲率线上总要成立

$$\nabla\boldsymbol{n} \,/\!/\, \nabla\boldsymbol{x} \qquad —(3.3.2.60)$$

从而$\nabla\boldsymbol{n}$ 是与$\nabla\boldsymbol{x}$ 平行的向量场.

由于曲率线又是测地线,故曲率线也必满足(3.3.2.24)式给出的微分方程,可以推论 3.3.2.2 再验证这一点.

由推论 3.3.2.2,应有曲率线微分方程

$$\nabla^2\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{n} \qquad —(3.3.2.61)$$

再由(3.3.1.8)式，上式应可写成

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\ddot{\boldsymbol{u}}+\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\ \nabla^2 x_1\dot{\boldsymbol{u}}\\ \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\ \nabla^2 x_2\dot{\boldsymbol{u}}\\ \vdots\\ \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\ \nabla^2 x_m\dot{\boldsymbol{u}}\end{bmatrix}=\lambda\cdot\boldsymbol{n}\Rightarrow\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\ddot{\boldsymbol{u}}+\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\ \nabla^2 x_1\dot{\boldsymbol{u}}\\ \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\ \nabla^2 x_2\dot{\boldsymbol{u}}\\ \vdots\\ \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\ \nabla^2 x_m\dot{\boldsymbol{u}}\end{bmatrix}=\lambda\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{n}=0$$

但这即表示在曲率线上成立(3.3.2.24)式.

再由曲率线上

$$\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\ \nabla^2\boldsymbol{x}=\lambda=\kappa_i$$

以及(3.3.1.14)式，可知在曲率线上

$$\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\ \mathit{II}\ \dot{\boldsymbol{u}}=\kappa_i$$

所以，曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 上的曲率线应是以下方程组的解

$$\begin{cases}\ddot{\boldsymbol{u}}+\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\Gamma\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{0}\\ \nabla\boldsymbol{n}\ /\!/\ \nabla\boldsymbol{x}\ \text{or}\ \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\ \mathit{II}\ \dot{\boldsymbol{u}}=\kappa_i\end{cases}\qquad —(3.3.2.62)$$

与(3.3.2.24)式相比较，上式增加了一个一阶条件.

在此还有必要指出，曲面上曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 上的测地挠率 τ_s^i 的几何意义不仅包含有 $\boldsymbol{x}(s)$ 在切超平面上的投影曲线离开 L_x 平面(参见图 3.3.2.1)的速率这部分内涵，同时，由于现在的 L_x 平面由($\nabla\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{n}$)基向量所张成，故，测地挠率 τ_s^i 还必将含有 $\boldsymbol{n}$ 法方向向量绕$\nabla\boldsymbol{x}$ 转动所产生的 $\boldsymbol{x}(s)$ 的投影曲线偏离 L_x 平面的速率这部分内涵.

这个问题可以利用曲面上非曲率线的直线的测地挠率不等于 0 的性质加以说明. 由例 3.3.1.2 已知鞍面上的直(母)线不是曲率线. 下证直(母)线的测地挠率 $\tau_s\neq 0$.

续例 3.3.1.2 在图 3.3.2.2 中，c 是鞍面上的一条直(母)线 $\boldsymbol{x}(t)$，在 c 上的 $\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{x}(t^0)$ 处，由基向量($\nabla\boldsymbol{x}$, $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1$, $\boldsymbol{n}$)构成右手系局部标架. $\boldsymbol{n}_0$ 是 $\boldsymbol{x}^0$ 处鞍面的单位法向量. 当直(母)线方程的参数 $t_0\rightarrow t_0+\Delta t$，$\Delta t>0$，有 c 上的对应点

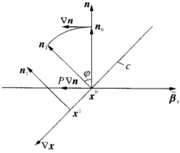


图 3.3.2.2

$$\boldsymbol{x}^1=\boldsymbol{x}(t_0+\Delta t)$$

鞍面在 $\boldsymbol{x}^1$ 处的单位法向量设为 $\boldsymbol{n}_1$. 将 $\boldsymbol{n}_1$ 平移到 $\boldsymbol{x}^0$ 处. 则 $\boldsymbol{n}_1$ 一定是($\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{n}$)平面上的向量. 由于 $\boldsymbol{n}_1$ 相对于 $\boldsymbol{n}_0$ 有 φ 角所示的转动，

故,当 $\Delta t \to 0$ $\varphi \to 0$,$\nabla \boldsymbol{n}$ 应是$(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1, \boldsymbol{n})$平面上的单位圆(弧)在 $\boldsymbol{n}_0$ 点处切方向上的向量. 所以,$\nabla \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{n}$,且$\nabla \boldsymbol{n} \perp \nabla \boldsymbol{x}$. 由此即知$P\,\nabla \boldsymbol{n}$投影,就是$\nabla \boldsymbol{n}$ 平移到$\boldsymbol{x}^0$ 点. $\|\nabla \boldsymbol{n}\|$ 由 $\Delta t \to 0$ 时的 $\boldsymbol{n}_1$ 相对于 $\boldsymbol{n}_0$ 的转动速率决定. 由此即知 $\|P\,\nabla \boldsymbol{n}\| = \|\nabla \boldsymbol{n}\|$ 在单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 随 t 的变动而转动时不会为 0. 故直(母)线的 $\tau_s \neq 0$.

事实上,以

$$c: \begin{cases} x = \dfrac{a}{2}\left(c + \dfrac{t}{c}\right) \\ y = \dfrac{b}{2}\left(c - \dfrac{t}{c}\right) \\ z = t \end{cases}$$

为例. 在 c 直线上

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \nabla \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{a}{2c} \\ -\dfrac{b}{2c} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{n} = \frac{1}{\|\nabla f\|}\begin{bmatrix} -\dfrac{2x}{a^2} \\ \dfrac{2y}{b^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}t} = \nabla \boldsymbol{n} = \frac{1}{\|\nabla f\|}\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{ac} \\ -\dfrac{1}{bc} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\,\frac{\boldsymbol{n}}{\|\nabla f\|^2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla f^{\mathrm{T}}\,\nabla f$$

故

$$\nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\nabla \boldsymbol{n} = 0 \Rightarrow \nabla \boldsymbol{n} \perp \nabla \boldsymbol{x}$$

且 $\nabla \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{n}$ 显然,$\nabla \boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$,故 $|\tau_s| = \|\nabla \boldsymbol{n}\| \neq 0$.

由于 c 直线自身的挠率应为 0,所以 c 直线的测地挠率 τ_s 其实表示的是沿 c 直线正向,鞍面的单位法向量的转动速率. 这一速率应是曲面自身的几何性质.

在结束本节时,再补充说明,当 $m > 3$ 时,R^m 空间曲面 f 上曲线 $\boldsymbol{x}(s)$的测地曲率、挠率的符号只能在测地标架(Darboux 标架)的基向量 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_j$, $j=0, 1, \cdots, m-2$ 给出后才能确定. 但在 $m=3$ 时,利用 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1 = \boldsymbol{n} \times \nabla \boldsymbol{x}$ 的性质,即行列式

$$|\nabla \boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_1, \boldsymbol{n}| = 1$$

的要求,可知由(3.3.2.19)式(在 $\kappa_s \neq 0$ 时),利用其等号右边分子部分的性质,并记 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1$ 前的符号为 s_n,则

$$s_n = \operatorname{sign}\left(\left|\nabla \boldsymbol{x}, \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2 x_1\,\dot{\boldsymbol{u}} \\ \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2 x_2\,\dot{\boldsymbol{u}} \\ \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2 x_3\,\dot{\boldsymbol{u}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{n}\right|\right) \qquad —(3.3.2.63)$$

上式右边的行列式可表示为

$$\left|\nabla \boldsymbol{x},\ \begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\nabla^2 x_1\dot{\boldsymbol{u}}\\ \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\nabla^2 x_2\dot{\boldsymbol{u}}\\ \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\nabla^2 x_3\dot{\boldsymbol{u}}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{n}\right| = \sum_{i=1}^{2}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial u_i} & \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\nabla^2 x_1\dot{\boldsymbol{u}} & n_1\\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u_i} & \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\nabla^2 x_2\dot{\boldsymbol{u}} & n_2\\ \dfrac{\partial x_3}{\partial u_i} & \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\nabla^2 x_3\dot{\boldsymbol{u}} & n_3\end{vmatrix}\dot{u}_i$$

$$= -\sum_{j=1}^{3}\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\nabla^2 x_j\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\sum_{i=1}^{2}|\ \dot{\boldsymbol{r}}_i\quad \boldsymbol{n}\quad \boldsymbol{1}\ |\cdot u_i$$

其中 $\boldsymbol{1}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 故

$$s_n = -\operatorname{sign}\left(\sum_{j=1}^{3}\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\nabla^2 x_j\dot{\boldsymbol{u}}_j\cdot\sum_{i=1}^{2}|\ \dot{\boldsymbol{r}}_i,\ \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{1}\ |\ \dot{u}_i\right) \quad —(3.3.2.64)$$

(3.3.2.63)式表示了 s_n 与曲面的法方向 $\boldsymbol{n}$ 及曲线的方向 $\dot{\boldsymbol{u}}$, 均有关.

例 3.3.2.1 求正螺面

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\begin{cases}x_1 = u\cos v\\ x_2 = u\sin v\\ x_3 = av\end{cases}$$

上由 $u+v=0$ 决定的曲线 c 上的测地曲率 κ_s.

解: 由 $u+v=0\Rightarrow\dot{v}=-\dot{u}$. 在曲线 c 上 $\boldsymbol{x}(s)$,有

$$\nabla\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\\ 0 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}\\ -\dot{u}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos v+u\sin v\\ \sin v-u\cos v\\ -a\end{bmatrix}\dot{u}$$

取 s 为弧长参数,故应有

$$\|\nabla\boldsymbol{x}\| = (u^2+a^2+1)\dot{u}^2 = 1$$

得

$$\dot{u}^2=\frac{1}{u^2+a^2+1}\Rightarrow\dot{u}=\pm\frac{1}{\sqrt{u^2+a^2+1}}$$

$$\ddot{u}=-\frac{u}{(u^2+a^2+1)^2}$$

再从

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial(u,v)}=\begin{bmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\\ 0 & a\end{bmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{n}_r=\frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\begin{bmatrix}a\sin v\\ -a\cos v\\ u\end{bmatrix}$$

以及

$$\nabla^2 \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2\sin v - u\cos v \\ 2\cos v - u\sin v \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u} + \begin{bmatrix} \cos v + u\sin v \\ \sin v - u\cos v \\ -a \end{bmatrix} \ddot{u}$$

得

$$\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2 \boldsymbol{x} = (u^2+4)\dot{u}^4 + 2u\dot{u}^2\ddot{u} + (u^2+a^2+1)\ddot{u}^2$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}_r = \frac{2a\dot{u}^2}{\sqrt{u^2+a^2}}$$

故

$$\kappa_s = s_n \cdot (\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2 \boldsymbol{x} - (\nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}_r)^2)^{1/2} = s_n \left(\frac{u^2(u^2+a^2+2)^2}{(u^2+a^2)(u^2+a^2+1)^3} \right)^{1/2}$$

s_n 是取符号因子. 注意以上开根$(\cdot)^{1/2}$应保持非负,故 $\sqrt{u^2} = |u|$. 有

$$\kappa_s = s_n \frac{|u|(u^2+a^2+2)}{\sqrt{u^2+a^2}(u^2+a^2+1)^{3/2}}$$

为得到取符号因子,显然应设 $\kappa_s \neq 0$, 否则没有意义. 故可从(3.3.2.19)式得到 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1$,

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1 = s_n \cdot \left\{ \left[\begin{bmatrix} 2\sin v - u\cos v \\ -2\cos v - u\sin v \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u}^2 + \begin{bmatrix} \cos v + u\sin v \\ \sin v - u\cos v \\ -a \end{bmatrix} \ddot{u} - \frac{2a}{u^2+a^2} \begin{bmatrix} a\sin v \\ -\cos v \\ u \end{bmatrix} \dot{u}^2 \right\}$$

由$(\nabla \boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_1, \boldsymbol{n}_r)$的右手性要求,等价于

$$\begin{vmatrix} \cos v + u\sin v & 2\sin v - u\cos v & a\sin v \\ \sin v - u\cos v & -2\cos v - u\sin v & -a\cos v \\ -a & 0 & u \end{vmatrix} \frac{\dot{u}^3}{\sqrt{u^2+a^2}} \cdot s_n > 0$$

即要求

$$-u(u^2+a^2+2)\frac{\dot{u}^3}{\sqrt{u^2+a^2}} \cdot s_n > 0 \Leftrightarrow -u\dot{u} \cdot s_n > 0$$

现不妨取

$$\dot{u} = \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2+1}} > 0$$

则应要求

$$-u\cdot s_n>0\Rightarrow s_n=-\operatorname{sign}(u)$$

但因为

$$s_n\cdot|u|=-\operatorname{sign}(u)\cdot|u|=-u$$

最终得到

$$\kappa_s=-\frac{u(u^2+a^2+2)}{\sqrt{u^2+a^2}(u^2+a^2+1)^{3/2}}$$

由此例可见，这里给出的方法，在确定测地曲率 κ_s 时，若不利用曲面法向量(如用(3.3.2.23)式)，就不能确定 κ_s 的符号. 但这里的方法在高维空间的情形下，仍不失为一种有效率的计算方法.

例 3.3.2.2 求抛物面

$$\boldsymbol{r}(t,\theta)=\begin{cases}x_1=t\cos\theta\\x_2=t\sin\theta\\x_3=t^2\end{cases}$$

上 θ—曲线的测地曲率.

解：以下各$\nabla^d\boldsymbol{x}$ 的导数，均是关于 θ 的导数.

$$\nabla\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-t\sin\theta\\t\cos\theta\\0\end{bmatrix}\quad\|\nabla\boldsymbol{x}\|=t\not\equiv1(\text{且应有 }t>0)\ \nabla\tilde{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\\0\end{bmatrix}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-t\cos\theta\\-t\sin\theta\\0\end{bmatrix}\quad\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-\cos\theta\\-\sin\theta\\0\end{bmatrix}$$

易知

$$\boldsymbol{N}_r=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}=\begin{bmatrix}-2t^2\cos\theta\\-2t^2\sin\theta\\t\end{bmatrix}\quad\boldsymbol{n}_r=\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\begin{bmatrix}-2t\cos\theta\\-2t\sin\theta\\1\end{bmatrix}$$

由 $\qquad\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}=1\qquad\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}=t$

$$\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r=\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\qquad\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r=\frac{2t^2}{\sqrt{1+4t^2}}$$

以及(3.3.2.20)式，即得

$$\kappa_s=\pm\frac{1}{\|\nabla\boldsymbol{x}\|^2}\cdot\frac{\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}-(\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r)(\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r)}{(\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}-(\nabla^2\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}_r)^2)^{1/2}}=\pm\frac{1}{t\sqrt{1+4t^2}}$$

由于 t, θ—曲线与 $\boldsymbol{n}_r$ 一定构成右手系，故上式应取＋号，即得结果.

例 3.3.2.3 圆柱面

$$x^2+y^2+0\cdot z=1$$

上的螺线

$$\begin{cases} x=\cos as \\ y=\sin as \\ z=bs \end{cases} \quad a^2+b^2=1 \quad a,\ b\neq 0$$

的测地曲率、测地挠率.

解：

$$\nabla\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-ay\\ ax\\ b\end{bmatrix} \qquad \|\nabla\boldsymbol{x}\|=1$$

故 s 是弧长参数.

$$\text{取}\quad \nabla f=\begin{bmatrix}2x\\ 2y\\ 0\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{n}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ 0\end{bmatrix} \quad \nabla\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix}-ay\\ ax\\ 0\end{bmatrix}$$

以及

$$\nabla^2\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-a^2x\\ -a^2y\\ 0\end{bmatrix}$$

得测地曲率

$$\kappa_s=\pm(\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\nabla^2\boldsymbol{x}-(\nabla^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n})^2)^{1/2}=\pm(a^4-a^4)^{1/2}=0$$

所以，这一螺线为测地线，但$\nabla\boldsymbol{n}$ 不平行于$\nabla\boldsymbol{x}$，故它不是曲率线.

由

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1=\boldsymbol{n}\times\nabla\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}by\\ -bx\\ a\end{bmatrix}$$

可以直接得到

$$\tau_s=-\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{n}=ab\neq 0$$

以下再利用正投影矩阵的方法给予检验这一结果. 由

$$\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$$

可取其基础解系矩阵为

$$\Pi_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{a}{b}y & -\frac{a}{b}x \end{bmatrix}$$

从而可得

$$P_x = \Pi_x(\Pi_x^{\mathrm{T}}\Pi_x)^{-1}\Pi_x^{\mathrm{T}} = b^2 \begin{bmatrix} 1+\frac{a^2}{b^2}x^2 & \frac{a^2}{b^2}xy & \frac{a}{b}y \\ \frac{a^2}{b^2}xy & 1+\frac{a^2}{b^2}y^2 & -\frac{a}{b}x \\ \frac{a}{b}y & -\frac{a}{b}x & \frac{a^2}{b^2} \end{bmatrix}$$

故

$$P_x \nabla\boldsymbol{n} = b^2 \begin{bmatrix} -ay \\ ax \\ -\frac{a^2}{b^2} \end{bmatrix} \qquad \nabla\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}} P_x \nabla\boldsymbol{n} = a^2 b^2$$

且$(\nabla\boldsymbol{x},\ -P_x\nabla\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n})$构成右手系，即 $P_x\nabla\boldsymbol{n}$ 与$-\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1$ 同向，故

$$\tau_s = (\nabla\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}} P_x \nabla\boldsymbol{n})^{1/2} = ab$$

结果一致.

附注：R^m 空间的 $m-1$ 维曲面上的曲线测地曲率的 Liouville 公式

由(3.3.2.23)式，得测地曲率 κ_s 也可以表成

$$\kappa_s = s_n \cdot \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}(\ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\Gamma\dot{\boldsymbol{u}}) \right\| \qquad \text{—(3.3.2.23)}$$

现设$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$矩阵的列向量是正交的，$s_n = (\pm)$ 是符号选择因子(见上文说明).

设

$$\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}(s)) \in R^m \quad \boldsymbol{u}(s) \in D_u \subset R^{m-1}$$

是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面上的一条曲线，且 s 是弧长参数.

于是

$$\nabla\boldsymbol{x} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\dot{\boldsymbol{u}} \quad \dot{\boldsymbol{u}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s}$$

并应有

$$\nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{x} = \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I} \, \dot{\boldsymbol{u}} = \sum_{i=1}^{m-1} g_i \dot{u}_i^2 = 1$$

$$\boldsymbol{I} = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \mathrm{diag}(g_1, g_2, \cdots, g_{m-1})$$

这里 $g_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_i = g_{ii}$，是简记. 由

$$\boldsymbol{I}^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{g_1}, \frac{1}{g_2}, \cdots, \frac{1}{g_{m-1}}\right)$$

规定

$$\boldsymbol{I}^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{g_1}}, \frac{1}{\sqrt{g_2}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{g_{m-1}}}\right)$$

所以，由内积的几何意义即知

$$\boldsymbol{I}^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \nabla \boldsymbol{x} = \boldsymbol{I}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{I} \, \dot{\boldsymbol{u}} = \mathbf{cos}\, \boldsymbol{\theta} = (\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cdots, \cos\theta_{m-1})^{\mathrm{T}}$$

即

$$\mathbf{cos}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{cos}\, \boldsymbol{\theta} = \nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m-1} \cos^2 \theta_i = 1$$

且有

$$\cos\theta_i = \sqrt{g_i} \cdot u_i \quad i = 1, \cdots, m-1 \qquad —(3.3.2.65)$$

这里，θ_i 是 $\boldsymbol{x}(s)$ 曲线与 u_i—曲线(见下文)的夹角.

因为向量 $\ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Gamma} \dot{\boldsymbol{u}}$ 的分量是

$$\ddot{u}_h + \sum_{i,j=1}^{m-1} \Gamma_{ij}^h \dot{u}_i \dot{u}_j \quad h = 1, \cdots, m-1$$

且由符号

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right) \qquad —(2.4.3.10)$$

由 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$ 矩阵列向量的正交性，即知

$$\begin{cases} k \neq i,\ k \neq j,\ i \neq j & \Gamma_{ijk} = 0 \\ k = i \quad i \neq j & \Gamma_{iji} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial g_i}{\partial u_j} \\ k = j \quad i \neq j & \Gamma_{ijj} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial g_j}{\partial u_i} \\ k \neq i \quad i = j & \Gamma_{iik} = -\dfrac{1}{2} \dfrac{\partial g_i}{\partial u_k} \\ k = i \quad i = j & \Gamma_{iii} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial g_i}{\partial u_i} \end{cases} \qquad —(3.3.2.66)$$

由(2.4.3.11)式和上式即得

$$\begin{cases} \Gamma_{ij}^{i} = \Gamma_{ji}^{i} = \dfrac{1}{2g_i}\dfrac{\partial g_i}{\partial u_j} & i \neq j \\ \Gamma_{ii}^{k} = -\dfrac{1}{2g_k}\dfrac{\partial g_i}{\partial u_k} & k \neq i \\ \Gamma_{ii}^{i} = \dfrac{1}{2g_i}\dfrac{\partial g_i}{\partial u_i} \\ \text{其余} \quad \Gamma_{ij}^{k} = 0 \end{cases} \qquad \text{—(3.3.2.67)}$$

利用(3.3.2.67)式，有

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{m-1}\Gamma_{ij}^{h}\dot{u}_i\dot{u}_j &= \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m-1}\Gamma_{ij}^{h}\dot{u}_i\dot{u}_j + \sum_{\substack{i,j=1\\ i=j}}^{m-1}\Gamma_{ij}^{h}\dot{u}_i\dot{u}_j \\ &= \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j,\ i=h}}^{m-1}\Gamma_{ij}^{h}\dot{u}_i\dot{u}_j + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j,\ j=h}}^{m-1}\Gamma_{ij}^{h}\dot{u}_i\dot{u}_j + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq h}}^{m-1}\Gamma_{ii}^{h}\dot{u}_i^2 + \Gamma_{hh}^{h}\dot{u}_h^2 \\ &= 2\sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq h}}^{m-1}\Gamma_{hj}^{h}\dot{u}_h\dot{u}_j + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq h}}^{m-1}\Gamma_{ii}^{h}\dot{u}_i^2 + \Gamma_{hh}^{h}\dot{u}_h^2 \end{aligned}$$

故得

$$\sum_{i,j=1}^{m-1}\Gamma_{ij}^{h}\dot{u}_i\dot{u}_j = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{m-1}\frac{1}{g_h}\frac{\partial g_h}{\partial u_j}\dot{u}_h\dot{u}_j - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq h}}^{m-1}\frac{1}{2g_h}\frac{\partial g_i}{\partial u_h}\dot{u}_i^2 + \frac{1}{2g_h}\frac{\partial g_h}{\partial u_h}\dot{u}_h^2$$

或表成

$$\sum_{i,j=1}^{m-1}\Gamma_{ij}^{h}\dot{u}_i\dot{u}_j = \sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_h}\frac{\partial g_h}{\partial u_j}\dot{u}_h\dot{u}_j - \sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2g_h}\frac{\partial g_i}{\partial u_h}\dot{u}_i^2 \qquad \text{—(3.3.2.68)}$$

从而

$$\ddot{u}_h + \sum_{i,j=1}^{m-1}\Gamma_{ij}^{h}\dot{u}_i\dot{u}_j = \ddot{u}_h + \frac{\dot{u}_h}{g_h}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\partial g_h}{\partial u_j}\dot{u}_j - \frac{1}{2g_h}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial g_i}{\partial u_h}\dot{u}_i^2 \qquad \text{—(3.3.2.69)}$$

对(3.3.2.65)式的两边求关于 s 的导数，有

$$-\frac{\sin\theta_i}{\sqrt{g_i}}\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}s} = \ddot{u}_i + \frac{\dot{u}_i}{2g_i}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\partial g_i}{\partial u_j}\dot{u}_j \qquad \text{—(3.3.2.70)}$$

并利用(3.3.2.65)式，可以有

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{g_h}}\dfrac{\partial g_h}{\partial u_j}\dot{u}_j\dot{u}_h = \dfrac{1}{\sqrt{g_j}}\cdot\dfrac{\partial \log g_h}{\partial u_j}\cos\theta_j\cos\theta_h \\ \dfrac{1}{\sqrt{g_h}}\dfrac{\partial g_i}{\partial u_h}\dot{u}_i^2 = \dfrac{1}{\sqrt{g_h}}\cdot\dfrac{\partial \log g_i}{\partial u_h}\cos^2\theta_i \end{cases} \qquad \text{—(3.3.2.71)}$$

将(3.3.2.23)式表成以下形式

$$\kappa_s = s_n\Big[\sum_{h=1}^{m-1} g_h \cdot (\ddot{u}_h + \sum_{i,j=1}^{m-1}\Gamma_{ij}^h \dot{u}_i\dot{u}_j)^2\Big]^{1/2} \qquad —(3.3.2.72)$$

将(3.3.2.69)式代入(3.3.2.72)式，得

$$\kappa_s = s_n\Bigg[\sum_{h=1}^{m-1} g_h\Big(-\frac{\sin\theta_h}{\sqrt{g_h}}\frac{d\theta_h}{ds} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_h}\frac{\partial g_h}{\partial u_j}\dot{u}_j\dot{u}_h - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_h}\frac{\partial g_j}{\partial u_h}\dot{u}_j^2\Big)^2\Bigg]^{1/2}$$

$$= s_n\Bigg[\sum_{h=1}^{m-1}\Big(-\sin\theta_h\frac{d\theta_h}{ds} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{g_h}}\frac{\partial g_h}{\partial u_j}\dot{u}_j\dot{u}_h - \frac{1}{\sqrt{g_h}}\frac{\partial g_j}{\partial u_h}\dot{u}_j^2\Big)\Big)^2\Bigg]^{1/2}$$

再将(3.3.2.71)式代入上式，最终便得

$$\kappa_s = s_n\Bigg[\sum_{h=1}^{m-1}\Big(-\sin\theta_h\frac{d\theta_h}{ds} + \sum_{j=1}^{m-1}\Big(\frac{\cos\theta_h}{\sqrt{g_j}}\frac{\partial\log g_h}{\partial u_j} - \frac{\cos\theta_j}{\sqrt{g_h}}\frac{\partial\log g_j}{\partial u_h}\Big)\frac{\cos\theta_j}{2}\Big)^2\Bigg]^{1/2}$$
$$—(3.3.2.73)$$

(3.3.2.73)式就是 R^m 空间上的 $m-1$ 维曲面上的曲线的测地曲率 κ_s 的 **Liouville 公式.**

当 $m=3$，记

$$A = \frac{\cos\theta_1}{\sqrt{g_2}}\frac{\partial\log g_1}{\partial u_2} - \frac{\cos\theta_2}{\sqrt{g_1}}\frac{\partial\log g_2}{\partial u_1}$$

从(3.3.2.73)式中得到

$$\kappa_s^2 = \Big(-\sin\theta_1\frac{d\theta_1}{ds} + \frac{\cos\theta_2}{2}A\Big)^2 + \Big(-\sin\theta_2\frac{d\theta_2}{ds} - \frac{\cos\theta_1}{2}A\Big)^2$$

$$= \Big(\sin\theta_1\frac{d\theta_1}{ds}\Big)^2 + \Big(\sin\theta_2\frac{d\theta_2}{ds}\Big)^2 + \Big(\sin\theta_2\cos\theta_1\frac{d\theta_2}{ds} - \sin\theta_1\cos\theta_2\frac{d\theta_1}{ds}\Big)A + \frac{A^2}{4}$$
$$—(3.3.2.74)$$

由 $\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 = 1$ 得

$$\frac{d}{ds}(\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2) = 0 \Rightarrow \quad \sin\theta_1\cos\theta_1\frac{d\theta_1}{ds} = -\sin\theta_2\cos\theta_2\frac{d\theta_2}{ds}$$

$\cos\theta_1$、$\cos\theta_2$ 不能同时为 0. 设 $\cos\theta_2 \neq 0$. 故从上式得

$$\frac{\cos^2\theta_1}{\cos^2\theta_2}\Big(\sin\theta_1\frac{d\theta_1}{ds}\Big)^2 = \Big(\sin\theta_2\frac{d\theta_2}{ds}\Big)^2$$

于是

$$\left(\sin\theta_1 \frac{d\theta_1}{ds}\right)^2 + \left(\sin\theta_2 \frac{d\theta_2}{ds}\right)^2 = \frac{\sin^2\theta_1}{\cos^2\theta_2}\left(\frac{d\theta_1}{ds}\right)^2$$

另由

$$\sin^2\theta_1 = 1 - \cos^2\theta_1 = \cos^2\theta_2$$

所以

$$\left(\sin\theta_1 \frac{d\theta_1}{ds}\right)^2 + \left(\sin\theta_2 \frac{d\theta_2}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\theta_1}{ds}\right)^2 \qquad —(3.3.2.75)$$

再由

$$-\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} \cdot \sin\theta_1 \frac{d\theta_1}{ds} = \sin\theta_2 \frac{d\theta_2}{ds}$$

得

$$\sin\theta_2\cos\theta_1 \frac{d\theta_2}{ds} - \sin\theta_1\cos\theta_2 \frac{d\theta_1}{ds} = -\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_2}\frac{d\theta_1}{ds}$$

因 $\sin\theta_1 = \cos\theta_2$ 便有

$$\sin\theta_2\cos\theta_1 \frac{d\theta_2}{ds} - \sin\theta_1\cos\theta_2 \frac{d\theta_1}{ds} = -\frac{d\theta_1}{ds} \qquad —(3.3.2.76)$$

将(3.3.2.75～76)式代入(3.3.2.74)式,并记 $\theta_1 = \theta$,便有

$$\begin{aligned}\kappa_s &= s_n\left[\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - \frac{d\theta}{ds}A + \left(\frac{A}{2}\right)^2\right]^{1/2} \\ &= s_n\left[\left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{\cos\theta}{2\sqrt{g_2}}\frac{\partial\log g_1}{\partial u_2} + \frac{\sin\theta}{2\sqrt{g_1}}\frac{\partial\log g_2}{\partial u_1}\right)^2\right]^{1/2}\end{aligned}$$

将 $g_1 = E$, $g_2 = G$ $u_1 = u$, $u_2 = v$ 代入,并设 $s_n = 1$ 便有

$$\kappa_s = \frac{d\theta}{ds} - \frac{\cos\theta}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\log E}{\partial v} + \frac{\sin\theta}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\log G}{\partial u} \qquad —(3.3.2.77)$$

这就是人所熟知的 R^3 空间上的 Liouville 公式. 与(3.3.2.73)式相比较,可见在 R^m 空间上产生了复杂性.

考虑(3.3.2.73)式中,取 $\boldsymbol{x}(s)$ 为 u_i—曲线. 这里 u_i—曲线是取 $u_k = c_k$, c_k — const, 当 $k \neq i$ 及 $u_i = u_i(s)$ 构造的曲线. 从而

$$\theta_i = 0,\ \theta_k = \frac{\pi}{2} \quad k \neq i \quad \frac{d\theta_i}{ds} \equiv 0 \quad \sin\theta_k \equiv 0 \quad k \neq i$$

$$\sin\theta_h \frac{d\theta_h}{ds} \equiv 0 \quad h = 1, \cdots, m-1 \quad \cos\theta_h \equiv 0 \quad h \neq i \quad \cos\theta_i \equiv 1$$

于是 u_i—曲线的测地曲率 κ_s^i 可表成

$$\kappa_s^i = s_n \left[\sum_{\substack{h=1 \\ h\neq i}}^{m-1} \left(\frac{1}{2\sqrt{g_h}} \frac{\partial \log g_i}{\partial u_h} \right)^2 \right]^{1/2} \qquad \text{—(3.3.2.78)}$$

当 $m=3$，对于 $i=1$，并参见(3.3.2.77)式，可取 $s_n=-1$，从(3.3.2.78)式便得

$$\kappa_s^1 = -\frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \log E}{\partial v}$$

当 $i=2$，则可取 $s_n=1$，有

$$\kappa_s^2 = \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \log G}{\partial u}$$

这即是 R^3 空间上的 u—曲线、v—曲线的测地曲率 Liouville 公式.

§3.3.3 一般曲面函数决定的测地线方程

当 R^m 空间上的曲面由一个一般形式的曲面函数 $f(\boldsymbol{x})=0$ 给出，可以推导出一个非内蕴形式的测地线微分方程. 事实上，可以直接利用(3.3.1.15)式，在曲面测地线上，应有 $\| D_x(s) \| = 0$，故必有

$$\nabla^2 \boldsymbol{x} = N_x(s) = \kappa_n \cdot \boldsymbol{n} \qquad \text{—(3.3.3.1)}$$

(3.3.3.1)式是与(3.3.2.24)式等价的测地线方程. 只是(3.3.2.24)式是以"内蕴"的几何量给出的微分方程，从而更受到关注. 但在一般曲面函数情形，直接利用(3.3.3.1)式是更可行的方法.

设

$$\widetilde{\boldsymbol{N}} = \frac{\nabla f(\boldsymbol{x})}{\| \nabla f(\boldsymbol{x}) \|}$$

是一般曲面函数给出的自然定向的单位法向量. 并注意(3.3.3.1)式等号右边的乘积 $\kappa_n \boldsymbol{n}$ 因子与曲面定向的改变无关，即若取曲面定向为 $-\boldsymbol{n}$，则 κ_n 也将改变符号，成为 $-\kappa_n$，故 $\kappa_n \boldsymbol{n}$ 乘积不变. 所以，可以不问 $\widetilde{\boldsymbol{N}}$ 的定向是否与正则参数曲面函数由多重矢量积给出的定向 $\boldsymbol{n}$ 一致，在(3.3.3.1)式中，用 $\widetilde{\boldsymbol{N}}$ 替代 $\boldsymbol{n}$，并规定

$$\kappa_n = -\frac{\nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} H \nabla \boldsymbol{x}}{\| \nabla f \|} \qquad \text{—(2.2.1.9)}$$

以及 $H = \nabla^2 f(\boldsymbol{x})$，$\nabla \boldsymbol{x} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(s)}{\mathrm{d}s}$，$\boldsymbol{x}(s)$ 是曲面上的测地线，就可得到

$$\nabla^2 \boldsymbol{x} + \frac{\nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2 f \nabla \boldsymbol{x}}{\nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f} \nabla f = \boldsymbol{0} \qquad —(3.3.3.2)$$

这就是(3.3.3.1)式的一般形式. 注意(3.3.3.2)式中的$\nabla \boldsymbol{x}(s)$、$\nabla^2 \boldsymbol{x}(s)$的参数 s 必须为弧长参数,即 $\nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{x} = 1$.

将$\nabla^2 \boldsymbol{x}$ 写成 $\ddot{\boldsymbol{x}}$,并将(3.3.3.2)式写成

$$(\nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f) \cdot \ddot{\boldsymbol{x}} = -(\nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2 f \nabla \boldsymbol{x}) \cdot \nabla f \qquad —(3.3.3.3)$$

两边对 s 参数作积分,并因 $\ddot{\boldsymbol{x}} \mathrm{d}s = \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{x}}$,有

$$\begin{aligned}\int \nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{x}} &= -\int (\nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2 f \nabla \boldsymbol{x}) \cdot \nabla f \mathrm{d}s \\ &= -\int \nabla f \cdot (\nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2 f \nabla \boldsymbol{x}) \mathrm{d}s \qquad —(3.3.3.4)\end{aligned}$$

因为

$$\mathrm{d}(\nabla f^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{x}) = \nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2 f \nabla \boldsymbol{x} \mathrm{d}s + \nabla f^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{x}}$$

得

$$\mathrm{d}(\nabla f^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{x}) - \nabla f^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{x}} = \nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2 f \nabla \boldsymbol{x} \mathrm{d}s$$

将此结果代入(3.3.3.4)式的右边,得

$$\begin{aligned}\int \nabla f \cdot (\nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2 f \nabla \boldsymbol{x}) \mathrm{d}s &= \int \nabla f (\mathrm{d}(\nabla f^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{x}) - \nabla f^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{x}}) \\ &= \int \nabla f \mathrm{d}(\nabla f^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{x}) - \int \nabla f \nabla f^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{x}} \\ &= \nabla f \cdot (\nabla f^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{x}) - \int (\nabla f^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{x}) \mathrm{d} \nabla f - \int \nabla f \nabla f^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{x}}\end{aligned}$$

由于 $\nabla f^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{x} \equiv 0$ 故得

$$\int \nabla f \cdot (\nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla^2 f \nabla \boldsymbol{x}) \mathrm{d}s = -\int \nabla f \nabla f^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{x}} \qquad —(3.3.3.5)$$

将此结果代入(3.3.3.4)式,最终得

$$\int [(\nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f) \cdot I_m - \nabla f \nabla f^{\mathrm{T}}] \ddot{\boldsymbol{x}} \mathrm{d}s = \boldsymbol{0} \qquad —(3.3.3.6)$$

所以就知(3.3.3.2)式可等价地表示为

$$[(\nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f) \cdot I_m - \nabla f \nabla f^{\mathrm{T}}] \ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \qquad —(3.3.3.7)$$

一般地,设 $\boldsymbol{a} \in R^m$ 是任一非 0 的 m 维向量,称

$$aa^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_m \\ a_1a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2a_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1a_m & a_2a_m & \cdots & a_m^2 \end{bmatrix} \in R^{m\times m} \qquad —(3.3.3.8)$$

为 $\boldsymbol{a}$ 向量的**秩1(自偶)矩阵**(Gram 矩阵). 因为显然, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{aa}^{\mathrm{T}}) = 1$. 并且,易知 $\boldsymbol{aa}^{\mathrm{T}}$ 矩阵的任意 $n > 1$ 阶主子式均为 0,故特征多项式

$$|\lambda I_m - \boldsymbol{aa}^{\mathrm{T}}| = \lambda^{m-1}(\lambda - \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}) = 0 \qquad —(3.3.3.9)$$

所以, $\boldsymbol{aa}^{\mathrm{T}}$ 的特征值是 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{m-1} = 0$ 和 $\lambda_m = \|\boldsymbol{a}\|^2$.

由此,可将(3.3.3.7)式的意义表述为如下推论.

推论 3.3.3.1 设 $\boldsymbol{x}(s)$ 是一般曲面函数 $f(\boldsymbol{x}) = 0$, $\boldsymbol{x} \in D \subset R^m$ 上的测地线,则 $\ddot{\boldsymbol{x}}$ 二阶导数向量必定是曲面自然定向 $\nabla f(\boldsymbol{x})$ 梯度向量的秩1(自偶)矩阵的特征值 $\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|^2$ 对应的特征向量. ■

显然,在正则参数曲面函数的情况下,应可以有曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 上的测地线 $\boldsymbol{x}(s)$ 的二阶导数向量 $\ddot{\boldsymbol{x}}$ 与 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 决定的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 之间有

$$[I_m - \boldsymbol{nn}^{\mathrm{T}}]\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \qquad —(3.3.3.10)$$

这可从(3.3.3.7)式中直接得到.

(3.3.3.7)式或(3.3.3.10)式的 $\ddot{\boldsymbol{x}}$ 就是(3.3.3.1)式表示的 $\ddot{\boldsymbol{x}} = \kappa_n\boldsymbol{n}$ (或如(3.3.3.2)式那样直接表成常微分方程组的形式). 其中 $\ddot{\boldsymbol{x}}$ 的一阶条件、0 阶条件应当是

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}} = 1 \\ \nabla f^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}} = 0 \quad (\text{or } \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}} = 0) \\ f(\boldsymbol{x}(s)) = 0 \end{cases} \qquad —(3.3.3.11)$$

由(3.3.3.1)式,可知测地线的 $\ddot{\boldsymbol{x}}$ 导数总是与曲面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 成共线的关系,或说 $\boldsymbol{n}$ 向量总位于测地线的密切平面上.

当 $\kappa_n =$ 常数,则可直接得到

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \lambda\boldsymbol{n} \quad \lambda \in R \qquad —(3.3.3.12)$$

将 λ 合并到以上二阶常微分方程组的积分常数中,由一阶条件即可给出测地线方程 $\boldsymbol{x}(s)$.

由上显然可见,令 $\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$ 当然也是(3.3.3.10)式的一个特解. 所以,曲面上的直线一定就是曲面的测地线. 但当曲面上不存在直线,则 $\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$ 的任一个解都不可能满足一阶条件中的对所有的 s 均有 $\nabla f^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$,故 $\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$ 就不可能是曲面上的测地线方程.

在曲线测地线的情形. 由二阶常微分方程组

$$\begin{cases}\ddot{\boldsymbol{x}} = \kappa_n \boldsymbol{n} \\ \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}} = 1 \\ \nabla f^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}} = 0\end{cases} \qquad —(3.3.3.13)$$

所得到的解函数

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s, \boldsymbol{c}) \qquad —(3.3.3.14)$$

中，$\boldsymbol{c}$ 应是 $2m$ 维的积分常(参)数向量.

由(3.3.3.11)式的0、1阶条件，由 $\boldsymbol{x}(s, \boldsymbol{c})$ 和 $f(\boldsymbol{x}(s, \boldsymbol{c}))$ 函数关于 $\boldsymbol{c}$ 向量的属性，决定了曲面上有多少条测地线. 比如，若有一特定的 $\boldsymbol{c}$ 使(3.3.3.14)式决定 $\boldsymbol{x}(s, \boldsymbol{c})$ 满足0、1阶条件，且 $\boldsymbol{x}(s, \boldsymbol{c})$ 和 $f(\boldsymbol{x}(s, \boldsymbol{c}))$ 关于 $\boldsymbol{c}$ 都是齐次的，那么，$-\boldsymbol{c}$ 决定的 $\boldsymbol{x}(s, -\boldsymbol{c})$ 也是曲面上的测地线.

例 3.3.3.1 R^3 空间上的圆柱面

$$f(\boldsymbol{x}) = x^2 + y^2 + 0 \cdot z = 1 \quad \boldsymbol{x} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$$

上的全部测地线.

解：由

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f = 4 \qquad 取\ \boldsymbol{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f \nabla f^{\mathrm{T}} = 4\begin{bmatrix} x^2 & xy & 0 \\ xy & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\nabla f \nabla f^{\mathrm{T}}$ 矩阵的 $\|\nabla f\|^2$ 特征值对应的特征向量 $\ddot{\boldsymbol{x}}$ 是下式的解

$$\begin{bmatrix} 1-x^2 & -xy & 0 \\ -xy & 1-y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$$

取 $\ddot{\boldsymbol{x}}$ 的全部可能形式求解.

(1) $\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$，可得

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad a, b, c—\text{const}$$

由一阶条件

$$\nabla f^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}} = 2ax + 2by = 0$$

由于 x，y 具有变动性，故要使上式成立，必只能有 $a=b=0$，从而可取

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

即得解

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}a\\b\\s\end{bmatrix}\qquad a^2+b^2=1 \tag{a}$$

这是曲面上的直线测地线，其中 a，b 为常数.

（2）$\ddot{\boldsymbol{x}}\neq\boldsymbol{0}$. 由

$$\begin{bmatrix}y^2 & -xy & 0\\-xy & x^2 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$$

得

$$\begin{cases}y(y\ddot{x}-x\ddot{y})=0\\ \ddot{z}=0\end{cases}$$

由 y 的变动性，知有

$$\begin{cases}y\ddot{x}-x\ddot{y}=0\\ \ddot{z}=0\end{cases}$$

这一方程的解就是

$$\ddot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\ddot{x}\\\ddot{y}\\\ddot{z}\end{bmatrix}=\kappa_n\boldsymbol{n}$$

但由

$$\kappa_n=-\frac{\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\dot{\boldsymbol{x}}}{\|\nabla f\|}=-\frac{2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{4}$$

以及 $\quad\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=1\Rightarrow\dot{x}^2+\dot{y}^2=1-\dot{z}^2$ 和 $\ddot{z}=0\Rightarrow\dot{z}=$ 常数

故知 $\kappa_n=$ 常数. 从而其解可表示为任取常数 $a>0$，

$$\begin{cases}\ddot{x}=\pm ax\\ \ddot{y}=\pm ay\\ \ddot{z}=0\end{cases}$$

则由上式右边取+号,从

$$\ddot{x} = ax \quad \ddot{y} = ay \quad \ddot{z} = 0$$

中得

$$x = c_1 e^{as} + c_2 e^{-as} \qquad y = c_3 e^{as} + c_4 e^{-as}$$

但这一解的形式要满一阶条件,只能是 $c_{1,2,3,4} = 0$,故应舍去.

再由 $\ddot{x} = -ax \quad \ddot{y} = -ay \quad \ddot{z} = 0$

可得到解

$$\begin{cases} x = c_1 \cos as + c_2 \sin as \\ y = c_3 \cos as + c_4 \sin as \\ z = c_5 s + c_6 \end{cases}$$

这一解函数满足一阶条件的关系式是

$$\begin{cases} c_1^2 + c_3^2 = 1 \\ c_2^2 + c_4^2 = 1 \\ c_1 c_2 + c_3 c_4 = 0 \\ a^2 + c_5^2 = 1 \\ c_6 \in R \end{cases}$$

先设 $c_5 \neq 0$,并简记 $c_5 = b$. 则对于任意的 $c_6 \neq 0$,只相差一个坐标平移,故不妨取 $c_6 = 0$. 同时,取最简形式的其他 c_i,如可有

$$c_1 = c_4 = 1 \quad c_2 = c_3 = 0$$

便得解

$$\begin{cases} x = \cos as \\ y = \sin as \quad a^2 + b^2 = 1 \\ z = bs \end{cases} \qquad \text{—(b)}$$

再可以取 $c_5 = 0$ 则 $a = 1$,并记 $b = c_6 \in R$, c_i, $i = 1, 2, 3, 4$ 同上,便得解

$$\begin{cases} x = \cos s \\ y = \sin s \\ z = b \end{cases} \qquad \text{—(c)}$$

所以,(a)、(b)、(c)三式给出了圆柱面上的全部测地线函数.

例 3.3.3.2 R^m 空间上的单位圆球面

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \cdots + x_m^2 = 1$$

上的测地线.

解: 由 $\nabla f = 2\boldsymbol{x}$, $\nabla f^{\mathrm{T}} \nabla f = 4 \quad \nabla f \nabla f^{\mathrm{T}} = 4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 所以测地线 $\boldsymbol{x}(s)$的二阶导数是下式的解

$$(I_m - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$$

上述方程组中的第 i 个是

$$\ddot{x}_i = x_i \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \ddot{\boldsymbol{x}}$$

则直接利用一阶条件

$$\nabla f^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{x}} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{x}} = 0 \Rightarrow \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \ddot{\boldsymbol{x}} = 0$$

所以,应成立

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{x}} = 1 \qquad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \ddot{\boldsymbol{x}} = -1$$

即得测地线二阶导数应是

$$\ddot{x}_i = -x_i \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

这方程的解就是

$$x_i = a_i \cos s + b_i \sin s$$

a_i, b_i 可以如此选择,以过单位球面上的$(0, \cdots, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ 点为例,可取

$$\begin{cases} x_i = a_i \cos s \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 \quad \sum_{i=1}^{m-1} a_i^2 = 1 \\ x_m = \sin s \end{cases}$$

因为这里满足 $\sum a_i^2 = 1$ 的 a_i 有无穷多个,故过球面上任一点的测地线有无穷多条,且它们是过这一点的球面的大圆周.

例 3.3.3.3 证明 R^{m+1}空间上的旋转曲面的子午线一定是曲面的测地线.

解: 设旋转曲面用以下函数表示

$$\begin{cases} z = g(v) \quad f^2(v) = x_1^2 + \cdots + x_m^2 \quad f(v) \neq 0 \text{ and } f'(v) \neq 0 & \text{—(a)} \\ x_1^2 + \cdots + x_m^2 + 0 \cdot z = f^2(v) \quad z = g(v),\ f(v) = \text{常数} & \text{—(b)} \end{cases}$$

这里,之所以要用(a)、(b)两式来表示 R^{m+1}空间上的一般旋转曲面,是因为在这两式各自对应的条件下,其函数形式是不能完全替代的,在(a)式的条件下,由于 f、f'均非 0,故偏导数

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{x_i}{ff'} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x_i} = g' \frac{\partial v}{\partial x_i} = g' \frac{x_i}{ff'}$$

是存在的,所以,z 可以看成是 $z = z(\boldsymbol{x})$ 函数.但在(b)式的条件下,旋转曲面只

能被看作是圆柱面，所以，z 不能表示为 $z = z(\boldsymbol{x})$ 函数.

先考虑(a)式.将其表示成一般函数形式

$$F(z, v(\boldsymbol{x})) = z - g(v) = 0 \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$$

并设 $\boldsymbol{x}(s)$ 是旋转曲面上的测地线.则

$$\nabla F = \begin{bmatrix} -g' \dfrac{\boldsymbol{x}}{ff'} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \nabla F^{\mathrm{T}} \nabla F = 1 + \frac{g'^2}{f'^2}$$

$$\nabla F \nabla F^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dfrac{g'^2}{f^2 f'^2}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} & -g' \dfrac{\boldsymbol{x}}{ff'} \\ -\dfrac{g'\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}{ff'} & 1 \end{bmatrix}$$

由(3.3.3.7)式

$$((\nabla F^{\mathrm{T}} \nabla F) \cdot I_{m-1} - \nabla F \nabla F^{\mathrm{T}}) \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + \dfrac{g'^2}{f'^2}\right) I_m - \dfrac{g'^2}{f^2 f'^2}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} & g' \dfrac{\boldsymbol{x}}{ff'} \\ \dfrac{g'}{ff'}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} & \dfrac{g'^2}{f'^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{0} \qquad \text{—(c)}$$

这里的 $\ddot{\boldsymbol{x}}$、$\ddot{z}$ 都是关于 s 参数的导数.上式的第 i 个方程可表为

$$\left(1 + \frac{g'^2}{f'^2}\right)\ddot{x}_i - \frac{g'^2}{f^2 f'^2} x_i \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \ddot{\boldsymbol{x}} + \frac{g'}{ff'} x_i \ddot{z} = 0 \qquad \text{—(d)}$$

第 $m+1$ 个方程则可表为

$$\frac{g'}{ff'}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{x}} + \frac{g'^2}{f'^2}\ddot{z} = 0 \qquad \text{—(e)}$$

从(e)式可得到

$$\frac{g'}{ff'}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{x}} = -\frac{g'^2}{f'^2}\ddot{z} \qquad \text{—(f)}$$

将此结果代入(d)式并整理，即得到

$$\ddot{x}_i + \frac{g'}{ff'}\ddot{z} \cdot x_i = 0 \quad i = 1, \cdots, m \qquad \text{—(g)}$$

再从一阶条件

$$\nabla F^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = -g' \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}}{ff'} + \dot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = g' \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}}{ff'} \qquad \text{—(h)}$$

由(h)、(f)得

$$\frac{g'^2}{f'^2}\ddot{z}+\dot{z}=0 \qquad —(\mathrm{i})$$

这样,(g)、(i)式就构成了测地线 $\boldsymbol{x}(s)$、$z(s)$的二阶导数向量 $\ddot{\boldsymbol{x}}$、$\ddot{z}$ 的常微分方程组. 求解这个方程组并使之满足另一个一阶条件

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}+\dot{z}^2=1$$

理论上便可确定(a)式表示的旋转曲面上的所有测地线. 容易理解 $g'=0$ 时 $\Rightarrow$ $\dot{z}=0$、$\ddot{x}_i=0$,从而,在 $g'=0$ 时,(g)、(i)方程组的解是与 z 轴正交的直线. 但由旋转曲面的几何性质,应知这是不可能的. 所以,这里应要求在测地线上 $g'\neq 0$. 从而,(g)、(i)还可表示成

$$\begin{cases}\ddot{x}_i-\dfrac{f'}{fg'}\dot{z}\cdot x_i=0 \quad i=1,\cdots,m\\ \ddot{z}+\dfrac{f'^2}{g'^2}\dot{z}=0\end{cases} \qquad —(\mathrm{j})$$

另一方面,将 R^{m+1}空间中的旋转曲面表示成参数形式

$$\begin{cases}x_i=f(v)\cdot a_i(\boldsymbol{u}) \quad i=1,\cdots,m \quad \boldsymbol{u}\in R^{m-1}\\ a_1(\boldsymbol{u})=\prod\limits_{j=1}^{m-1}\cos u_j\\ a_2(\boldsymbol{u})=(\prod\limits_{j=1}^{m-2}\cos u_j)\sin u_{m-1}\\ \quad\vdots\\ a_i(\boldsymbol{u})=(\prod\limits_{j=1}^{m-i}\cos u_j)\sin u_{m-i+1}\\ \quad\vdots\\ a_m(\boldsymbol{u})=\sin u_1\\ \sum\limits_{i=1}^{m}a_i^2(\boldsymbol{u})=1\\ z=g(v)\end{cases} \qquad —(\mathrm{k})$$

则其子午线是 $\boldsymbol{u}$ 取常数向量时的 v—曲线. 从而在子午线上将 v 看成为 s,并求导,有

$$\dot{x}_i=f'a_i \quad \dot{z}=g'$$

即

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}+\dot{z}^2=f'^2+g'^2$$

故应取

$$\tilde{x}_i' = \frac{f' a_i}{(f'^2 + g'^2)^{1/2}} \quad \tilde{z}' = \frac{g'}{(f'^2 + g'^2)^{1/2}}$$

的形式，并得

$$\tilde{x}_i'' = \frac{g'^2 f'' - f' g' g''}{(f'^2 + g'^2)^{3/2}} a_i \qquad \tilde{z}'' = \frac{f'^2 g'' - f' g' f''}{(f'^2 + g'^2)^{3/2}}$$

所以

$$-\frac{g'}{ff'}\tilde{z}'' x_i = -\frac{g'}{ff'} \cdot \frac{f'^2 g'' - f' g' f''}{(f'^2 + g'^2)^{3/2}} \cdot f a_i = \frac{g'^2 f'' - f' g' g''}{(f'^2 + g'^2)^{3/2}} a_i = \tilde{x}_i''$$

即 $\tilde{x}_i''$、$\tilde{z}''$满足(g)式，且一阶条件 $\tilde{\boldsymbol{x}}'$、$\tilde{z}'$显然满足．由此即知(a)式决定的旋转曲面上的子午线是测地线．

其次再考虑(b)式．易理解，从正则性的要求，应挖去 $f(v) = 0$ 的点．仅需考虑 $f'(v) = 0$ 的旋转曲面．此时，由(k)式即知，旋转曲面等价于圆柱面．故其子午线是平行于 z 轴的直线，从而是测地线．另外，(b)式在形式上又可看成是 $f(v) =$ 常数时的 R^m 空间上的球面．由上一例已推出了球面上的测地线 $\boldsymbol{x}(s)$ 的二阶导数 $\ddot{\boldsymbol{x}}$ 的方程．$\boldsymbol{x}(s)$是球面上的大圆周(应有无穷条这样的大圆周线)．

由此可知，在 R^{m+1}空间上的旋转曲面上的子午线总是曲面的测地线．附带还可知，在子午线上其切方向平行于 z 轴的旋转曲面的点处，存在有无数条过这点的旋转曲面大圆周线(这与 R^3 空间上的情形有些区别)．

但这里要指出，R^m 空间上的旋转曲面上的大圆周线(相当于 R^3 空间旋转曲面上的纬圆周线)只有在这条大圆周线不是该旋转曲面上的拐点曲线时，才能成为测地曲线．否则，它只是渐近曲线．并且它还是渐近曲线中测地挠率为 0 的曲线(见下一章分析)．

以下再对于 R^m 空间上的 n 维曲面上的测地线给予一个简要的说明．

设 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) \in R^m \quad \boldsymbol{u} \in D_u \subset R^n,\ 1 \leqslant n \leqslant m-1,\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(s) \quad s \in D_s \subset R$，$\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}(s))$ 给出了正则参数曲面片 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$上的一条曲线，且 s 是弧长参数．

设 $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \cdots, \boldsymbol{n}_{m-n}$是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面上的法空间的任取的一组正交单位基向量组．利用 $\boldsymbol{n}_1, \cdots, \boldsymbol{n}_{m-n}$，可就 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面，建立(2.4.4.94～95)式表示的 Gauss—Codazzi 方程组．

将(2.4.4.94) 式代入(3.3.1.8)式，并经整理，可得

$$\nabla^2 \boldsymbol{x} = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}(\ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \Gamma \dot{\boldsymbol{u}}) + \Pi \boldsymbol{\beta}(\dot{\boldsymbol{u}}) \qquad —(3.3.3.15)$$

其中

$$\boldsymbol{\beta}(\dot{\boldsymbol{u}}) = (\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Pi}^{1} \dot{\boldsymbol{u}},\ \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Pi}^{2} \dot{\boldsymbol{u}},\ \cdots,\ \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Pi}^{m-n} \dot{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}$$

$$\Pi = [\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{n}_{m-n}]$$

则

$$\kappa_x = \| \nabla^2 \boldsymbol{x} \| = \left(\left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} (\ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \Gamma \dot{\boldsymbol{u}}) \right\|^2 + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{u}}) \boldsymbol{\beta}(\dot{\boldsymbol{u}}) \right)^{1/2} \qquad \text{—(3.3.3.16)}$$

其中

$$\left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} (\ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \Gamma \dot{\boldsymbol{u}}) \right\| = \kappa_s$$

是曲线 $\boldsymbol{x}(s)$的测地曲率. 在 $\boldsymbol{x}(s)$是测地线时,应有

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} (\ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \Gamma \dot{\boldsymbol{u}}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \Gamma \dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0} \qquad \text{—(3.3.1.18)}$$

因此,在 $\boldsymbol{x}(s)$是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面上的测地线时,总有

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s^2} = \Pi \boldsymbol{\beta}(\dot{\boldsymbol{u}}) \qquad \dot{\boldsymbol{u}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s} \qquad \text{—(3.3.3.17)}$$

从而

$$\kappa_x = \| \boldsymbol{\beta}(\dot{\boldsymbol{u}}) \| \qquad \text{—(3.3.3.18)}$$

其中 κ_x 是 $\boldsymbol{x}(s)$的绝对曲率.

现在,(3.3.3.18)式中的 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 其实已由(3.3.1.18)式以内蕴的几何量形式给出. 但在(3.3.3.17)式的等号右边,由 $\boldsymbol{n}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{n}_{m-n}$作为列向量组成的矩阵 Π 可以是任取的. 所以,有以下推论.

推论 3.3.3.2 设 $\boldsymbol{x}(s)$是 R^m 空间上的 n 维正则参数曲面片 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$上的测地线, $\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}(s))$. 则 $\boldsymbol{x}(s)$ 曲线的(绝对) 曲率 $\kappa_x = \| \nabla^2 \boldsymbol{x} \|$, 与 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面在 $\boldsymbol{x}(s)$曲线处的法空间的正交单位基向量组 $\boldsymbol{n}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{n}_{m-n}$的取法无关. ■

证明: 只要证明(3.3.3.17)式中的向量 $\Pi \boldsymbol{\beta}(\dot{\boldsymbol{u}})$是 Π 矩阵的基变换下的不变量即可. 设 $\hat{\Pi}$ 是另取的 $\hat{\boldsymbol{n}}_1,\ \cdots,\ \hat{\boldsymbol{n}}_{m-n}$单位正交基向量组构造的矩阵,则总有正交变换矩阵 Q,使

$$\hat{\Pi} = \Pi Q \qquad Q^{\mathrm{T}} Q = I_{m-n}$$

故

$$\hat{\boldsymbol{n}}_j = \Pi \boldsymbol{q}_j \qquad j = 1,\ \cdots,\ m-n$$

$\boldsymbol{q}_j$ 是 Q 的第 j 列向量. 于是

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}_j}{\partial \boldsymbol{u}} = \sum_{i=1}^{m-n} \frac{\partial \boldsymbol{n}_i}{\partial \boldsymbol{u}} q_{ij}$$

q_{ij} 是 Q 的元素. 即

$$\hat{\boldsymbol{I\!I}}^j = -\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}_j}{\partial \boldsymbol{u}} = \sum_{i=1}^{m-1}\left(-\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{n}_i}{\partial \boldsymbol{u}}\right) q_{ij} = \sum_{i=1}^{m-n} \boldsymbol{I\!I}^i q_{ij}$$

即知

$$\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{I\!I}}^j \dot{\boldsymbol{u}} = \sum_{i=1}^{m-n} \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I\!I}^i \dot{\boldsymbol{u}} \cdot q_{ij}$$

所以,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\dot{\boldsymbol{u}}) = Q^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}(\dot{\boldsymbol{u}})$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\dot{\boldsymbol{u}}) = (\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{I\!I}}^1 \dot{\boldsymbol{u}}, \cdots, \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{I\!I}}^{m-n} \dot{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}$$

即有

$$\hat{\Pi} \hat{\boldsymbol{\beta}}(\dot{\boldsymbol{u}}) = \Pi Q Q^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}(\dot{\boldsymbol{u}}) = \Pi \boldsymbol{\beta}(\dot{\boldsymbol{u}})$$

即证.

在以上的证明中,以及(2.4.4.94)式关于 C_{ij}^h 系数是 $\boldsymbol{I\!I}^h$ 矩阵的元素这一结论中,都依赖于给定的 $\boldsymbol{n}_1, \cdots, \boldsymbol{n}_{m-n}$ 基向量组是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 法空间中的一组单位正交基向量组. 所以,以上推论中的 $\boldsymbol{n}_1, \cdots, \boldsymbol{n}_{m-n}$ 是单位正交的这一条件不能省略.

推论 3.3.3.2 给出了 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面上的测地线的一个特殊的性质. 具备这个性质的最简单曲线当然就是 R^m 空间上的直线. 在直线上,任取正交的法方向 $\boldsymbol{n}_1, \cdots, \boldsymbol{n}_{m-n}$, 直线的曲率肯定恒为 0.

(3.3.3.17)式就是 R^m 空间上的 n 维曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 上的测地线的一个非内蕴几何形式的解(微分方程组). 容易验证,符合(3.3.3.17)式的 $\ddot{\boldsymbol{x}} = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s^2}$, 一定又是以下形式的微分方程组的解,

$$(I_m - \Pi \Pi^{\mathrm{T}}) \ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \qquad —(3.3.3.19)$$

(3.3.3.19)式,在 $n = m-1$ 时,就得到(3.3.3.10)式.

将 R^m 空间上的 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面写成以下一般函数形式

$$\begin{cases} f_1(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \vdots \\ f_{m-n}(\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases} \quad \left(\operatorname{rank} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} = m-n\right) \quad \boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_{m-n})^{\mathrm{T}}$$

则可以方便地直接将梯度向量组$\dfrac{\partial \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{x}}$作正交化(归一化)处理,并可得到列正交的$\Pi$矩阵,并由(3.3.3.19)式直接得到测地线函数.

在以上的规定下,当$n = m - 1$,即得到传统的测地线函数.当$n = 1$,设$\boldsymbol{x}(u) = \boldsymbol{r}(u)$,$u$是弧长函数.

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \nabla \boldsymbol{x} \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial u}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \boldsymbol{I} = \nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{x} = 1$$

故　$\dot{u}^{\mathrm{T}}\Gamma\dot{u} = 0$ 即测地线的内蕴几何方程只能是

$$\ddot{u}(s) \equiv 0$$

这即表明

$$u(s) = s + c$$

这实际是表明对于1维曲线$\boldsymbol{x}(u)$,则其上的测地线就是$\boldsymbol{x}(u)$自身.

对于例2.4.4.5中的R^4空间上的2维曲面$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$,显然,其测地线方程也可由

$$\begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{bmatrix} = 0$$

给出.从而取a, b, c, d常数,作

$$\begin{aligned} u &= as + b \\ v &= cs + d \end{aligned} \quad a,\ c \neq 0 \quad 0 < u,\ v < \frac{\pi}{2}$$

其上的测地线是

$$\boldsymbol{x}(s) = \begin{bmatrix} \cos b\cos as - \sin b\sin as \\ \sin b\cos as + \cos b\sin as \\ \cos d\cos cs - \sin d\sin cs \\ \sin d\cos cs + \cos d\sin cs \end{bmatrix}$$

取$(b = 0,\ d \neq 0)$,$(b \neq 0,\ d = 0)$及$(b = d = 0)$便可以给出$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$上的全部测地线的函数形式.

设$\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}(s))$　$\boldsymbol{u} \in D_r \subset R^n$　$\boldsymbol{x} \in R^m$是n维曲面$\boldsymbol{r}$上的任一条曲线.由(3.3.3.16)式,$\boldsymbol{x}$的曲率κ_x有以下关系式

$$\kappa_x^2 = \kappa_s^2 + \tilde{\kappa}_n^2 \qquad —(3.3.2.22)$$

只不过这里

$$\tilde{\kappa}_n^2 = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{\beta}(\dot{\boldsymbol{u}}) = \sum_{h=1}^{m-n}(\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{I\!I}^{h}\dot{\boldsymbol{u}})^2 \qquad —(3.3.3.20)$$

那么，由以上的分析，对于 n 维曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 上任取的单位正交法向量组 $\boldsymbol{n}_i$ $i=1, \cdots, m-n$，$|\tilde{\kappa}_n|$ 是一个不变量. 将 $|\tilde{\kappa}_n|$ 看成是曲线 $\boldsymbol{x}(s)$ 的**法向曲率**(隐含将测地曲率 κ_s 看成是切向曲率)，则以上结论即表明 $\boldsymbol{x}(s)$ 曲线上的法向曲率 $|\tilde{\kappa}_n|$ 与 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 上的单位正交法向量组的选取方法无关. 当 $\boldsymbol{x}(s)$ 是测地线时，法向曲率自然就是绝对曲率，从而有推论 3.3.3.2 的结论.

在(2.4.4.92)式中，取 Π 矩阵为列正交矩阵，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 向量为这里的 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 向量，从而 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{I}\ \boldsymbol{\alpha} = 1 \quad \Pi^{\mathrm{T}}\Pi = I_{m-n}$，于是(2.4.4.92)式即成为(3.3.3.20)式. 由(2.4.4.93)式的意义即知，当(3.3.3.20)式决定的 $\tilde{\kappa}_n^2$ 满足(2.4.4.93)式时，则 $\tilde{\kappa}_n^2$ 就是(2.4.4.81)式所给出的 $\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{t})$ 的极值. 由 § 2.4.4 节的分析，知这样给出的一定是 $\kappa_s = 0$ 的(极值)曲率线.

§ 3.3.4 附录：线性方向线

总结以上关于曲面上的直线的性状的分析，可知 R^m 空间上的曲面 f 上可能存在的直线只有两类：其一是渐近方向线，其二就是线性方向线. 线性方向线在 R^3 空间的曲面上，可以归于直纹曲面(即可展曲面)的讨论中. 渐近方向线——如上文所述，只能是曲面 f 上的凸曲面片与凹曲面片的分界线而不是曲面的曲率线. 而线性方向线则总是曲面的曲率线.

由于渐近方向线、线性方向线均为直线，所以，若用 $\boldsymbol{x}(s)$ 表示，就一定有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} = \nabla\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{a}\text{— 常数向量} \quad \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = 1 \qquad \text{—(3.3.4.1)}$$

将这一性质与以上的分析综合起来，可有在 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 给出的正则参数曲面片上，

渐近方向线的微分方程

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}\Gamma\ \dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0} \\ \nabla\boldsymbol{n} \perp \nabla\boldsymbol{x} \\ \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\ \dot{\boldsymbol{u}} = \text{const} \end{cases} \qquad \text{—(3.3.4.2)}$$

线性方向线的微分方程

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}\Gamma\ \dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0} \\ \nabla\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \\ \dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\ \dot{\boldsymbol{u}} = \text{const} \end{cases} \qquad \text{—(3.3.4.3)}$$

(3.3.4.3)式中的条件 $\nabla\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ 可仍由图 3.3.2.2 给出说明. 当点 $\boldsymbol{x}^0$ 沿直线 c 移动到 $\boldsymbol{x}^1$ 时，若曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^1$ 与 $\boldsymbol{x}^0$ 点的切平面的单位法方向 $\boldsymbol{n}_1$ 只是 $\boldsymbol{n}$ 沿直线 c 的平移，那么，将 $\boldsymbol{n}_1$ 的始点从 $\boldsymbol{x}^1$ 平移到 $\boldsymbol{x}^0$ 后，$\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n}_0$，故

$$\nabla\boldsymbol{n} = \left.\frac{\boldsymbol{n}_1 - \boldsymbol{n}_0}{\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^0}\right|_{\boldsymbol{x}^1 \to \boldsymbol{x}^0} \equiv \boldsymbol{0}$$

作为比较，以下示例说明渐近方向线可以通过曲面围绕在其上的一条线性方向直线的扭转得到.

例 3.3.4.1 R^3 空间上的直纹曲面

$$z = ay^3 \quad (a < 0)$$

如图 3.3.4.1.则曲面 f 是 Oyz 坐标系上的

$$l: z = ay^3$$

曲线沿 x 轴平移形成的. x 轴及其曲面 f 上与 x 轴平行的直线都是曲面 f 上的线性方向线.

这很容易验证，因这样的直线方程是

$$\boldsymbol{x}(s)\begin{cases} x = s \\ y = y^0 \\ z = z^0 \end{cases} \quad y^0,\ z^0\text{—const}$$

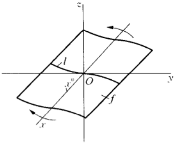


图 3.3.4.1

而由曲面 f 的一般函数形式，是

$$f(\boldsymbol{x}) = z - ay^3 = 0$$

故
$$\nabla f = (0,\ -3ay^2,\ 1)^{\mathrm{T}}$$

$$\widetilde{\mathbf{N}} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = (0,\ -3ay^2,\ 1)^{\mathrm{T}} \cdot (1 + 9a^2y^4)^{-\frac{1}{2}}$$

则在 $\boldsymbol{x}(s)$ 上，$y = y^0$ 是常数，故 $\nabla\widetilde{\mathbf{N}} \equiv \mathbf{0}$.

现对于曲面 f 的两端按箭头方向使其围绕 x 轴产生一个扭转.并设 φ 为其扭转的角度.以 $Oxyz$ 坐标系 x^0 点处的扭转为例，可见下图所示.

图 3.3.4.2 是原点在上图 x 轴上 x^0 点处 Oyz 坐标系绕 x 轴转动的示意

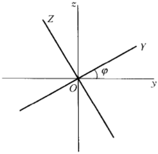


图 3.3.4.2

设 $\varphi = x^0$，则

$$Y = y\cos x^0 + z\sin x^0$$

$$Z = -y\sin x^0 + z\cos x^0$$

由于 x^0 是任取的，故去掉上标"0"，并由

$$Z = aY^3$$

的关系即得扭转后的曲面函数是(取 $a = 1$)

$$\tilde{f}: (-y\sin x + z\cos x) - (y\cos x + z\sin x)^3 = 0$$

所以

$$\nabla\tilde{f} = \begin{bmatrix} -Y - 3Y^2 Z \\ -\sin x - 3Y^2 \cos x \\ \cos x - 3Y^2 \sin x \end{bmatrix}$$

在 x 轴直线上，其函数是

$$\boldsymbol{x}(s) = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \nabla\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

故在 $\boldsymbol{x}(s)$ 直线上有 $Y = Z = 0$，所以在 $\boldsymbol{x}(s)$ 直线上有

$$\nabla\tilde{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin s \\ \cos s \end{bmatrix} = \widetilde{\boldsymbol{N}}$$

由此即知，现在总有

$$\nabla\widetilde{\boldsymbol{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos s \\ -\sin s \end{bmatrix}$$

即知 $\nabla\widetilde{\boldsymbol{N}} \perp \nabla\boldsymbol{x}$. 所以，直纹曲面围绕其中的一条直线扭转后，作为扭转中心轴线的直线依旧是直线，但该直线从原先的线性方向线转变成渐近方向线. 而与之平行的其他直线，扭转后都不再保持为直线（而成为螺线）.

再可以比较一下 x 轴直线上的点，关于曲面主法曲率在扭转后的变动. 在没有扭转的直纹曲面上，沿 x 轴的任一点，显然有

$$\nabla^2 f = [0]$$

故主法曲率 $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$，从而 x 轴是曲面的曲率线.

扭转后，在 x 轴上的任一点处，

$$\nabla^2\tilde{f} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos s & -\sin s \\ -\cos s & 0 & 0 \\ -\sin s & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可得拟特征多项式是

$$\mu^2 = \sin^4 s + \sin^2 s \cdot \cos^2 s + \cos^4 s = 1 - \sin^2 s \cdot \cos^2 s$$

不论 s 取何值 $\mu^2 \neq 0$. 故主法曲率恒不为 0，x 轴线不再是曲率线，而只是渐近方向线.

现在转移到一般曲面函数 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ 给出的 Hessian 矩阵 $H = \nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ 上，由(3.3.4.1)式，以及(2.4.5.32)式，由曲面沿其上的直线切方向的法截曲率为

0 的性质，应有

$$a^{\mathrm{T}} H a = 0 \Leftrightarrow \nabla x^{\mathrm{T}} H \nabla x = 0$$

由这一条件可知，存在渐近方向线的充要条件是 H 矩阵必是不定的，即 H 矩阵含有正数、负数特征值. 而由推论 3.3.1.3 存在线性方向线的充要条件是曲面 f 上直线 $x(s)$ 的切方向向量 ∇x 是 H 的特征向量. 从而 H 必有 0 特征值.

一般地，设 ∇x 是曲面 f 上某一曲（直）线 $x(s)$ 的切向量，则若 ∇x 就是线性方向，那么它一定满足以下条件

$$\begin{cases} \nabla f^{\mathrm{T}}(x)\,\nabla x = 0 \\ H\,\nabla x = \mathbf{0} \\ \nabla x = \text{常数向量} \end{cases} \qquad \nabla x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \qquad —(3.3.4.4)$$

从而 ∇x 一定是加边 Hessian 矩阵 H_∂ 的拟特征值 0 对应的拟特征向量.

将 ∇x 为常数向量放在以下处理. 则一般曲面函数上的线性方向的必要条件是

$$\begin{cases} H\,\nabla x = \mathbf{0} \\ \nabla f^{\mathrm{T}}(x)\,\nabla x = 0 \end{cases} \qquad —(3.3.4.5)$$

此即表示一般曲面函数上存在线性方向的充要条件是

$$\operatorname{rank}[H \vdots \nabla f] = \operatorname{rank} H_\partial < m \qquad —(3.3.4.6)$$

将一般曲面函数转换成 Monge 形式，

$$z = f(x)$$

为方便，依旧设 $x \in D \subset R^m$. 则由

$$F(x,\ z) = z - f(x) = 0$$

得 F 的 Hessian 矩阵是

$$H_F = \begin{bmatrix} -\nabla^2 f(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{T} & 0 \end{bmatrix}$$

梯度向量是 $\nabla F = (-\nabla f^{\mathrm{T}},\ 1)^{\mathrm{T}}$. 注意，现在 H_F 总有 0 特征值，但这不表示 $z = f(x)$ 决定的曲面上总存在线性方向. 由(3.3.4.5)式，现曲面上的线性方向 $(\nabla x^{\mathrm{T}},\ \nabla z)$ 应要求，

$$\begin{cases} -\nabla^2 f(x)\,\nabla x + 0 \cdot \nabla z = -\nabla^2 f(x)\,\nabla x = 0 \\ -\nabla f^{\mathrm{T}}(x)\,\nabla x + \nabla z = 0 \end{cases}$$

显然，现在只要 ∇x 是 $\nabla^2 f(x)$ 的 0 特征值对应的特征向量，令

$$\nabla z = \nabla f^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{x}$$

便可使$(\nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, \nabla z)^{\mathrm{T}}$向量是 H_F 的 0 特征值对应特征向量，并且加边 Hessian 矩阵

$$H_{F_\partial} = \begin{bmatrix} H_F & \nabla F \\ \nabla F^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

就必有 0 拟特征值，而$(\nabla \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, \nabla z)$就是 0 拟特征值对应的拟特征向量.

所以，对于 Monge 形式的曲面函数，存在线性方向的充要条件是

$$\mathrm{rank}\, \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) < m \Leftrightarrow \mathrm{rank} H_{F_\partial} < m \qquad —(3.3.4.7)$$

并可以直接利用

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla \boldsymbol{x} = 0 \qquad —(3.3.4.8)$$

解出线性方向线.

(3.3.4.6～7)式的意义其实已在拟特征值的分析中论述过.

由以上的分析即知，对于一般曲面函数

$$f(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad \boldsymbol{x} \in D \in R^m$$

若将其看成是

$$f(\boldsymbol{x}) + 0 \cdot z = 0 \qquad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m \quad z \in R$$

形式的 R^{m+1}空间上的曲面，它一定是 R^{m+1}空间上的直纹曲面. 因为在 R^{m+1}空间上，曲面任一点处沿

$$(\underbrace{0, \cdots, 0}_{m个}, 1)$$

方向的总是直线.

如 $x^2 + y^2 = 1$ 是 R^2 空间上的圆，但又总可以表示是 R^3 空间上的圆柱面.

以上的分析可以延拓至更高维空间.

直接由 Monge 形式的曲面函数，从(3.3.4.8)式中可得到线性方向线的微分方程.

将 $H = \nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ 矩阵作分块处理，并设 H 的前 $r \times r$ 阶顺序主子矩阵可逆. 这里 $r = \mathrm{rank}\, H$，$r < m$，记

$$H = \begin{bmatrix} H_{rr} & H_{r(m-r)} \\ H_{r(m-r)}^{\mathrm{T}} & H_{(m-r)(m-r)} \end{bmatrix} \qquad —(3.3.4.9)$$

因为 $|H| = 0$，故存在$(m-r) \times r$ 阶矩阵 $B_{(m-r)r}$，

$$B_{(m-r)r} = H_{r(m-r)}^{\mathrm{T}} H_{rr}^{-1} \qquad —(3.3.4.10)$$

并有

$$\begin{cases} H_{r(m-r)}^{\mathrm{T}} = B_{(m-r)r} H_{rr} \\ H_{r(m-r)} = H_{rr} B_{(m-r)r}^{\mathrm{T}} \\ H_{(m-r)(m-r)} = B_{(m-r)r} H_{rr} B_{(m-r)r}^{\mathrm{T}} \end{cases} \qquad —(3.3.4.11)$$

再对$\nabla \boldsymbol{x}$作分块

$$\nabla \boldsymbol{x} = (\nabla \boldsymbol{x}_r^T, \nabla \boldsymbol{x}_{m-r}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \qquad —(3.3.4.12)$$

将(3.3.4.9～12)代入(3.3.4.8)式并整理,可得

$$\begin{cases} \nabla^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} H \nabla^2 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} H_{rr} \boldsymbol{z} = 0 \\ \boldsymbol{z} = \nabla \boldsymbol{x}_r + B_{(m-r)r}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{x}_{m-r} \end{cases} \qquad —(3.3.4.13)$$

可证 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$, 即

$$\nabla \boldsymbol{x}_r + B_{(m-r)r}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{x}_{m-r} = \boldsymbol{0} \qquad —(3.3.4.14)$$

就是(3.3.4.8)式的解.事实上

$$H \nabla \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} H_{rr} & H_{r(m-r)} \\ H_{r(m-r)}^{\mathrm{T}} & H_{(m-r)(m-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla \boldsymbol{x}_r \\ \nabla \boldsymbol{x}_{m-r} \end{bmatrix}$$

将

$$\nabla \boldsymbol{x}_r = - B_{(m-r)r}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{x}_{m-r}$$

的关系代入上一式,便知

$$H \nabla \boldsymbol{x} = [0] \nabla \boldsymbol{x}_{m-r} = \boldsymbol{0} \quad [0] \in R^{m\times(m-r)}$$

用微分符号 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}_r = (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_r)^{\mathrm{T}}$ $\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{m-r} = (\mathrm{d}x_{r+1}, \mathrm{d}x_{r+2}, \cdots, \mathrm{d}x_m)^{\mathrm{T}}$ 分别代替 $\nabla \boldsymbol{x}_r$、$\nabla \boldsymbol{x}_{m-r}$, 则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_r + B_{(m-r)r}^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{m-r} = \boldsymbol{0} \qquad —(3.3.4.15)$$

就是曲面上线性方向的一阶常微分方程组.并且,这里的 $B_{(m-r)r}$ 矩阵应看成是数值矩阵,即若将 x_i 看成是参数 s 的线性函数,那么 $B_{(m-r)r}$ 当然就是与 s 无关的数值矩阵.所以(3.3.4.15)式满足可积性条件,并一定有解.

(3.3.4.15)式的解显然可表成

$$f_i(x_i, x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_m) = c_i \quad i = 1, 2, \cdots, r \qquad —(3.3.4.16)$$

且 $f_i(\cdot)$是关于其变元的线性函数,c_i 是积分常数.

类似地在正则参数曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$上,由

$$\frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \nabla^2 f \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}}{\| \nabla f \|} = \mathit{II} \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \mathrm{d}\boldsymbol{u}$$

的关系，并注意到$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\mathrm{d}\boldsymbol{u}$总是$f(\boldsymbol{x})$的切向量，可知将$\mathbb{I}$矩阵作分块处理，可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u}_r + B^T_{(m-r-1)r}\mathrm{d}\boldsymbol{u}_{(m-r-1)} = \mathbf{0} \qquad —(3.3.4.17)$$

其中应有$r = \mathrm{rank}\,\mathbb{I} < m-1$. $B^T_{(m-r-1)}$是由$\mathbb{I}$矩阵的分块矩阵的子矩阵中得到的一个可视为数值矩阵的子矩阵，意义与以上的$B^T_{(m-r)r}$相似.

(3.3.4.17)式就是以参数表示的曲面线性方向线方程.

曲面的线性方向线与经济学有密切关系. 设

$$u = u(x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

是一个消费者效用函数. 从几何上讲，$u(\boldsymbol{x})$是 Monge 形式的曲面函数. 它在R^{m+1}空间上决定一个曲面(即效用曲面). x_i是消费的第i种商品的数量. 若x_i, x_j之间在消费者看来是可以线性地替代的商品，并设x_i, x_j之间的替代率是$a_i : b_j$，即

$$\frac{x_i}{x_j} = \frac{b_j}{a_i}$$

则x_i, x_j就决定了一个效用曲面上的线性方向. 因为取

$$a_i x_i + b_j x_j = y^{ij}$$

就可以将y^{ij}数量的商品看成是消费者消费的x_i、x_j商品的加总商品. 由x_i, x_j可以线性地(因此是完全地)互相替代，所以，x_i, x_j商品的效用可以完全由y^{ij}来表示.

这样$u(\boldsymbol{x})$函数中所有可线性地替代的商品可以被归类合并成这样的y^{ij}商品. 这就简化了$u(\boldsymbol{x})$的形式，并且，在将$u(\boldsymbol{x})$等价地转变成(适当重新编排下标，并取消上标后)

$$u(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \tilde{u}(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_k)$$

且$n + k < m$. 并且，现在$x_1, x_2, \cdots, y_1, y_2, \cdots$之间(在给出另一些假设时可以)不再有线性关系. 这将使$\tilde{u}$函数可表现为严格凸函数，从而具有良好的性状.

例 3.3.4.2 设有曲面函数

$$z = z(\boldsymbol{x}) = y_1^{\rho} y_2^{1-\rho} \quad 0 < \rho < 1 \quad \boldsymbol{x} \in R^4 \quad y_{1,2} = y_{1,2}(\boldsymbol{x})$$

以及$z(\boldsymbol{x})$的 Hessian 矩阵

$$H = \begin{bmatrix} -y_1^{-2} & y_1^{-1}y_2^{-1} & -ay_1^{-2} & by_1^{-1}y_2^{-1} \\ y_1^{-1}y_2^{-1} & -y_2^{-2} & ay_1^{-1}y_2^{-1} & -by_1^{-1}y_2^{-1} \\ -ay_1^{-2} & ay_1^{-1}y_2^{-1} & a^2y_1^{-2} & aby_1^{-1}y_2^{-1} \\ by_1^{-1}y_2^{-1} & -by_2^{-2} & aby_1^{-1}y_2^{-1} & -b^2y_2^{-2} \end{bmatrix} \cdot \rho(\rho-1)$$

考察 z 曲面上的线性方向.

解：易知 $r = \operatorname{rank} H = 1$. 显然，$y_1, y_2 > 0$，则由上述分块矩阵的符号并省略 $\rho(\rho-1)$ 因子，

$$H_{11} = -y_1^{-2} \quad H_{11}^1 = -y_1^2 \quad H_{13} = (y_1^{-1}y_2^{-1}, -ay_1^{-2}, by_1^{-1}y_2^{-1})$$

便得

$$B_{31}^T = (-y_1y_2^{-1}, a, -by_1y_2^{-1})$$

由(3.3.4.15)式

$$\mathrm{d}x_1 + B_{31}^T\begin{bmatrix}\mathrm{d}x_2\\ \mathrm{d}x_3\\ \mathrm{d}x_4\end{bmatrix} = \mathrm{d}x_1 - y_1y_2^{-1}\mathrm{d}x_2 + a\mathrm{d}x_3 - by_1y_2^{-1}\mathrm{d}x_4 = 0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}(x_1+ax_3)}{y_1} = \frac{\mathrm{d}(x_2+bx_4)}{y_2}$$

显然，将 B_{31}^T 理解为数值或要求上式可积，均可得到以下解

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + ax_3 \\ y_2 = x_2 + bx_4 \end{cases}$$

且线性方向共有 3 个，

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + ax_3 = c_1 \\ y_2 = x_2 + bx_4 = c_2 \\ \dfrac{y_1}{y_2} = c \end{cases} \quad c_1, c_2, c > 0, \text{ const}$$

其中 z 取恒值的曲面，即

$$z = c_1^{\rho}c_2^{1-\rho} = (x_1+ax_3)^{\rho}(x_2+bx_1)^{1-\rho}$$

决定了 R^4 空间中的线性拟凸直纹曲面. 而

$$z = y_1^{\rho}y_2^{1-\rho} \qquad y_1/y_2 = c$$

则决定了 Oy_1y_2z 坐标系上的从原点出发的线性齐次曲面.

这两个线性曲面又都是 R^5 空间上的 z 曲面的局部模型.

还可以看到的是，由(3.3.4.8)式的意义，从线性方向应使

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\nabla\boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{d}(\nabla f(\boldsymbol{x})) = 0 \Rightarrow \nabla f(\boldsymbol{x}) = \text{常数向量} \qquad \text{当 } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$$

这里 $\boldsymbol{x}(s)$ 为曲面上的一个线性方向直线. 因此，从 $\nabla f(\boldsymbol{x})$ 为常数向量的条件也可

以得到曲面线性方向的解. 这是一个更简单的条件.

这一点也可以由(3.3.1.18)式得到验证. 对于 Monge 形式的曲面函数,由定义可直接导出联络系数 Γ_{kj}^{h} 由下式给出

$$\Gamma_{kj}^{h}=\frac{\partial f}{\partial x_h}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_j}/(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f) \qquad \text{—(3.3.4.18)}$$

从而

$$\boldsymbol{\Gamma}_{kj}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_j}\nabla f/(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f) \qquad \text{—(3.3.4.19)}$$

由(3.3.1.18)式,得到 Monge 形式曲面函数决定的曲面上的直线方程是

$$\ddot{\boldsymbol{u}}+\frac{\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\dot{\boldsymbol{u}}}{1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f}\cdot\nabla f=\mathbf{0} \qquad \text{—(3.3.4.20)}$$

注意(3.3.4.20)同时也就是曲面上的测地线微分方程.

但现在由 Monge 形式曲面函数参数化的表示方式,应有

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}\\ z=f(\boldsymbol{u})\end{cases}$$

所以,由曲面法截曲率的定义,知法截曲率 κ_n 是

$$\kappa_n=\frac{(\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\ \nabla z)H_F\begin{bmatrix}\nabla\boldsymbol{x}\\ \nabla z\end{bmatrix}}{(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f)^{1/2}}=\frac{\nabla\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\nabla\boldsymbol{x}}{(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f)^{1/2}}=\frac{\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\dot{\boldsymbol{u}}}{(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f)^{1/2}}$$

因此,若 $\boldsymbol{u}(s)$ 给出的是曲面上的直线,就有 $\kappa_n=0$. 由(3.3.4.20)式便得

$$\ddot{\boldsymbol{u}}=\mathbf{0} \qquad \text{—(3.3.4.21)}$$

且

$$z=f(\boldsymbol{u}(s))$$

也必只能是 s 的一次(线性)函数或者 z 应为常数(即 s 的 0 次函数). 所以,总有 $\nabla f(\boldsymbol{u}(s))=$ 常数.

由(3.3.4.20)式附带地得到在 Monge 形式的曲面函数上,其测地线方程可简写成 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$,

$$\ddot{\boldsymbol{x}}+\kappa_n\widetilde{\mathbf{N}}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}\quad \widetilde{\mathbf{N}}=\frac{\nabla f}{(1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f)^{1/2}} \qquad \text{—(3.3.4.22)}$$

当(3.3.4.22)式中的 $\kappa_n=\kappa_i$(主法曲率)即为曲率线微分方程.

最后可以指出,Monge 形式的曲面函数

$$z = f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$$

上，使 z 取恒值的那些线性方向，在任意的单调增变换 $F(\cdot)$ 作用下是不变的.

设 $F(\cdot)$ 是单调增变换，

$$Z = F(f(\boldsymbol{x}))$$

则 F 的 Hessian 矩阵是

$$H_F = F'' \cdot \nabla f \nabla f^{\mathrm{T}} + F' \cdot \nabla^2 f$$

现设 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的线性方向向量，故 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的切方向向量且又是 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ 矩阵的 0 特征值的特征向量，则因此就总有

$$H_F \mathrm{d}\boldsymbol{x} = F'' \nabla f \nabla f^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} + F' \nabla^2 f \mathrm{d}\boldsymbol{x} = F' \nabla^2 f \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

故总成立

$$H_F \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

即 H_F 有特征值 0，且 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 就是 0 特征值对应的特征向量，故 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 就是 $F(f(\boldsymbol{x}))$ 的线性方向.

在以上的推导中，z 以及 $Z = F(z)$ 均应被视之为常数. 换句话说，在 $z = f(\boldsymbol{x})$ 曲面上，z 的值在一个线性方向上是变动的，则在单调增变换下，这一线性方向可以被变换成非线性方向.

§3.4 拟特征向量与主法曲率—Dupin 标形与渐近线

§3.4.1 R^m 空间上曲面的 Dupin 标形

设 $f(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$ 是 R^m 空间上的一个正则曲面 f 的函数.

$$\kappa_i = -\frac{\mu_i}{\|\nabla f\|} \quad i = 1, 2, \cdots, m-1$$

是曲面 f 在 $\boldsymbol{x}$ 点处的 $m-1$ 个主法曲率（其下标排序是 $\kappa_i \leqslant \kappa_{i+1}$），$\mu_i$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的加边 Hessian 矩阵的拟特征值，$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i \quad i = 1, \cdots, m-1$ 是 μ_i 决定的拟特征向量，$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i = 1$（故 μ_i 的排序应当是 $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{m-1}$，这一点与前面的规定不同）.

则由(3.2.5.1)式，矩阵

$$Q = [\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_2, \cdots, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{m-1}] \in R^{m\times(m-1)}$$

的列向量给出了曲面 f 在 $\boldsymbol{x}$ 点处的切超平面的一组基向量组. 因此，曲面 f 上的 $\boldsymbol{x}^0$ 点处沿任一切线方向 l 直线，可表成以下形式

$$l: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\alpha} t \quad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 1 \quad t \in R \qquad \text{—(3.4.1.1)}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 是曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切超平面上的方向向量，故可将它表成

$$\boldsymbol{\alpha} = Q\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{u} \in R^{m-1} \qquad \text{—(3.4.1.2)}$$

所以，曲面 f 上的 $\boldsymbol{x}^0$ 点沿 l 切线的法截曲率 $\kappa_n(\boldsymbol{\alpha})$，是

$$\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}) = -\frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\, \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}}{\|\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\|} = -\frac{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}}\, \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) Q\boldsymbol{u}}{\|\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\|}$$

由于 Q 矩阵是 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)$ 的 $m-1$ 阶谱分解矩阵，由(3.2.5.3)式即知

$$\begin{cases} \kappa_n(\boldsymbol{\alpha}) = \kappa_1 u_1^2 + \kappa_2 u_2^2 + \cdots + \kappa_{m-1}^2 u_{m-1}^2 & \boldsymbol{\alpha} = Q\boldsymbol{u} \\ u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_{m-1}^2 = 1 \end{cases} \qquad \text{—(3.4.1.3)}$$

(3.4.1.3)式就是 R^m 空间上的 **Euler 公式**.

显然，κ_n(省略"$(\boldsymbol{\alpha})$"符号)的符号上有大于、等于或小于 0 这三种可能. 将(3.4.1.3)式的第二式理解为 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})^{\mathrm{T}}$ 是 R^{m-1} 空间上的单位球面上的一个球径向量. 当然，若所有的 $\kappa_i > 0(< 0)$，则上式的解就是 R^{m-1} 空间上的单位球面. 这是平凡的情形.

现在就(3.4.1.3)式就 κ_n 取>0、$=0$、<0 这三种可能情形给出其解 $\boldsymbol{u}$ 向量集合的构造[1].

(a) $\kappa_n = 0$ 的解集合. (3.4.1.3) 式在 $\kappa_n = 0$ 是

$$\begin{cases} \kappa_1 u_1^2 + \kappa_2 u_2^2 + \cdots + \kappa_{m-1} u_{m-1}^2 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_{m-1}^2 = 1 \end{cases} \qquad \text{—(3.4.1.4)}$$

上式有解的充要条件是

$$\kappa_i = 0 \quad i = 1, \cdots, m-1 \text{ or } \kappa_1 < 0,\ \kappa_{m-1} > 0$$

在 $\kappa_i \equiv 0$ 的情形，相当于是一个脐点，$\boldsymbol{u}$ 向量的解是 R^{m-1} 中的单位球面全体点集合(平凡解). 以下考虑 $\kappa_1 < 0$、$\kappa_{m-1} > 0$ 这一有意义的情形.

将(3.4.1.4)式看成是下列线性等式—不等式方程组，

$$\begin{cases} \kappa_1 u_1^2 + \kappa_2 u_2^2 + \cdots + \kappa_{m-1} u_{m-1}^2 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_{m-1}^2 = 1 \\ \qquad u_i^2 \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 \end{cases} \qquad \text{—(3.4.1.5)}$$

---

[1] 本节以下内容可在读完本书下一章关于线性等式-不等式方程组的解法之后再行阅读.

为方便符号表示,重新编号 κ_i 的下标,使 $\kappa_1 < 0$, $\kappa_2 > 0$. 这样,(3.4.1.5)式的前 2 个等式方程的解是

$$\begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ \vdots \\ u_{m-1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} \\ \dfrac{\kappa_1}{\kappa_1 - \kappa_2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\kappa_2 - \kappa_3}{\kappa_1 - \kappa_2} & \dfrac{\kappa_2 - \kappa_4}{\kappa_1 - \kappa_2} & \cdots & \dfrac{\kappa_2 - \kappa_{m-1}}{\kappa_1 - \kappa_2} \\ \dfrac{-\kappa_1 + \kappa_3}{\kappa_1 - \kappa_2} & \dfrac{-\kappa_1 + \kappa_4}{\kappa_1 - \kappa_2} & \cdots & \dfrac{-\kappa_1 + \kappa_{m-1}}{\kappa_1 - \kappa_2} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{t} \tag{—(3.4.1.6)}$$

其中 $\boldsymbol{t} \in R^{m-3}$, $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_{m-3})^{\mathrm{T}}$

将(3.4.1.6)式再代入(3.4.1.5)式的第三式(不等式组),有

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m-3} \frac{\kappa_2 - \kappa_{i+2}}{\kappa_1 - \kappa_2} t_i \geqslant \frac{\kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m-3} \frac{-\kappa_1 + \kappa_{i+2}}{\kappa_1 - \kappa_2} t_i \geqslant -\frac{\kappa_1}{\kappa_1 - \kappa_2} \\ t_j \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \cdots, m-3 \end{cases} \tag{—(3.4.1.7)}$$

(3.4.1.7)式是 $\begin{cases} Cx \geqslant b \\ x \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$ 形式的不等式方程组. 这一方程组的解集合的构造,可由多胞形表示定理予以确定(见本书下一章).

将(3.4.1.7)式的前两个不等式相加,即知有

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{m-3} t_i \geqslant -1 \\ t_j \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \cdots, m-3 \end{cases}$$

从而可知

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{m-3} t_i \leqslant 1 \qquad t_i \geqslant 0 \tag{—(3.4.1.8)}$$

所以,(3.4.1.8)式的解一定是一个凸组合而不是一个凸锥,因为 t_i 有界. 并且在(3.4.1.7)式中,前两个不等式的右边

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} < 0, \ -\frac{\kappa_1}{\kappa_1 - \kappa_2} < 0$$

故 $t_j = 0$, $j = 1, 2, \cdots, m-3$ 是一个特解，并且一定是解集合(凸组合)的顶点(之一). 由此可知存在凸组合解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}^0$，使

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\Phi}^0 \boldsymbol{\zeta} \qquad \boldsymbol{\zeta} \geqslant \boldsymbol{0} \quad 0 \leqslant \sum_i \zeta_i \leqslant 1 \qquad —(3.4.1.9)$$

(b) $\kappa_n \geqslant 0$ 的解集合. (3.4.1.3)式是

$$\begin{cases} \kappa_1 u_1^2 + \kappa_2 u_2^2 + \cdots + \kappa_{m-1} u_{m-1}^2 \geqslant 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_{m-1}^2 = 1 \\ u_j^2 \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \cdots, m-1 \end{cases} \qquad —(3.4.1.10)$$

现由(3.4.1.10)式的第 2 式得通解

$$\begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ \vdots \\ u_{m-1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{s} \qquad \boldsymbol{s} \in R^{m-2} \qquad —(3.4.1.11)$$

将(3.4.1.11)式再代入(3.4.1.10)式的第 1、3 两(组)不等式，得

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m-2} (-\kappa_1 + \kappa_{i+1}) s_i \geqslant -\kappa_1 \\ -\sum_{i=1}^{m-2} s_i \geqslant -1 \\ s_j \geqslant 0 \quad j = 1, \cdots, m-2 \end{cases} \qquad —(3.4.1.12)$$

这也是 $\begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$ 形式的不等式方程组. 由上式的第 2、3 个(组)不等式，可知

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{m-2} s_i \leqslant 1 \quad s_i \geqslant 0 \qquad —(3.4.1.13)$$

并注意已设 $\kappa_1 < 0 \Rightarrow -\kappa_1 > 0$，故 $s_i = 0 \quad i = 1, \cdots, m-2$ 不是(3.4.1.12)式的解. 这样，其解一定可表示为

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\Phi}^+ \boldsymbol{\xi} \qquad \boldsymbol{\xi} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \sum_i \xi_i = 1 \qquad —(3.4.1.14)$$

(c) $\kappa_n \leqslant 0$ 的解集合. (3.4.1.3)式是

$$\begin{cases} -\kappa_1 u_1^2 - \kappa_2 u_2^2 - \cdots - \kappa_{m-1} u_{m-1}^2 \geqslant 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_{m-1}^2 = 1 \\ u_j^2 \geqslant 0 \quad j = 1, \cdots, m-1 \end{cases} \qquad \text{—(3.4.1.15)}$$

类似对于(3.4.1.10)式的作法,可得

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m-2} (\kappa_1 - \kappa_{i+1}) s_i \geqslant \kappa_1 \\ -\sum_{i=1}^{m-2} s_i \geqslant -1 \\ s_j \geqslant 0 \quad j = 1, \cdots, m-2 \end{cases} \qquad \text{—(3.4.1.15a)}$$

由 $\kappa_1 < 0$,可知 $s_j = 0 \quad j = 1, \cdots, m-2$ 是上式的解,同时是上式解集合凸组合的顶点之一. 所以,可将上式解表成

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\Phi}^- \boldsymbol{\eta} \quad \boldsymbol{\eta} \geqslant \boldsymbol{0} \quad 0 \leqslant \sum_i \eta_i \leqslant 1 \qquad \text{—(3.4.1.16)}$$

将(3.4.1.9)式代回到(3.4.1.6)式,(3.4.1.14)式、(3.4.1.16)式代回到(3.4.1.11)式,并注意(3.4.1.9)、(3.4.1.14)和(3.4.1.16)式给出的解均为凸组合,故这样代回后,得到的 u_i^2 的解也是一个凸组合(经平移). 从而,这样的 u_i^2 因子的解集合可记为(不改用新符号)

$$\left.\begin{aligned} \kappa_n = 0 \quad & \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ \vdots \\ u_{m-1}^2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}^0 \boldsymbol{\zeta} \qquad \boldsymbol{\zeta} \geqslant 0 \quad \sum_i \zeta_i = 1 \\ \kappa_n \geqslant 0 \quad & \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ \vdots \\ u_{m-1}^2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}^+ \boldsymbol{\xi} \qquad \boldsymbol{\xi} \geqslant 0 \quad \sum_i \xi_i = 1 \\ \kappa_n \leqslant 0 \quad & \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ \vdots \\ u_{m-1}^2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}^- \boldsymbol{\eta} \qquad \boldsymbol{\eta} \geqslant 0 \quad \sum_i \eta_i = 1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{—(3.4.1.17)}$$

如何用线性不等式方程的解来确定上述的各 Φ 矩阵,可见本书下一章 §4 节内容. 在稍后,还会直接给出 Φ 矩阵的构造方法. 以下给出一个示例.

例 3.4.1.1 设已知 $\kappa_1 = -2$, $\kappa_2 = 1$, $\kappa_3 = 2$, $\kappa_4 = 2$ 是 R^5 空间上某曲面上一点处的主法曲率,要求 $\kappa_n \geqslant$、$=$、$\leqslant 0$ 时 Euler 公式中的 u_i^2 因子的解集合.

(1) $\kappa_n = 0$ 的解

$$\begin{cases} -2u_1^2+u_2^2+2u_3^2+2u_4^2=0 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=1 \\ u_i^2\geqslant 0 \quad i=1,2,3,4 \end{cases}$$

由前 2 个等式方程，按(3.4.1.6)式，得其通解是

$$\begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{t} \qquad \boldsymbol{t}\in R^2 \qquad \text{—(a)}$$

得(3.4.1.7)式的不等式方程组

$$\begin{cases} t_1+t_2\geqslant -1 \\ -2t_1-2t_2\geqslant -1 \\ t_1,\ t_2\geqslant 0 \end{cases}$$

由此即可得解

$$\boldsymbol{t}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\boldsymbol{\zeta} \qquad \boldsymbol{\zeta}\in R^2 \quad 0\leqslant \zeta_1+\zeta_2\leqslant 1$$

将此解代入(a)式，得

$$\begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\boldsymbol{\zeta} \qquad \zeta_1,\ \zeta_2\geqslant 0 \quad 0\leqslant \zeta_1+\zeta_2\leqslant 1$$

显然，上式可表示成下式

$$\begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\boldsymbol{\zeta} \quad \boldsymbol{\zeta}\in R^3 \quad \zeta_1+\zeta_2+\zeta_3=1 \quad \zeta_i\geqslant 0 \qquad \text{—(b)}$$

(b)式等号右边的矩阵就是(3.4.1.17)式中的 Φ^0 矩阵. 易验证对任一满足(b)式条件的 $\boldsymbol{\zeta}$ 向量,有

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\Phi^0\boldsymbol{\zeta}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{\zeta}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

故(b)式就是该曲面上这一点处法截曲率为 0 的 u_i^2 因子的全体集合.

(2) $\kappa_n \geqslant 0$ 的解. 由(3.4.1.10)式

$$\begin{cases}-2u_1^2+u_2^2+2u_3^2+2u_4^2\geqslant 0\\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=1\\ u_i^2\geqslant 0 \quad i=1,2,3,4\end{cases}$$

由(3.4.1.11)式,得以上第二个等式方程的通解

$$\begin{bmatrix}u_1^2\\ u_2^2\\ u_3^2\\ u_4^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{s} \qquad \boldsymbol{s}\in R^3 \qquad \text{—(c)}$$

将(c)式再代入前一方程组的各不等式,有

$$\begin{cases}3s_1+4s_2+4s_3\geqslant 2\\ -s_1-s_2-s_3\geqslant -1\\ s_i\geqslant 0 \quad i=1,2,3\end{cases}$$

解这一组不等式,可得其解集合

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{\xi} \quad \boldsymbol{\xi}\in R^6 \quad \boldsymbol{\xi}\geqslant\boldsymbol{0} \quad \sum_1^6\xi_i=1$$

再将此解代入(c)式,得

$$\begin{bmatrix}u_1^2\\ u_2^2\\ u_3^2\\ u_4^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & -1\\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{\xi}$$

由 ξ 向量的性质即知上式等价于下式

$$\begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \quad \boldsymbol{\xi} \in R^6 \quad \boldsymbol{\xi} \geqslant \mathbf{0} \quad \sum_1^6 \xi_i = 1 \quad —(\mathrm{d})$$

(d)式右边的矩阵就是(3.4.1.17)式中的 Φ^+ 矩阵. 易知

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Phi^+ \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} [0,\ 2] \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中最右端[·]中的[0,2]表示取值闭区间.

可注意到 Φ^0 矩阵的列向量被 Φ^+ 矩阵所包含. 这即是曲面上一点处的法截曲率 $\kappa_n \geqslant 0$ 区域与 $\kappa_n = 0$ 区域相交的边界区域的特征.

(3) $\kappa_n \leqslant 0$ 的解. 类似,有

$$\begin{cases} 2u_1^2 - u_2^2 - 2u_3^2 - 2u_4^2 \geqslant 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1 \\ u_i^2 \geqslant 0 \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \end{cases}$$

仍利用(c),可得

$$\begin{cases} -3s_1 - 4s_2 - 4s_3 \geqslant -2 \\ -s_1 - s_2 - s_3 \geqslant -1 \\ s_i \geqslant 0 \quad i = 1,\ 2,\ 3 \end{cases}$$

可得到这一不等式方程组的解集合是

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \quad \boldsymbol{\eta} \in R^3 \quad \boldsymbol{\eta} \geqslant \mathbf{0} \quad 0 \leqslant \sum_1^3 \eta_i \leqslant 1$$

将这一结果代回到(c)式,得

$$\begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}$$

再由 $\boldsymbol{\eta}$ 向量的性质，即知上式可表示成下式

$$\begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \quad \boldsymbol{\eta} \in R^4 \quad \boldsymbol{\eta} \geqslant \mathbf{0} \quad \sum_1^4 \eta_i = 1 \qquad \text{—(e)}$$

(e)式右边的矩阵就是(3.4.1.17)式中的 Φ^- 矩阵. 易证

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Phi^- \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} [-2,\ 0] \\ 1 \end{bmatrix}$$

同样，Φ^0 矩阵的列向量也被 Φ^- 矩阵所包含.

当所有 $\kappa_i > 0$，已指出 u_i^2 因子解即为 R^{m-1} 上的单位球面，$\kappa_i < 0$，$\kappa_i = 0$ 类似. 当 $\kappa_i \geqslant 0$，且至少有一个 $\kappa_j = 0 \quad \kappa_h > 0\ (h \neq i,\ j)$，那么，(3.4.1.17) 式中就没有 $\Phi^-\ \boldsymbol{\eta}$ 表示的解，当 $\kappa_i \leqslant 0$，且至少有一个 $\kappa_j = 0 \quad \kappa_h < 0$，(3.4.1.17)式就没有 $\Phi^+ \boldsymbol{\xi}$ 表示的解.

(3.4.1.17)式给出的解集合表示了 R^{m-1} 空间上 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} = 1$ 决定的单位球面关于 κ_n 符号的分区.

为便于应用，以下不加说明直接给出构造 Φ 矩阵的方法. 设

$$\begin{cases} I^- = \{i \mid i = j \quad \text{当}\ \kappa_j < 0 \quad j = 1,\ \cdots,\ m-1\} \\ I^0 = \{i \mid i = j \quad \text{当}\ \kappa_j = 0 \quad j = 1,\ \cdots,\ m-1\} \\ I^+ = \{i \mid i = j \quad \text{当}\ \kappa_j > 0 \quad j = 1,\ \cdots,\ m-1\} \end{cases} \text{—(3.4.1.18)}$$

即 $I^{-,\,0,\,+}$ 集合是主法曲率 κ_j 的下标子集合，且，

$$\{1,\ 2,\ \cdots,\ m-1\} = I^- \cup I^0 \cup I^+$$

设 n^-、n^0、n^+ 分别是 I^-、I^0、I^+ 集合的元素个数. 将 I^-、I^+ 集合的元素，按递增排列，分别记为 $i_1,\ i_2,\ \cdots \in I^-$ 和 $j_1,\ j_2 \cdots \in I^+$，而将 I^0 集合的元素记为 $h_1,\ h_2,\ \cdots$.

对任一 $i_p \in I^-$，构造 $\Phi(i_p)$ 矩阵

$$\Phi(i_p) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ \dfrac{\kappa_{j_1}}{|\kappa_{i_p}|+\kappa_{j_1}} & \dfrac{\kappa_{j_2}}{|\kappa_{i_p}|+\kappa_{j_2}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ \dfrac{|\kappa_{i_p}|}{|\kappa_{i_p}|+\kappa_{j_1}} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & \dfrac{|\kappa_{i_p}|}{|\kappa_{i_p}|+\kappa_{j_2}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}}_{\text{共计}n^+\text{列}} \begin{array}{l} \\ \\ \to \text{第 } i_p \text{ 行} \\ \\ \to \text{第 } j_1 \text{ 行} \\ \\ \to \text{第 } j_2 \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \qquad \text{—(3.4.1.19)}$$

$\Phi(i_p) \in R^{(m-1)\times n^+}$，$\Phi(i_p) \geqslant 0$.

则(3.4.1.17)式中的 Φ 矩阵可表成

$$\begin{cases} \Phi^0 = [\Phi(i_1),\ \Phi(i_2),\ \cdots,\ \Phi(i_{n^-}),\ \boldsymbol{e}_{h_1},\ \boldsymbol{e}_{h_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_{h_{n^0}}] \\ \Phi^+ = [\Phi^0,\ \boldsymbol{e}_{j_1},\ \boldsymbol{e}_{j_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_{j_{n^+}}] \\ \Phi^- = [\Phi^0,\ \boldsymbol{e}_{i_1},\ \boldsymbol{e}_{i_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_{i_{n^-}}] \end{cases} \qquad \text{—(3.4.1.20)}$$

这里的 $\boldsymbol{e}_i$ 是 I_{m-1} 单位矩阵的第 i 列向量. 这样(3.4.1.17)式中的

$$\Phi^0 \in R^{(m-1)\times(n^- n^+ + n^0)} \quad \Phi^+ \in R^{(m-1)\times(n^- n^+ + n^0 + n^+)} \quad \Phi^- \in R^{(m-1)\times(n^- n^+ + n^0 + n^-)}$$

$$\boldsymbol{\zeta} \in R^{n^- n^+ + n^0} \quad \boldsymbol{\xi} \in R^{n^- n^+ + n^0 + n^+} \quad \boldsymbol{\eta} \in R^{n^- n^+ + n^0 + n^-}$$

Φ 矩阵列向量的排列次序是可以任意的选定的.

注意现在得到的还只是(3.4.1.17)式关于 $u_i^2 \quad i = 1, \cdots, m-1$ 平方因子的解集合. 作变换

$$t_i = u_i^2 \quad i = 1, \cdots, m-1 \quad \sum_i t_i = 1 \quad t_i \geqslant 0$$

则 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_{m-1})^{\mathrm{T}}$ 是 R^{m-1} 正象限上顶点在坐标平面的超平面上的点. 记

$$\begin{cases} \boldsymbol{t}^0 = \Phi^0 \boldsymbol{\zeta} \\ \boldsymbol{t}^+ = \Phi^+ \boldsymbol{\xi} \quad \boldsymbol{\zeta},\ \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \sum_i \zeta_i,\ \xi_i,\ \eta_i = 1 \\ \boldsymbol{t}^- = \Phi \boldsymbol{\eta} \end{cases} \qquad \text{—(3.4.1.21)}$$

给出了这个超平面上的一个曲面法截曲率符号分区的表示.

将以上的 $\boldsymbol{t}^0$、$\boldsymbol{t}^+$、$\boldsymbol{t}^-$ 的分量再开平方就可得到 R^{m-1} 空间上的单位球面上关于曲面法截曲率符号分区的表示.

现以 $m-1=2$ 为例对以上分析加以说明. 在图 3.4.1.1 中,直线段 l 代表了 $t_1+t_2=1 \quad t_1, t_2 \geqslant 0$ 决定的线段. 显然

$$u_1=\pm\sqrt{t_1} \quad u_2=\pm\sqrt{t_2}$$

就是 l 上的任一点 $\boldsymbol{t}=(t_1, t_2)^{\mathrm{T}}$ 的分量(坐标值)开方变换. 如 l 上的 a 点.

$$t_1=\overline{Ob} \quad t_2=\overline{Oc}$$

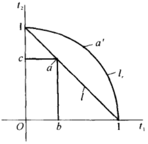


图 3.4.1.1

则$\left(\sqrt{\overline{Ob}}, \sqrt{\overline{Oc}}\right)$坐标就决定了 a'点. 显然,a'点是单位圆周 l_r 上的点. 那么,由符号的取法

$$\left(-\sqrt{\overline{Ob}}, -\sqrt{\overline{Oc}}\right),\ \left(-\sqrt{\overline{Ob}}, \sqrt{\overline{Oc}}\right),\ \left(\sqrt{\overline{Ob}}, -\sqrt{\overline{Oc}}\right),\ \left(\sqrt{\overline{Ob}}, \sqrt{\overline{Oc}}\right)$$

都是单位圆周上的点. 故 $\boldsymbol{t}$ 的分量开方变换是一到多的变换. 将这一变换得到的点连接起来,即是单位圆周. 将 l 线段看成是单位圆周在 Ot_1t_2 坐标系正象限上的(最大)弦,则可将以上开方变换简述为"弦的开方是圆".

再考虑主法曲率的符号分区问题. 现在如图 3.4.1.2,在 Ot_1t_2 正象限的 $l=\overline{ab}$ 线段(意义同上图)上有 c 点,分割 l 线段为$\overline{ca}$、$\overline{cb}$,使 $c_1=(t_1^{c_1}, t_2^{c_1})$ 点处,

$$\kappa_1 t_1^{c_1}+\kappa_2 t_2^{c_1}<0$$

这里设 $\kappa_1<0$, $\kappa_2>0$. 同样,在 $c_2=(t_1^{c_2}, t_2^{c_2})$ 点处,有

$$\kappa_1 t_1^{c_2}+\kappa_2 t_2^{c_2}>0$$

因此,在 $c=(t_1^c, t_2^c)$ 点处,应有

$$\kappa_1 t_1^c+\kappa_2 t_2^c=0$$

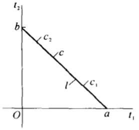


图 3.4.1.2

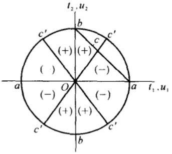


图 3.4.1.3

设 c 点的坐标开方对应到单位圆周上的 c' 点，如图 3.4.1.3，这样的 c' 点由开方号前的符号选取应有 4 个，且这 4 个 c' 点由镜面映射的对称关系，两两在一条过原点的直线上. 并且这样的开方映射，使 t_1、t_2 轴被 $c'c'$ 直线分割. t_1 轴所在的 $c'c'$ 直线所夹区域（是两个对顶的扇形），就是法截曲率为负的区域. 这里的意思是，将 Ot_1t_2 坐标系的原点视为曲面上的 $\boldsymbol{x}^0$ 点，$\kappa_1 < 0$，$\kappa_2 > 0$ 是曲面 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的主法曲率，那么，曲面上过 $\boldsymbol{x}^0$（即 Ot_1t_2 原点）的切线位于 t_1 轴所在的 $c'c'$ 线所夹的区域，这一切线决定的曲面法截曲率为负，切线位于 t_2 轴所在的 $c'c'$ 线所夹区域，则曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的法截曲率为正，切线如与 $c'c'$ 线重合，则切线方向上的曲面法截曲率为 0.

注意 t_1 轴正半轴上的 a 点的开方对应点只有 1 个即 t_1 负半轴上的 a 点，t_2 轴上的 b 点类似.

将 t_1，t_2 轴同时理解为 u_1，u_2 轴，则以上关于法截曲率符号的分区，可以对应到 Ou_1u_2 坐标系上的单位圆周上的弧的分区. 易理解，在图 3.4.1.3 上的 $\widehat{c'ac'}$ 弧上的点的坐标 u_1、u_2，都使

$$\kappa_1 u_1^2 + \kappa_2 u_2^2 \leqslant 0$$

在 $\widehat{c'bc'}$ 弧上的点的坐标 u_1、u_2，均使

$$\kappa_1 u_1^2 + \kappa_2 u_2^2 \geqslant 0$$

上两式中的等号，仅在取单位圆周上的 c' 点时成立.

在 R^m 空间上，依旧可利用以上的分析. 如将(3.4.1.21)式得到的 $\boldsymbol{t}^0$ 集合作开方变换，就得到 R^{m-1} 空间上原点在曲面 f 上的 $\boldsymbol{x}^0$ 点的坐标系上的单位超球面上的一个区域. 这个区域即相当于以上的 c' 点. 而 $\boldsymbol{t}^0$ 集合的开方，其实就是指 Φ^0 矩阵的元素的开方. 具体可见以下示例.

类似地，也就可以对 $\boldsymbol{t}^-$、$\boldsymbol{t}^+$ 集合予以开方变换，从而将 R^{m-1} 上的单位超球的球面确定出对应的 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的曲面法截曲率的符号分区.

在这里，曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的任一切方向上法截曲率的绝对值并不是关注的要点，而关注的仅是法截曲率的符号.

法截曲率的符号的几何意义很重要. 在曲面 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域，具有相同符号的法截曲率对应的法截曲线都位于曲面切平面的同一侧，否则，就位于异侧，法截曲率为 0，则法截曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域即为直线（或拐点），从而位于切平面上. 由于切平面一侧的法截曲线全体就是这一侧的曲面本身，故又可以说是法截曲率符号给出了曲面被一点处的切平面分割的信息[1].

利用开方变换以后的各 Φ 矩阵，规定 $(\Phi^0\boldsymbol{\zeta})^{1/2}$ 符号表示 $\Phi^0\boldsymbol{\zeta}$（乘积）向量各分

---

〔1〕 附带说明，设 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 给出了 R^m 空间上的一个超平面，那么，对任一 $\boldsymbol{y} \in R^m$，则若 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} > \boldsymbol{b}$，就说 $\boldsymbol{y}$ 在这一超平面的正向一侧，反之则说 $\boldsymbol{y}$ 位于这一超平面的负向一侧，或位于超平面上（当 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$）.

量开方，且$\pm\sqrt{\cdot}$前恒取为+. 作

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}^0 = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} = Q(\Phi^0\boldsymbol{\zeta})^{\frac{1}{2}} \quad \boldsymbol{\zeta} \geqslant \mathbf{0} \quad \sum_i \zeta_i = 1\} \\ \boldsymbol{\alpha}^+ = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} = Q(\Phi^+\boldsymbol{\xi})^{\frac{1}{2}} \quad \boldsymbol{\xi} \geqslant \mathbf{0} \quad \sum_i \xi_i = 1\} \\ \boldsymbol{\alpha}^- = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} = Q(\Phi^-\boldsymbol{\eta})^{\frac{1}{2}} \quad \boldsymbol{\eta} \geqslant \mathbf{0} \quad \sum_i \eta_i = 1\}\end{cases} \quad —(3.4.1.22)$$

就得到了R^m空间上曲面在$\boldsymbol{x}^0$点处的切平面上以拟特征向量$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$为基向量组的局部坐标系上的法截曲率符号分区的表示. 这里的Q矩阵就是拟特征向量$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$组成的矩阵，且$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$的下标顺序是按$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{m-1}$的顺序排列，$\mu_i$是拟特征值[1]. (3.4.1.22)式中$Q$矩阵的各列向量$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$前应理解为有±符号选择. 通过$\pm\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$的符号选择，即可构造出$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$标架系不同象限上的法曲率符号分区.

从而，曲面上$\boldsymbol{x}^0$点处沿$\boldsymbol{\alpha}$切方向的法截曲率

$$\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}) = -\frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\ \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}}{\|\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\|}\begin{cases}= 0 & \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\alpha}^0 \\ \geqslant 0 & \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\alpha}^+ \\ \leqslant 0 & \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\alpha}^-\end{cases} \quad —(3.4.1.23)$$

由于$\boldsymbol{\alpha}$向量是在过$\boldsymbol{x}^0$点的曲面的切超平面上，从$\boldsymbol{x}^0$点出发的方向向量. 在$\boldsymbol{x}^0$点的邻域，(3.4.1.23)式就给出了曲面与切超平面相对位置的一个分类. 当$\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\alpha}^+$，则这部分$\boldsymbol{\alpha}$向量全体决定的切超平面，曲面是位于其正向一侧的；当$\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\alpha}^-$，则曲面位于切超平面的负侧；$\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\alpha}^0$，曲面是与切超平面相切(或相交).

如将Φ矩阵的各元素开方(取+号)，记为$(\Phi)^{1/2}$，构造

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}^0 = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} = Q(\Phi^0)^{1/2}\boldsymbol{\zeta} \quad \boldsymbol{\zeta} \geqslant \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta} = 1\} \\ \boldsymbol{\alpha}^+ = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} = Q(\Phi^+)^{1/2}\boldsymbol{\xi} \quad \boldsymbol{\xi} \geqslant \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = 1\} \\ \boldsymbol{\alpha}^- = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} = Q(\Phi^-)^{1/2}\boldsymbol{\eta} \quad \boldsymbol{\eta} \geqslant \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta} = 1\}\end{cases} \quad —(3.4.1.22a)$$

则(3.4.1.22a)式即为(3.4.1.22)式线性近似锥. $(\Phi)^{1/2}$矩阵的各列向量就是这个线性锥的极方向向量. 而(3.4.1.22)式给出的一般不是线性锥.

例 3.4.1.2　R^4空间上，有曲面

$$z = x_1 + \frac{x_3}{x_2} \quad x_1,\ x_3 \in R \quad 0 < x_2 < +\infty$$

有　$F(\boldsymbol{x},\ z) = z - x_1 - \dfrac{x_3}{x_2} = 0$

---

[1] 在这里规定的μ_i排序下，使主法曲率κ_i的排序刚好是递增排序.

$$\nabla F = \begin{bmatrix} -1 \\ \dfrac{x_3}{x_2^2} \\ -\dfrac{1}{x_2} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \nabla^2 F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\dfrac{x_3}{x_2^3} & \dfrac{1}{x_2^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{x_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

易知，$\nabla^2 F$ 的加边矩阵的拟特征多项式是

$$\left(2+\frac{1}{x_2^2}+\frac{x_3^2}{x_2^4}\right)\mu^3+4\frac{x_3}{x_2^3}\mu^2-\frac{2}{x_2^4}\mu=0$$

从而可知 3 个拟特征值总是 $\mu_1>0$，$\mu_2=0$，$\mu_3<0$. 所以，在这一曲面上的任一点处的 3 个主法曲率恒有 $\kappa_1<0$，$\kappa_2=0$，$\kappa_3>0$ 成立.

为简单起见，不妨取 $\bar{x}^0=(x^0, z^0)=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$ 为例. 可得该点处的 3 个主法曲率是 $\kappa_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ $\kappa_2=0$ $\kappa_3=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

$$\nabla^2 F(x^0, z^0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \nabla F(x^0, z^0)=(-1,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$$

从而得到拟特征向量是

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1=\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_3=\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$$

以及(3.4.1.21)式中的非负 Φ 矩阵，

$$\Phi^0=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad \Phi^+=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Phi^-=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

将这些 Φ 矩阵的元素开方，得(3.4.1.22a)式中

$$(\Phi^0)^{1/2}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}\quad (\Phi^+)^{1/2}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1\end{bmatrix}\quad (\Phi^-)^{1/2}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

而由(3.4.1.22)式给出的法曲率分区，如 $\boldsymbol{\alpha}^+$ 则可表为

$$\boldsymbol{\alpha}^+=\pm\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1\cdot\left(\frac{1}{2}\zeta_1\right)^{1/2}\pm\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2\cdot(\zeta_2)^{1/2}\pm\hat{\boldsymbol{\alpha}}_3\cdot\left(\frac{1}{2}\zeta_1+\zeta_3\right)^{1/2}$$

$$\zeta_i\geqslant 0\quad \sum_i\zeta_i=1$$

$\boldsymbol{\alpha}^{0,-}$ 类似. 而 $(\Phi^0)^{1/2}$ 等矩阵的各列向量就是 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 标架系(正象限)上法曲率分区线性近似锥的极方向向量.

现在可以在 R^3 空间上画出 u 单位球面上关于法截曲率符号分区的图形. 如图 3.4.1.4 所示. 这里只标出了 R^3 正象限上的 1/8 个球面上的分区. c 点就是坐标为 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$ 的点. c 点到 $(0,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$ 点的圆周弧 l^0 就是法截曲率为 0 的 $\boldsymbol{u}$ 点的集合. l^+ 球面、l^- 球面上的点则分别是法截曲率取正值、负值的点的集合.

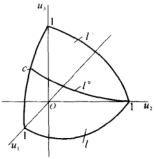


图 3.4.1.4

由此可见 Φ 矩阵(开方后)的列向量所给出的就是 R^{m-1} 空间上 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=1$ 单位球面上法截曲率符号分区凸组合的顶点.

如对于法曲率为 0 的分区，即 l^0 曲线，在图 3.4.1.4 的 $Ou_1u_2u_3$ 坐标系的正象限上是

$$\boldsymbol{u}(\zeta)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta^{1/2},\ (1-\zeta)^{1/2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta^{1/2}\right)^{\mathrm{T}}\quad \zeta\in[0,\ 1]$$

则

$$\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}(\zeta)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\zeta)^{1/2},\ \zeta^{1/2},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\zeta)^{1/2}\right)^{\mathrm{T}}\quad \zeta\in[0,\ 1]$$

就代表了 R^4 空间上曲面在 $\bar{\boldsymbol{x}}^0$ 点处的切平面上的一个切方向. 在这个切方向上，曲面在 $\bar{\boldsymbol{x}}^0$ 点处的法曲率为 0. 取 Q 矩阵各列向量前的 $\pm$ 符号，就可以由 $\zeta\in[0,\ 1]$ 给出法曲率为 0 的全部切方向.

作为比较，再给出以下曲面的法截曲率分区.

例 3.4.1.3 R^4 空间中的曲面

$$z = f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

由

$$F(\bar{\boldsymbol{x}}) = z - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$$

$$\nabla F = (-2x_1, -2x_2, 2x_3, 1)^{\mathrm{T}}$$

$$\nabla^2 F = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可得拟特征多项式

$$(\mu + 2)((1 + 4\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\mu^2 - 8z\mu - 4) = 0$$

故拟特征值是

$$\mu = -2 \text{ and } \mu = 2\,\frac{2z \pm \sqrt{1 + 4(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + z^2)}}{1 + 4\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$$

可知 $\mu_{1,2,3} \neq 0$. 从而曲面在任一点处的主法曲率 $\kappa_{1,2,3} \neq 0$. 并且，κ_i 中总是一个负数、两个正数.

取 $\bar{\boldsymbol{x}}^0 = (\boldsymbol{x}^0, z^0) = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{8}}, -\frac{1}{8}\right)^{\mathrm{T}}$ 为例. 可得 $\bar{\boldsymbol{x}}^0$ 点处的拟特征值是 $\mu_1 = \frac{4}{3}$ $\mu_2 = \mu_3 = -2$. 由 $\|\nabla F\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$，即得主法曲率

$$\kappa_1 = -\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \quad \kappa_2 = \kappa_3 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

所以

$$(\boldsymbol{\Phi}^0)^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{5}} & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \sqrt{\frac{2}{5}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{5}} \end{bmatrix}$$

开方后的 $(\boldsymbol{\Phi}^0)^{1/2}$ 矩阵的列向量，给出了 l^0 曲线在 $Ou_1u_2u_3$ 坐标系正象限的坐标平面上的交点.

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\zeta}) = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}(\zeta_1 + \zeta_2)^{1/2}, \sqrt{\frac{2}{5}}\zeta_1^{1/2}, \sqrt{\frac{2}{5}}\zeta_2^{1/2}\right)^{\mathrm{T}} \quad \zeta_{1,2} \geqslant 0 \quad \zeta_1 + \zeta_2 = 1$$

给出了 $Ou_1u_2u_3$ 的单位球面上的 l^0 曲线.

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\zeta})$$

给出了 R^4 空间上曲面在 $\bar{\boldsymbol{x}}^0$ 点切平面上法曲率正、负分区的分界曲线(面).

图 3.4.1.5 给出了这个曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处,R^3 空间上单位球面 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} = 1$ 的关于法截曲率符号的分区表示.

与图 3.4.1.4 的区别在于,现在代表 $\kappa_n = 0$ 的 l^0 曲线不与 u_i 坐标轴相交. 因为该曲面上任一点处的 Gauss 曲率均非 0.

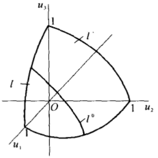


图 3.4.1.5

对 R^m 空间上的一般曲面函数 $f(\boldsymbol{x}) = 0$,由以上方式所得到的 R^{m-1} 上 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} = 1$ 单位超球面上的关于曲面 f 在任一点 $\boldsymbol{x}^0$ 处法截曲率 κ_n 的符号的分区,就是 R^3 上的曲面的 **Dupin 标形**在 R^m 空间上的推广.

虽然在 $m > 4$ 时是无法再给出 Dupin 标形的示意图,但利用以上所给出的矩阵表示法,仍可以准确地得到曲面上一点处法截曲率符号分区的表示. 并由 (3.4.1.23)式,还可以直接在曲面 f 上的 $\boldsymbol{x}^0$ 点处邻域的切超平面上给出曲面与切超平面相对位置的准确表示. 最后这一点在非线性规划中有重要的应用(见本书 §6 章).

§3.4.2 渐近线

附录: 曲面上一点邻域处的几何性状

当 R^m 空间的曲面 f 上在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的 Dupin 标形(矩阵表示)中,$\boldsymbol{\alpha}^0$ 集合非空,就可以确定曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处存在渐近方向.

定义 3.4.2.1 设 R^m 空间上曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点($\boldsymbol{x}^0 \in R^m$)的 Dupin 标形的 $\boldsymbol{\alpha}^0$ 集合非空,则称任一 $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\alpha}^0$ 决定的曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切方向是曲面的渐近方向. ■

设 $\boldsymbol{x}(s)$是曲面 f 上的曲线. 如果 $\boldsymbol{x}(s)$上任一点的切方向都是曲面 f 的渐近方向,则 $\boldsymbol{x}(s)$显然就是曲面上的渐近线.

定理 3.4.2.1 曲面上的一条曲线是渐近线,当且仅当或者它是直线,或者它是曲面切超平面上的曲线. ■

由 Meusnier 定理及渐近线的定义 3.3.1.2 直接可得到以上定理.

(3.3.4.2)式已给出了在正则参数曲面片上的渐近方向线(直线)的方程. 对于一般的渐近线,可由其定义直接得到以下方程,

在正则参数曲面片上

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\ \mathbb{II}\ \mathrm{d}\boldsymbol{u} = 0 \qquad —(3.4.2.1)$$

在一般曲面函数上，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\ \nabla^2 f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \qquad —(3.4.2.2)$$

这里的 d$\boldsymbol{u}$、d$\boldsymbol{x}$ 均看成是微分.

可以根据方程形式的复杂程度选择(3.4.2.1～2)式中更易求解的一个作为渐近线的方程.

例 3.4.2.1 求 R^3 空间上

$$z = a\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \quad 0 < x,\ y < +\infty$$

决定的曲面上的渐近线.

解：取

$$f(\boldsymbol{x}) = z - a\frac{x}{y} - a\frac{y}{x} = 0$$

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -2a\dfrac{y}{x^3} & a\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2} & 0 \\ a\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2} & -2a\dfrac{x}{y^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

记 $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z)^{\mathrm{T}}$，得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\ \nabla^2 f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -2a\frac{y}{x^3}\mathrm{d}x^2 + 2a\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2a\frac{x}{y^3}\mathrm{d}y^2 = 0 \qquad —(\mathrm{a})$$

记

$y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则上式又可表成

$$y'^2 - \frac{y(x^2+y^2)}{x^3}y' + \frac{y^4}{x^4} = 0 \qquad —(\mathrm{b})$$

解 y'，得

$$y' = \frac{1}{2}\frac{y}{x^3}[x^2 + y^2 \pm (x^2 - y^2)]$$

所以，当

$$y' = \frac{1}{2}\frac{y}{x^3}[x^2 + y^2 + (x^2 - y^2)] = \frac{y}{x}$$

可得

$$y = cx \quad z = a\left(c + \frac{1}{c}\right)$$

得渐近线

$$\boldsymbol{x}^1(t) = \begin{bmatrix} t \\ ct \\ a\left(c + \dfrac{1}{c}\right) \end{bmatrix} \quad c > 0,\ 0 < t < +\infty$$

$\boldsymbol{x}^1(t)$是直线.

当

$$y' = \frac{1}{2}\frac{y}{x^3}[x^2 + y^2 - (x^2 - y^2)] = \frac{y^3}{x^3}$$

得解

$$\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} = c$$

故有渐近线 $\boldsymbol{x}^2(t)$

$$\boldsymbol{x}^2(t) = \begin{bmatrix} t \\ \dfrac{t}{(ct^2+1)^{1/2}} \\ a\dfrac{t^4 + ct^2 + 1}{t^2(ct^2+1)^{1/2}} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} c > 0 \quad 0 < t < +\infty \\ \text{或} \quad c < 0 \quad 0 < t < \dfrac{1}{\sqrt{|c|}} \\ \text{再或} \quad c < 0 \quad -\dfrac{1}{\sqrt{|c|}} < t < 0 \end{matrix}$$

由此例可知在 R^3 空间上的正则参数曲面片(这里将 Monge 形式的曲面函数也看成参数函数),(3.4.2.1～2)式(如本例中的(a)式)若可以被转化成待定函数导数的 2 次代数方程(如本例中的(b)式),从而,可知在 R^3 空间的正则参数曲面片上,如果存在渐近线,则在上述 2 次代数方程有 2 个实根时,就有 2 条渐近线;当上述 2 次代数方程有 1 个重(实)根时,有 1 条渐近线,且这条渐近线一定是线性方向线(由 R^2 上的 Dupin 标形即知这一点,也可由(3.4.1.20)式关于 Φ^0 的列维数的说明即知).

但在有些情形,(3.4.2.1～2)式不能被归结为待定函数导数的 2 次代数方程.

例 3.4.2.2　R^3 空间上正螺面

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ bv \end{bmatrix} \quad b > 0$$

上的渐近线.

解：易知正螺面的第二基本二次型矩阵

$$\boldsymbol{I\!I} = -\frac{b}{\sqrt{b^2+u^2}}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

故渐近线方程是

$$\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 0$$

从上式中不能得到待定函数导数的 2 次代数方程. 从而，只能直接令

$$\begin{cases}\mathrm{d}u = 0 & \mathrm{d}v \neq 0\\ \mathrm{d}u \neq 0 & \mathrm{d}v = 0\end{cases}$$

得到 2 个渐近线的解.

$$\mathrm{d}u = 0 \Rightarrow u = c$$

得渐近线

$$\boldsymbol{x}^1(v) = \begin{bmatrix}c\cos v\\ c\sin v\\ bv\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{d}v = 0 \Rightarrow v = c$$

得渐近线

$$\boldsymbol{x}^2(u) = \begin{bmatrix}\cos c \cdot u\\ \sin c \cdot u\\ bc\end{bmatrix}$$

由上即知在 R^3 空间上，曲面的渐近线或者有 2 条或者只有 1 条线性方向线，总之(3.4.2.1～2)式有确定的解. 但在 R^m 高维空间上，由于 $\boldsymbol{\alpha}^0$ 集合给出的渐近方向可以有无穷多个，故曲面上的渐近线也就可以有无数条.

续例 3.4.1.2 由前面的分析，该曲面上渐近线的方程可表示为

$$-\frac{x_3}{x_2^3}\mathrm{d}x_2^2 + \frac{1}{x_2^2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = 0$$

即

$$\mathrm{d}x_2\left(-\frac{x_3}{x_2}\mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3\right) = 0 \qquad \text{—(a)}$$

由(a)式直接可决定

$$(1)\ \mathrm{d}x_2 = 0 \quad (2)\ \mathrm{d}x_2 \neq 0 \quad \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}x_2} = \frac{x_3}{x_2} \quad (3)\ \mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}x_3 = 0$$

3组解. 以 t 作为曲线的参数，有

$$(1)\qquad \boldsymbol{x}^1(t):\begin{cases}x_1=x_1(t)\\x_2=b\\x_3=x_3(t)\\z=x_1(t)+\dfrac{x_3(t)}{b}\end{cases}\qquad(b>0)$$

其中 $x_1(t)$、$x_3(t)$都是可以任取的可微函数. 容易构造 $x_1(t)$、$x_3(t)$，使 $\boldsymbol{x}^1(0)$通过给定的 $\boldsymbol{x}^0$ 点. 如取

$$x_1(t)=at+x_1^0\quad x_3(t)=ct+x_3^0\quad b=x_2^0\quad t\in R$$

$$z=\left(a+\frac{c}{b}\right)t+z^0\quad z^0=x_1^0+\frac{x_3^0}{x_2^0}$$

并记 $\boldsymbol{x}^1(t)=\boldsymbol{x}^1(t,a,c)$. 则

$$\boldsymbol{x}^1(0,a,c)=(\boldsymbol{x}^0,z^0)$$

显然，由于 a，c 参数允许任取，故曲面上过$(\boldsymbol{x}^0,z^0)$点的渐近线 $\boldsymbol{x}^1(t,a,c)$有无数条.

$$(2)\qquad \boldsymbol{x}^2(t):\begin{cases}x_1=x_1(t)\\x_2=x_2(t)\\x_3=cx_2(t)\\z=x_1(t)+c\end{cases}\qquad(x_2(t)>0)$$

这里 $x_1(t)$、$x_2(t)$是可以任取的可微函数. 不妨仍将 $x_1(t)$、$x_2(t)$取为线性函数，

$$x_1(t)=at+x_1^0\quad x_2(t)=bt+x_2^0\quad x_3=cbt+x_3^0\quad x_3^0=cx_2^0$$

$$z=at+z^0\quad z^0=x_1^0+c$$

这里 t 的定义域由 $x_2(t)>0$ 予以决定.

将 $\boldsymbol{x}^2(t)$表成 $\boldsymbol{x}^2(t,a,b)$，则 $\boldsymbol{x}^2(0,a,b)=(\boldsymbol{x}^0,z^0)$. 因此，由于 a，b 允许任取，故过$(\boldsymbol{x}^0,z^0)$点处也有无数条 $\boldsymbol{x}^2(t)$渐近线.

$$(3)\qquad \boldsymbol{x}^3(t):\begin{cases}x_1=x_1(t)\\x_2=b\quad(b>0)\\x_3=c\\z=x_1(t)+\dfrac{c}{b}\end{cases}$$

其中 $x_1(t)$是可以任取的可微函数. 仍可以取

$$x_1(t) = at + x_1^0 \quad b = x_2^0 \quad c = x_3^0 \quad t \in R$$

$$z = at + z^0 \quad z^0 = x_1^0 + \frac{x_3^0}{x_2^0}$$

注意，当给定($\boldsymbol{x}^0$, z^0)点，则经过这一点的 $\boldsymbol{x}^3(t)$ 直线只有 1 条.

若将以上可任取的 $x_i(t)$ 函数取成非线性函数形式，则可以构造出过($\boldsymbol{x}^0$, z^0)点的渐近曲线族.

在以上所给出的 $\boldsymbol{x}^1(t)$、$\boldsymbol{x}^2(t)$、$\boldsymbol{x}^3(t)$ 的直线形式的渐近线(族)中，可以指出，它们在测地挠率这一几何属性上仍是有差别的.

(1) $\boldsymbol{x}^1(t)$ 直线. 沿 $\boldsymbol{x}^1(t)$ 直线的切方向是

$$\nabla\boldsymbol{x}^1 = \left(a,\ 0,\ c,\ a + \frac{c}{b}\right)^{\mathrm{T}}$$

沿 $\boldsymbol{x}^1(t)$ 直线上，曲面的法方向是

$$\nabla F = \left(-1,\ \frac{c}{b^2}t + \frac{x_3^0}{b^2},\ -\frac{1}{b},\ 1\right)^{\mathrm{T}}$$

有

$$\widetilde{\boldsymbol{N}} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} \quad \nabla\widetilde{\boldsymbol{N}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{N}}}{\mathrm{d}t}$$

易知，沿 $\boldsymbol{x}^1(t)$ 上，总有

$$\nabla\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{x}^1 \equiv 0$$

故 $\nabla\widetilde{\boldsymbol{N}} \perp \nabla\boldsymbol{x}^1$. 因为 $\nabla\widetilde{\boldsymbol{N}} \neq \boldsymbol{0}$，故在 $\boldsymbol{x}^1(t)$ 直线上，测地挠率不为 0.

(2) $\boldsymbol{x}^2(t)$ 直线. 沿 $\boldsymbol{x}^2(t)$ 直线的切方向是

$$\nabla\boldsymbol{x}^2 = (a,\ b,\ cb,\ a)^{\mathrm{T}}$$

沿 $\boldsymbol{x}^2(t)$ 直线上，曲面的法方向是

$$\nabla F = \left(-1,\ \frac{c}{x_2},\ -\frac{1}{x_2},\ 1\right)^{\mathrm{T}}$$

可知，仍成立 $\nabla\widetilde{\boldsymbol{N}} \perp \nabla\boldsymbol{x}^2$. 故在 $\boldsymbol{x}^2(t)$ 直线上，测地挠率也不为 0.

(3) 在 $\boldsymbol{x}^3(t)$ 直线上. 沿 $\boldsymbol{x}^3(t)$ 直线上的切方向是

$$\nabla\boldsymbol{x}^3 = (a,\ 0,\ 0,\ a)^{\mathrm{T}}$$

沿 $\boldsymbol{x}^3(t)$ 直线，曲面的法方向是

$$\nabla F = \left(-1,\ \frac{c}{b^2},\ -\frac{1}{b},\ -1\right)^{\mathrm{T}}$$

注意，现在∇F是常数向量，故

$$\widetilde{\boldsymbol{N}} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$$

也是常数向量，故 $\nabla \widetilde{\boldsymbol{N}} \equiv \boldsymbol{0}$. 所以，$\boldsymbol{x}^3(t)$直线上的测地挠率恒为 0.

由此即知，$\boldsymbol{x}^1(t)$、$\boldsymbol{x}^2(t)$直线(族)是曲面上的渐近方向线，而 $\boldsymbol{x}^3(t)$直线则是曲面上的线性方向线.

续例 3.4.1.3 由前面的分析，该曲面上的渐近线方程是

$$\mathrm{d}x_3^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2$$

取 $\mathrm{d}x_1 \neq 0$，则

$$\left(\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}x_1}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\right)^2$$

故任取

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = f(x_1, x_2)$$

便可得到

$$\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}x_1} = \pm(1 + f^2(x_1, x_2))^{1/2}$$

解出这两个方程，便可由 $z = f(x_1, x_2, x_3)$ 得到曲面上的一条渐近线.

如不妨简单地取 $\mathrm{d}x_1 = \mathrm{d}t$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = a \quad a\text{—const}$$

便可得

$$\boldsymbol{x}^1(t, a): \begin{cases} x_1 = t + c_1 \\ x_2 = at + c_2 \\ x_3 = \pm\sqrt{1+a^2}\,t + c_3 \\ z = 2(c_1 + ac_2 \mp \sqrt{1+a^2} \cdot c_3)t + (c_1^2 + c_2^2 - c_3^2) \end{cases} \qquad c_{1,2,3}\text{— 积分常数}$$

$\boldsymbol{x}^1(t, a)$就是由 a 参数决定的渐近方向线，显然由 a 的取法，这样的 $\boldsymbol{x}^1(t, a)$有无穷多条. 并且易知，沿 $\boldsymbol{x}^1(t, a)$渐近方向线上，有

$$\widetilde{\boldsymbol{N}} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 8(1+a^2)t^2}} \begin{bmatrix} -2t \\ -2at \\ \pm\sqrt{1+a^2} \cdot t \\ 1 \end{bmatrix}$$

故总有

$$\nabla \widetilde{\mathbf{N}} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{N}}}{\mathrm{d}t} \neq \mathbf{0}$$

并且 $\nabla \widetilde{\mathbf{N}} \perp \nabla \boldsymbol{x}(t, a)$，

$$\nabla \boldsymbol{x}(t, a) = (1, a, \pm\sqrt{1+a^2}, 2(c_1 + ac_2 \mp \sqrt{1+a^2} \cdot c_3))^{\mathrm{T}}$$

所以，在 $\boldsymbol{x}^1(t, a)$直线上，其测地挠率恒不为 0.

如果取 $\mathrm{d}x_1 = \mathrm{d}t$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \sqrt{b}t^{1/2} \quad \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}x_1} = \pm(1+bt)^{\frac{1}{2}} \quad b > 0$$

并省略积分常数 $c_{1,2,3}$，则可得

$$\boldsymbol{x}^2(t, b): \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = \dfrac{2\sqrt{b}}{3}t^{3/2} \\ x_3 = \pm\dfrac{2}{3b}(1+bt)^{3/2} \\ z = -\dfrac{1}{3}t^2 - \dfrac{4}{3b}t - \dfrac{4}{9b^2} \end{cases} \quad \left(t \geqslant -\frac{1}{b}\right)$$

$\boldsymbol{x}^2(t, b)$也是曲面上的渐近曲线. 适当选择 $\boldsymbol{x}^1(t, a)$的 c_1, c_2, c_3，可使 $\boldsymbol{x}^1(t, a)$与 $\boldsymbol{x}^2(t, b)$通过曲面上同一点.

所以，在曲面上的任一点处，这一曲面均有无数条渐近线通过这一点.

附录：曲面上一点邻域处的几何性状

关于曲面 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ 上的 $\boldsymbol{x}^0$ 点的几何性质，可由以下方式予以分类.

当 $\kappa_i \geqslant 0$ (or $\kappa_i \leqslant 0$) $i = 1, \cdots, m-1$, $\boldsymbol{x}^0$ 是拟凹(或拟凸)点

当 $\kappa_i > 0$ (or $\kappa_i < 0$) $i = 1, \cdots, m-1$, $\boldsymbol{x}^0$ 是严格凹(或严格凸)点

当 $\kappa_1 < 0 < \kappa_{m-1}$ $\kappa_i \neq 0$ $i = 1, \cdots, m-1$, $\boldsymbol{x}^0$ 是鞍点

当 $\kappa_1 < 0 < \kappa_{m-1}$ 有 $\kappa_h = 0$ $1 < h < m-1$ $\boldsymbol{x}^0$ 是拐一鞍点

当 $\kappa_i = 0$ $i = 1, \cdots, m-1$ $\boldsymbol{x}^0$ 是平点(也可以是拐点)

由以上的分析，当 $\boldsymbol{x}^0$ 是严格凸(凹)的点，则曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的邻域一定全部为于曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切超平面的同一侧. 这一几何性质就是著名的凸集分离定理的结论. 这一性质对于非线性规划理论是基础性的.

以下不考虑曲面为平面以及可能包含的各种奇点的情况. 先对于以上所给出的分类中的拐点、鞍点给予一个示例性的说明.

例 3.4.2.3 拐点. R^3 空间上的旋转曲面

$$x_3 = \left(1 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right)^3$$

取 $\boldsymbol{x}^0 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$. 证 $\boldsymbol{x}^0$ 是拐点.

解：因为

$$f(\boldsymbol{x}) = x_3 - \left(1 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right)^3 = 0$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{x}^0$ 点是正则的. 但易知

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) = [0]$$

故主法曲率 $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. 显然曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处不是平面，故 $\boldsymbol{x}^0$ 只能是拐点. 过 $\boldsymbol{x}^0$ 的法截曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点是拐点可参见图 3.4.2.1.

图 3.4.2.1 中的 Otx_3 坐标是以 Ox_1x_2 平面上的从原点出发过 $\boldsymbol{x}^0$ 点的射线为 t 轴，以 x_3 轴为纵轴. 则曲面 f 与 Otx_3 平面的交线（法截曲线）就是 x_f. x_f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处显然是一个拐点. 所以，Ox_1x_2 坐标平面同时就是旋转曲面的切平面. 而过 $\boldsymbol{x}^0$ 点的圆周

$$x_1^2 + x_2^2 = 2$$

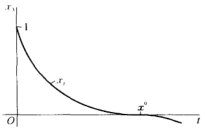


图 3.4.2.1

就是曲面 f 与 Ox_1x_2 平面的交曲线. 这个圆周上的点全部是曲面 f 上的拐点. 并且，由于这个圆位于曲面 f 在这个圆上的任一点处的切平面 Ox_1x_2 上，所以，这个圆周就是曲面 f 的渐近曲线. 易知在这个圆周上的任一点处，曲面 f 的单位法向量 $\widetilde{\boldsymbol{N}} \equiv (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$，从而沿此圆周对 $\widetilde{\boldsymbol{N}}$ 求导恒有 $\nabla\widetilde{\boldsymbol{N}} \equiv \boldsymbol{0}$. 故这一圆周一定又是测地挠率 $\tau_s = \| P_x \nabla \widetilde{\boldsymbol{N}} \| \equiv 0$ 的渐近曲线.

由此例可见，曲面上的拐点 $\boldsymbol{x}^0$ 可以用 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) = [0]$ 来表示. 所以，当 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) = [0]$ 时，既可能表示曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域是一个平面，也可能表示曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处是一个拐点.

鞍点与拐点的区别仅在于曲面上的鞍点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的主法曲率 κ_i 均不为 0，且 κ_i 中同时有正、负值的主法曲率存在，而拐点处是 $\kappa_i = 0$；拐一鞍点处是 κ_i 中同时有正、负值以及（至少一个）0 值主法曲率.

由于鞍点处有正、负值主法曲率，所以，在某些特定的切方向 $\boldsymbol{\alpha}$ 上，也总有 $\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}) = 0$. 在 $\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}) = 0$ 的切方向上，鞍点处的曲面法截曲线，具有拐点的性状.

仍以例 3.4.1.2 为例，构造曲面的切超平面方程

$$-\alpha_1+\frac{x_3}{x_2^2}\alpha_2-\frac{1}{x_2}\alpha_3+\alpha_4=0$$

在点 $\boldsymbol{x}^0=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$ 处，切方向 $\boldsymbol{\alpha}$ 的通解是

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{u}\in R^3\quad \boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$$

$$\nabla F=(-1,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$$

构造 $\boldsymbol{x}^0$ 点处曲面的法截平面

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0+\frac{\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})t}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}+\frac{\nabla F\cdot s}{\|\nabla F\|}\quad t,s\in R$$

得

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{-u_2+u_3}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}t-\dfrac{1}{\sqrt{3}}s\\ x_2=1+\dfrac{u_1}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}t\\ x_3=\dfrac{u_2}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}t-\dfrac{1}{\sqrt{3}}s\\ z=\dfrac{u_3}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}t+\dfrac{1}{\sqrt{3}}s\end{cases}\qquad \|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|=(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}+(u_2-u_3)^2)^{1/2}$$

这里 $\boldsymbol{u}$ 是决定切方向的参数向量. 将上式代入曲面函数，得

$$\frac{u_3}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}t+\frac{1}{\sqrt{3}}s=\frac{-u_2+u_3}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}t-\frac{1}{\sqrt{3}}s+\frac{\dfrac{u_2}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}t-\dfrac{1}{\sqrt{3}}s}{1+\dfrac{u_1}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}t}$$

就是沿 $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})$ 切方向上曲面的法截曲线方程. 因为法截曲线过 $\boldsymbol{x}^0$ 点(在 $t=s=0$ 时)，且又要满足 $x_2\neq 0$ 的条件，故取 t 的定义域应是 $-\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|<u_1t<+\infty$.
由此经整理可得

$$f(t,s)=\sqrt{3}s+\frac{2u_1}{\sqrt{3}\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}ts+\frac{u_1u_2}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}t^2=0$$

是法截曲线的隐函数方程. 由

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{2u_1}{\sqrt{3}\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}s+2\frac{u_1u_2}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}t\quad \frac{\partial f}{\partial s}=\sqrt{3}+\frac{2u_1}{\sqrt{3}\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}t$$

故

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial t}=0 \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial s}=\sqrt{3}$$

从而 $s=s(t)$ 函数存在，并知在 $t=s=0$ 处，

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=0$$

另由

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=2\frac{u_1u_2}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}=\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}=\frac{2u_1}{\sqrt{3}\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}=0$$

即知在 $t=s=0$ 处

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{6}{3^{3/2}}\frac{u_1u_2}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}$$

所以，当取 $u_1=0$ 或 $u_2=0$，即有 $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=0$，从而法截曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处就是一个拐点. 但在 $u_1, u_2\neq 0$，则 $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\neq 0$，且在取 u_1 为 $-u_1$(或 u_2 为 $-u_2$) 时，$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ 将改变符号. 这即是说，在 $\boldsymbol{x}^0$ 处，$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\neq 0$ 的切方向上，$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ 有 +、- 符号，故 $\boldsymbol{x}^0$ 点的邻域内，曲面在部分切方向上是拐点，在其余切方向上则具有鞍点的性状. 所以，可称其为拐—鞍点.

再如例 3.4.1.3 构造切空间方程

$$-2x_1\alpha_1-2x_2\alpha_2+2x_3\alpha_3+\alpha_4=0$$

在 $\boldsymbol{x}^0=\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{8}},-\frac{1}{8}\right)^{\mathrm{T}}$ 处，$\boldsymbol{\alpha}$ 的通解是

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-\frac{\sqrt{8}}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u}\in R^3 \quad \boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$$

$$\nabla \mathrm{F}=\left(0,0,\frac{2}{\sqrt{8}},1\right)^{\mathrm{T}}$$

有 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的法截平面方程

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{u_1}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}t \\ x_2 = \dfrac{u_2}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}t \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{8}} - \dfrac{\sqrt{8}u_3}{2\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}t + \dfrac{1}{\sqrt{3}}s \quad \|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\| = (u_1^2 + u_2^2 + 3u_3^2)^{1/2} \\ z = -\dfrac{1}{8} + \dfrac{u_3}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}t + \sqrt{\dfrac{2}{3}}s \quad (0 < u_1,\ u_2,\ u_3 < +\infty) \end{cases}$$

由此得过 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的法截曲线方程

$$-\frac{1}{8} + \frac{u_3}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}t + \sqrt{\frac{2}{3}}s = \frac{u_1^2}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|^2}t^2 + \frac{u_2^2}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|^2}t^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{8}u_3}{2\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}t + \frac{1}{\sqrt{3}}s\right)^2$$

经整理可得

$$f(t,\ s) = -\frac{1}{3}s^2 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{u_3}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}ts + \frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|^2}(u_1^2 + u_2^2 - 2u_3^2)t^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)s = 0$$

是法截曲线的隐函数.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{u_3}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}s + \frac{2}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|^2}(u_1^2 + u_2^2 - 2u_3^2)t$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -\frac{2}{3}s + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{u_3}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|}t - \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

在 $t = s = 0$ 处，$\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \dfrac{\partial f}{\partial s} = -\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$，故 $s = s(t)$ 函数存在且

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0$$

再由

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{2}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|^2}(u_1^2 + u_2^2 - 2u_3^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{u_3}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = -\frac{2}{3}$$

可得 $t = s = 0$ 处

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{2}{\|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})\|^2} \frac{u_1^2 + u_2^2 - 2u_3^2}{\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{6}}}}$$

则在 $u_1^2 + u_2^2 - 2u_3^2 = 0$ 决定的切方向 $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u})$ 上，曲面的法截曲率在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处是零值. 但在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的主法曲率 $\kappa_i \neq 0$ [故 $\nabla_x^2 f(\boldsymbol{x}^0)$ 不能是 0 矩阵]，所以，应把 $\boldsymbol{x}^0$ 点看成是鞍点[1].

[1] 附带指出，利用法截曲线来分析曲面上一点处的几何性状的方法，与利用 Euler 公式的分析方法是等价的. Euler 公式的方法因包含有更多的信息，因此是更有效的方法. 但在另一些特定场合，法截曲线的分析方法也是有应用价值的(见本书§6 章).

§4 曲 率 张 量

§4.1 Riemann 截面曲率

本节及以下几节的内容是分析涉及的曲率张量及其相关的一些重要问题，但这里不使用张量代数的方法.因此“张量”一词在这里仅具有语义上的意义而不表示是一种数学方法.

设

$$f(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$$

给出了 R^m 空间上的一个正则曲面 f.对任一个 $\boldsymbol{x}^0 \in D$,由

$$L_f: \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0$$

给出了曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切超平面.$\boldsymbol{\alpha}$ 是从 $\boldsymbol{x}^0$ 点出发并位于切超平面 L_f 上的向量.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 L_f 上的 2 个线性无关的(列)向量.记

$$\Lambda(2) = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2] \qquad —(4.1.1)$$

是 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 构造的一个矩阵.则由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 和曲面的单位法向量 $\widetilde{\boldsymbol{N}} = \dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ 可以构造过 $\boldsymbol{x}^0$ 点的法截平面 $L_\pi(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$

$$L_\pi(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2): \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + (\Lambda(2)\boldsymbol{u}) \cdot t + \widetilde{\boldsymbol{N}} \cdot s \quad \boldsymbol{u} \in R^2 \quad t, s \in R \qquad —(4.1.2)$$

且取

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}(2)\Lambda(2)\boldsymbol{u} = 1$$

则在 $L_\pi(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$法截平面上,可得到曲面 f 的法截曲线

$$f(t, s) = f(\boldsymbol{x}^0 + (\Lambda(2)\boldsymbol{u}) \cdot t + \widetilde{\boldsymbol{N}} \cdot s) = 0 \qquad —(4.1.3)$$

由(2.2.1.9)式,这一法截曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点(即 $t = s = 0$) 处的法截曲率

$$\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{u}) = -\frac{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}(2)\,\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)\Lambda(2)\boldsymbol{u}}{\|\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\|} \qquad \text{—(4.1.4)}$$

对 $\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{u})$ 可求得其关于参数 $\boldsymbol{u}$ 的极值. 即可构造以下条件极值规划

$$\begin{cases} \text{极值:} & \kappa_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{u}) \\ \text{s. t.} & \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}(2)\Lambda(2)\boldsymbol{u} = 1 \end{cases} \qquad \text{—(4.1.5)}$$

得到 L—函数

$$L(\boldsymbol{u}, \zeta) = \kappa_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{u}) + \zeta(1 - \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}(2)\Lambda(2)\boldsymbol{u})$$

ζ 是 L—乘子. 一阶极值条件是(省略"$(\boldsymbol{x}^0)$"符号)

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}} = 2\left(\frac{1}{\|\nabla f\|}\Lambda^{\mathrm{T}}(2)\,\nabla^2 f\Lambda(2) - \zeta\Lambda^{\mathrm{T}}(2)\Lambda(2)\right)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \qquad \text{—(4.1.6)}$$

(4.1.6)式有解的充要条件当然就是 ζ 是以下特征多项式的根

$$\left|\frac{1}{\|\nabla f\|}\Lambda^{\mathrm{T}}(2)\,\nabla^2 f\Lambda(2) - \zeta\Lambda^{\mathrm{T}}(2)\Lambda(2)\right| = 0 \qquad \text{—(4.1.7)}$$

(4.1.7)式具体的形式如下

$$\left|\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\,\nabla^2 f\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\,\nabla^2 f\boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\,\nabla^2 f\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\,\nabla^2 f\boldsymbol{\alpha}_2 \end{bmatrix} \cdot \|\nabla f\|^{-1} - \zeta\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 \end{bmatrix}\right| = 0 \qquad \text{—(4.1.8)}$$

(4.1.8)式的构造相似于 R^3 空间上的 Weingarten 映射行列式,由那里的分析,已知(4.1.8)式类型的特征多项式总有 2 个实根(可能是重根). 记这 2 个根是 $\zeta_{1,2}$.

由 $\zeta_{1,2}$ 可从(4.1.6)式得特征向量 $\boldsymbol{u}(\zeta_1)$、$\boldsymbol{u}(\zeta_2)$ 或记为 $\boldsymbol{u}(\zeta_{1,2})$ 就是 $\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{u})$ 取极值的方向. 这里 $\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{u})$ 的极值是指在 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 决定的那个 2 维的(子)切平面 $L_f(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{u})$

$$L_f(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2): \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + (\Lambda(2)\boldsymbol{u})t \quad t \in R, \boldsymbol{u} \in R^2 \quad \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0} \quad \forall\, \boldsymbol{u} \qquad \text{—(4.1.9)}$$

上,曲面 f 上由参向量 $\boldsymbol{u}$ 决定的法截曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的法截曲率的(关于 $\boldsymbol{u}$ 的)极值.

记

$$\kappa_{\boldsymbol{\alpha}}^{1,2} = \kappa_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{u}(\zeta_{1,2})) \qquad \text{—(4.1.10)}$$

是这 2 个极值法截曲率. 则

$$\kappa_{\boldsymbol{\alpha}} = \kappa_{\boldsymbol{\alpha}}^1 \cdot \kappa_{\boldsymbol{\alpha}}^2 \qquad \text{—(4.1.11)}$$

就是曲面 f 在 $L_f(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{u})$ 这一(子)切平面所对应的那个曲面片的 Gauss

曲率.

类似§3章关于广义 RayLeigh 商的分析，易知(4.1.4)式的条件极值(4.1.5)式也等价于以下关于 RayLeigh 商的无条件极值，

$$\text{极值}: R(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{u}) = \frac{\kappa_n(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{u})}{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}(2)\Lambda(2)\boldsymbol{u}} \qquad \text{—(4.1.12)}$$

显然，(4.1.12)式的一阶极值条件是

$$\frac{\partial R(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} = 2\left(\frac{1}{\|\nabla f\|}\Lambda^{\mathrm{T}}(2)\nabla^2 f\Lambda(2) - R(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{u})\cdot\Lambda^{\mathrm{T}}(2)\Lambda(2)\right)\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}(2)\Lambda(2)\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$$

将上式与(4.1.6)式相比较，即知在极值处，必有

$$\kappa_n(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{u}(\zeta_{1,2})) = R(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{u}(\zeta_{1,2})) = \zeta_{1,2} \qquad \text{—(4.1.13)}$$

这样，由多项式根与系数的关系即知(由(4.1.7)式)

$$\kappa_{\alpha} = \zeta_1\cdot\zeta_2 = \frac{|\Lambda^{\mathrm{T}}(2)\nabla^2 f\Lambda(2)|}{|\Lambda^{\mathrm{T}}(2)\Lambda(2)|\cdot\|\nabla f\|^2} \qquad \text{—(4.1.14)}$$

记

$$\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}_i,\ \boldsymbol{\alpha}_j) = -\frac{\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\boldsymbol{\alpha}_j}{\|\nabla f\|} \qquad \text{—(4.1.15)}$$

则(4.1.14)式又可表示成

$$\kappa_{\alpha} = \frac{\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_1)\cdot\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_2) - \kappa_n^2(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2)}{\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 - (\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2)^2} \qquad \text{—(4.1.16)}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，故上式的分母恒为正数.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 看成是(4.1.9)式决定的2维(子)切平面上的一组基向量，将 ζ 乘子看成是特征多项式

$$\left|\frac{1}{\|\nabla f\|}\Lambda^{\mathrm{T}}(2)\nabla^2 f\Lambda(2)\cdot(\Lambda^{\mathrm{T}}(2)\Lambda(2))^{-1} - \zeta\cdot I_2\right| = 0 \qquad \text{—(4.1.17)}$$

的根，马上就知道，若另取 $L_f(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2)$ 的一组基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，则由于总存在过渡矩阵 $T\in R^{2\times 2}$，使

$$\widetilde{\Lambda}(2) = [\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2] = [\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2]\cdot T = \Lambda(2)T,\ |T|\neq 0 \qquad \text{—(4.1.18)}$$

使

$$(\widetilde{\Lambda}^{\mathrm{T}}(2)\nabla^2 f\widetilde{\Lambda}(2))\cdot(\widetilde{\Lambda}^{\mathrm{T}}(2)\widetilde{\Lambda}(2))^{-1} = T^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}(2)\nabla^2 f\Lambda(2)\cdot(\Lambda^{\mathrm{T}}(2)\Lambda(2))^{-1}(T^{\mathrm{T}})^{-1}$$

二者相似. 因此，以 $\boldsymbol{\beta}_{1,2}$ 为基向量由(4.1.17)式所得到的特征根 ζ 就是以 $\boldsymbol{\alpha}_{1,2}$ 为

基向量所得到的特征根. 故知在上述基变换下,

$$\kappa_\beta \equiv \kappa_\alpha$$

所以,(4.1.16)式决定的 2 维(子)切平面 $L_f(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$上的 Gauss 曲率 κ_α 是基变换下的不变量.

不妨记(4.1.4)式的 κ_α 为以下形式,

$$\kappa_\alpha(2) = \zeta_1 \cdot \zeta_2 = \frac{|\Lambda^{\mathrm{T}}(2)\nabla^2 f\Lambda(2)|}{|\Lambda^{\mathrm{T}}(2)\Lambda(2)|\ \|\nabla f\|^2} \qquad —(4.1.19)$$

并由以上的符号规定与分析,推广(4.1.19)式,有

$$\begin{cases}\kappa_\alpha(n) = \zeta_1 \cdot \zeta_2 \cdot \cdots \cdot \zeta_n = (-1)^n \dfrac{|\Lambda^{\mathrm{T}}(n)\nabla^2 f\Lambda(n)|}{|\Lambda^{\mathrm{T}}(n)\Lambda(n)|\ \|\nabla f\|^n} \\ n = 1, 2, \cdots, m-1 \quad \Lambda(n) = [\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n] \quad \nabla f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i = 0 \quad i = 1, \cdots, n\end{cases} \qquad —(4.1.20)$$

显然, $n=1$, $\kappa_\alpha(1) = \kappa_n(\boldsymbol{\alpha})$, 即 $\kappa_\alpha(1)$就是(2.2.1.9)式定义的曲面 f 沿 $\boldsymbol{\alpha}$ 切方向的法截曲率. 当 $n = m-1$, $\kappa_\alpha(m-1) = \kappa_f$, 就是(3.1.1.46)式定义的曲面 f 的 Gauss 曲率(并注意(3.1.1.28)式的意义). 且这里的 $\Lambda(n)$ 矩阵总是列满秩的.

所以,可以称 $\kappa_\alpha(n)$是曲面 f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的 n 维切(子)平面上的 Gauss 曲率.

注意,矩阵

$$\Lambda^{\mathrm{T}}(n)\nabla^2 f\Lambda(n) = [\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\boldsymbol{\alpha}_j] \quad i, j = 1, \cdots, n \leqslant m-1 \qquad —(4.1.21)$$

这一形式的矩阵可见(3.1.1.26)式.

考虑 R^m 空间上的一般曲面函数 $f(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$ 对应的参数函数是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) \quad \boldsymbol{u} \in D_u \subset R^{m-1}$. 则总可以有

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{t}_i \quad \boldsymbol{t}_i = (t_1^i, t_2^i, \cdots, t_{m-1}^i)^{\mathrm{T}} \in D_u \qquad —(4.1.22)$$

因此

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\boldsymbol{\alpha}_j = \boldsymbol{t}_i^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\nabla^2 f\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{t}_j$$

设 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的定向与 $f(\boldsymbol{x})$的定向一致,则由(2.4.5.32)式

$$(-1)^n\frac{|\Lambda^{\mathrm{T}}(n)\nabla^2 f\Lambda(n)|}{\|\nabla f\|^n} = \left|-\frac{\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\boldsymbol{\alpha}_j}{\|\nabla f\|}\right| = |\boldsymbol{t}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I\!I}\,\boldsymbol{t}_j| \qquad —(4.1.23)$$

$$|\Lambda^{\mathrm{T}}(n)\Lambda(n)| = |\boldsymbol{t}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{t}_j| \quad i, j = 1, \cdots, n \qquad —(4.1.24)$$

(4.1.23~24)式的$|\cdot|$符号均表示 n 阶行列式,且其中 $\boldsymbol{t}_i$ 是 n 个线性无关的向量.

因此,在正则参数曲面片上,有

$$\kappa_a(n) = \frac{|\, t_i^{\mathrm{T}} \mathit{II}\, t_j \,|}{|\, t_i^{\mathrm{T}} \mathit{I}\, t_j \,|} \quad i, j = 1, \cdots, n \qquad —(4.1.25)$$

对于 $n = 2$,(4.1.25)式给出了 R^m 空间上曲面 f(或 $\boldsymbol{r}$)的一个 2 维切(子)平面上的 Gauss 曲率.

$$\kappa_a(2) = \frac{t_1^{\mathrm{T}} \mathit{II} t_1 \cdot t_2^{\mathrm{T}} \mathit{II} t_2 - (t_1^{\mathrm{T}} \mathit{II} t_2)^2}{t_1^{\mathrm{T}} \mathit{I}\, t_1 \cdot t_2^{\mathrm{T}} \mathit{I}\, t_2 - (t_1^{\mathrm{T}} \mathit{I}\, t_2)^2} \qquad —(4.1.26)$$

利用§3 章的符号. $\mathit{II} = [C_{ij}]$ $\quad \mathit{I} = [g_{ij}]$,以及记 $t_i = (t_1^i, \cdots, t_{m-1}^i)^{\mathrm{T}}$ 并利用缩写求和符号 $\sum\limits_{i,j=1}^{m} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m}$ 余类推.

$$t_1^{\mathrm{T}} \mathit{II} t_1 = \sum_{i,j=1}^{m-1} C_{ij} t_i^1 t_j^1 \quad t_2^{\mathrm{T}} \mathit{II} t_2 = \sum_{h,\kappa=1}^{m-1} C_{h\kappa} t_h^2 t_\kappa^2$$

$$t_1^{\mathrm{T}} \mathit{II} t_2 = \sum_{i,\kappa=1}^{m-1} C_{i\kappa} t_i^1 t_\kappa^2 = \sum_{j,h=1}^{m-1} C_{jh} t_j^1 t_h^2$$

得

$$\begin{aligned} t_1^{\mathrm{T}} \mathit{II} t_1 \cdot t_2^{\mathrm{T}} \mathit{II} t_2 - (t_1^{\mathrm{T}} \mathit{II} t_2)^2 &= \sum_{i,j=1}^{m-1} C_{ij} t_i^1 t_j^1 \cdot \sum_{h,\kappa=1}^{m-1} C_{h\kappa} t_h^2 t_\kappa^2 - \sum_{h,\kappa=1}^{m-1} C_{i\kappa} t_h^1 t_\kappa^2 \cdot \sum_{j,h=1}^{m-1} C_{jh} t_j^1 t_h^2 \\ &= \sum_{i,j,h,\kappa=1}^{m-1} C_{ij} C_{h\kappa} t_i^1 t_h^2 t_j^1 t_\kappa^2 - \sum_{i,j,h,\kappa=1}^{m-1} C_{i\kappa} C_{jh} t_i^1 t_h^2 t_j^1 t_\kappa^2 \\ &= \sum_{i,j,h,\kappa=1}^{m-1} (C_{ij} C_{h\kappa} - C_{i\kappa} C_{hj}) t_i^1 t_h^2 t_j^1 t_\kappa^2 \qquad —(4.1.27) \end{aligned}$$

则由(2.4.3.25)式,Riemann 符号

$$R_{ihj\kappa} = \begin{vmatrix} C_{ij} & C_{i\kappa} \\ C_{hj} & C_{h\kappa} \end{vmatrix} = C_{ij} C_{h\kappa} - C_{hj} C_{i\kappa}$$

故

$$t_1^{\mathrm{T}} \mathit{II} t_1 \cdot t_2^{\mathrm{T}} \mathit{II} t_2 - (t_1^{\mathrm{T}} \mathit{II} t_2)^2 = \sum_{i,j,h,\kappa=1}^{m-1} R_{ihj\kappa} t_i^1 t_h^2 t_j^1 t_\kappa^2 \qquad —(4.1.28)$$

由(4.1.27)式直接用 g_{ij} 替代 C_{ij} 等,可得

$$t_1^{\mathrm{T}} \mathit{I}\, t_1 \cdot t_2^{\mathrm{T}} \mathit{I}\, t_2 - (t_1^{\mathrm{T}} \mathit{I}\, t_2)^2 = \sum_{i,j,h,\kappa=1}^{m-1} (g_{ij} g_{h\kappa} - g_{i\kappa} g_{hj}) t_i^1 t_h^2 t_j^1 t_\kappa^2$$

—(4.1.29)

所以

$$\kappa_{\alpha}(2)=\frac{\sum\limits_{i,j,h,\kappa=1}^{m-1}R_{ihj\kappa}t_i^1t_h^2t_j^1t_\kappa^2}{\sum\limits_{i,j,h,\kappa=1}^{m-1}(g_{ij}g_{h\kappa}-g_{i\kappa}g_{hj})t_i^1t_h^2t_j^1t_\kappa^2}\qquad—(4.1.30)$$

(4.1.30)式就是 $\kappa_{\alpha}(2)$ 的内蕴几何量的表示形式.(4.1.30)式显然与(4.1.16)式是完全等价的.

称 $\kappa_{\alpha}(2)$ 为曲面的 **Riemann 截面曲率**. 以上的分析与推导已经给出了 Riemann 截面曲率的来源以及几何意义. 这里应注意,如果利用 Einstein 和式约定,则(4.1.30)式分子、分母中的"$\sum$"号是可以省去的.

对于 $n=1, 2, \cdots, m-1$ 的一般情形,由(4.1.25)式的构造,

引用以下二阶子式符号

$$\mathit{II}_{\alpha\zeta\beta\gamma}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{t}_{\alpha}^{\mathrm{T}}\mathit{II}\boldsymbol{t}_{\beta} & \boldsymbol{t}_{\alpha}^{\mathrm{T}}\mathit{II}\boldsymbol{t}_{\gamma}\\ \boldsymbol{t}_{\zeta}^{\mathrm{T}}\mathit{II}\boldsymbol{t}_{\beta} & \boldsymbol{t}_{\zeta}^{\mathrm{T}}\mathit{II}\boldsymbol{t}_{\gamma}\end{vmatrix}\qquad \alpha、\beta、\zeta、\gamma=1, 2, \cdots n\qquad—(4.1.30a)$$

由于

$$\boldsymbol{t}_{\alpha}^{\mathrm{T}}\mathit{II}\,\boldsymbol{t}_{\beta}=\sum_{i,j=1}^{m-1}C_{ij}t_i^{\alpha}t_j^{\beta}$$

所以

$$\mathit{II}_{\alpha\zeta\beta\gamma}=\boldsymbol{t}_{\alpha}^{\mathrm{T}}\mathit{II}\,\boldsymbol{t}_{\beta}\cdot\boldsymbol{t}_{\zeta}^{\mathrm{T}}\mathit{II}\,\boldsymbol{t}_{\gamma}-\boldsymbol{t}_{\alpha}^{\mathrm{T}}\mathit{II}\,\boldsymbol{t}_{\gamma}\cdot\boldsymbol{t}_{\zeta}^{\mathrm{T}}\mathit{II}\,\boldsymbol{t}_{\beta}=\sum_{i,j,h,\kappa=1}^{m-1}(C_{ij}C_{h\kappa}-C_{i\kappa}C_{hj})t_i^{\alpha}t_j^{\beta}t_h^{\zeta}t_\kappa^{\gamma}$$

所以

$$\mathit{II}_{\alpha\zeta\beta\gamma}=\sum_{i,h,j,k=1}^{m-1}R_{ihjk}t_i^{\alpha}t_h^{\zeta}t_j^{\beta}t_k^{\gamma}\qquad—(4.1.30b)$$

这样,由(§2.4.3 节)关于二阶伴随矩阵的说明,作 4 下标 $\{\alpha, \zeta, \beta, \gamma\}$ 到双下标 $\{p, z\}$ 的字典序排列变换,二阶子式 $\mathit{II}_{\alpha\zeta\beta\gamma}$ 可记为 μ_{pz}, $p、z=1, 2, \cdots, \binom{n}{2}$. 从而行列式

$$|\,\boldsymbol{t}_{\alpha}^{\mathrm{T}}\mathit{II}\,\boldsymbol{t}_{\beta}\,|\qquad \alpha, \beta=1, 2, \cdots, n$$

的二阶伴随子式的行列式可表成

$$|\,\mu_{pz}\,|=|\,\boldsymbol{t}_{\alpha}^{\mathrm{T}}\mathit{II}\,\boldsymbol{t}_{\beta}\,|^{C_{n-1}^{2-1}}=|\,\boldsymbol{t}_{\alpha}^{\mathrm{T}}\mathit{II}\,\boldsymbol{t}_{\beta}\,|^{n-1}$$

所以,

$$|\,\boldsymbol{t}_{\alpha}^{\mathrm{T}}\mathit{II}\,\boldsymbol{t}_{\beta}\,|=|\,\mu_{pz}\,|^{\frac{1}{n-1}}\qquad—(4.1.30c)$$

因为(4.1.30c)式右边的行列式元素 $\mathit{II}_{\alpha\zeta\beta\gamma}$ 由(4.1.30b)式完全由 $R_{ihj\kappa}$ 符号决定,所以(4.1.25)式右边分式的分子的绝对值完全由曲面的第一基本不变量

决定.具体讲即是

当 n=偶数时,$\kappa_a(n)$可以用第一基本不变量 g_{ij} 因子及其偏导数表出

当 n=奇数时,$\kappa_a^2(n)$可以用第一基本不变量 g_{ij} 因子及其偏导数表出

由此,即得以下定理.

定理 4.1.1 (推广的 Gauss 曲率定理)设

$$z = f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$$

给出了 R^{m+1}空间上的一个正则曲面片. $\kappa_a(n) \quad n=1, 2, \cdots, m-1$ 是该曲面在任取的 n 维切(子)超平面上的 Gauss 曲率.则 $\kappa_a(n)$的不变量可由曲面的第一基本不变量及其偏导数表出. ■

这里 $\kappa_a(n)$的不变量,在 n=偶数就是 $\kappa_a(n)$,在 n=奇数时,则是$|\kappa_a(n)|$(见定义 2.4.3.1).

(4.1.30)式就是 $n=2$ 时,定理 4.1.1 的一个应用.当 $n=m-1$ 时,定理 4.1.1 就是定理 2.4.3.2.

还可以指出的是 $\kappa_a(n)$曲率也可以表示成一般曲面函数 $f(\boldsymbol{x})$的多重加边 Hessian 矩阵的拟特征值乘积.

由 $\Lambda(n)=[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n]$,记 $N(m-n)$是 $\Lambda(n)$决定的法空间的一组基向量.按多重矢量积的算法,可记

$$\boldsymbol{N}_j = \boldsymbol{\alpha}_1 \times \boldsymbol{\alpha}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{\alpha}_n \qquad \boldsymbol{N}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}_i = 0 \qquad \text{—(4.1.32)}$$

且记 $N(m-n)=[\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2, \cdots, \boldsymbol{N}_{m-n}] \in R^{m\times(m-n)}$

构造多重约束条件下的加边 Hessian 矩阵(参见(3.1.2.1~18)式)的拟特征多项式

$$\begin{vmatrix} \mu I_m - \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) & N(m-n) \\ N^{\mathrm{T}}(m-n) & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{—(4.1.33)}$$

则$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$在 $N(m-n)$加边约束下,一定有 n 个拟特征值$\mu_i^n \quad i=1, 2, \cdots, n$.这里 μ_i^n 的上标 n 不是幂指数.

从而,由(3.1.2.16)式,即得

$$\kappa_a(n) = \prod_{i=1}^{n}\left(-\frac{\mu_i^n}{\|\nabla f\|}\right) = (-1)^n \cdot (-1)^{m-n} \frac{|H_{\partial\partial}|}{|N^{\mathrm{T}}(m-n)N(m-n)|} \|\nabla f\|^{-n}$$

即得

$$\kappa_a(n) = (-1)^m \frac{|H_{\partial\partial}|}{|N^{\mathrm{T}}(m-n)N(m-n)|} \|\nabla f\|^{-n} \qquad \text{—(4.1.34)}$$

其中

$$H_{\partial\partial} = \begin{bmatrix} \nabla^2 f & N(m-n) \\ N^{\mathrm{T}}(m-n) & 0 \end{bmatrix}$$

是$\nabla_f^2(\boldsymbol{x})$的多重加边 Hessian 矩阵.

注意,由定理 3.1.2.1,由(4.1.33)式决定的多重约束拟特征值 μ_i 与 $N(m-n)$的取法无关.例如,可以构造 $\widetilde{N}(m-n)$

$$\widetilde{N}(m-n) = N(m-n) \cdot T \qquad T \in R^{(m-n)\times(m-n)}$$

由§3章分析已知,在这样的法空间基向量组的变换下,拟特征值不变.

从而,由(4.1.33)式,给出了多重约束拟特征值的又一个几何模型,并且,这样就可以利用拟特征值分析,得到 R^m 空间的曲面 f 的 $\boldsymbol{x}^0$ 处的任取的一个 n 维切(子)平面的切方向所对应的曲面 f 的法截曲线全体所组成的那个(子)曲面片的主法曲率

$$\kappa_{\boldsymbol{a}}^i(n) = -\frac{\mu_i^n}{\|\nabla f\|} \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-n \qquad —(4.1.35)$$

以及 μ_i^n 所决定的拟特征向量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i^n$ 所表示的这个(子)曲面片的主法方向.(多重约束下的拟特征向量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i^n$ 由(3.1.2.15)式给出).

附带指出,对于 R^m 空间上的n 维曲面($n<m-1$),由于在该曲面上一点处任取的 k 维法截平面不一定总能与该曲面交到法截曲线(见§2.4.4 节),所以,一般地,是不能对该 n 维曲面去定义 k 维截面曲率的.这个情形也是由于 n 维曲面本身具有曲线的一些属性所决定的.

§4.1.1 常曲率曲面

曲面的(某个)曲率为一个常数的情形,有以下二个不尽相同的定义

定义 4.1.1.1 常曲率曲面是 Riemann 截面曲率为常数的曲面. ■

定义 4.1.1.2 常曲率曲面是 Gauss 总曲率为常数的曲面. ■

在 R^3 空间上,Riemann 截面曲率按定义就是 Gauss 总曲率,故以上两定义在 R^3 空间上等价.但在一般的 R^m 空间上,并非如此.定义 4.1.1.1 给出的曲面通称为**常曲率曲面**.

由(4.1.30)式,当 Riemann 符号 R_{itjk}满足以下关系时,

$$R_{itjk} = \kappa \cdot (g_{ij}g_{tk} - g_{ik}g_{tj}) \qquad \kappa - \text{const} \qquad —(4.1.1.1)$$

则 Riemann 截面曲率即为常数.显然,(4.1.1.1)式同时也是必要条件.

设 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ $\quad \boldsymbol{u}\in D_u\subset R^m \quad \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})\in R^{m+1}$给出了 R^{m+1}空间上的一个 m 维正则参数曲面片,并且 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的第一基本微分形式取为等温参数形式,

$$\mathrm{d}s^2 = v(\boldsymbol{u}) \cdot (\mathrm{d}u_1^2 + \mathrm{d}u_2^2 + \cdots + \mathrm{d}u_m^2) \qquad —(4.1.1.2)$$

(4.1.12)式的写法与通常将 $v(\boldsymbol{u})$ 表成 $v^2(\boldsymbol{u})$ 的写法有些不同.

由(2.4.3.10)式

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right)$$

得在(4.1.1.2)式下的 Γ_{ijk} 符号为

$$\begin{cases} i \neq j:\ \Gamma_{iji} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v}{\partial u_j} \quad \Gamma_{ijj} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v}{\partial u_i} \quad \text{其他的 } \Gamma_{ijk} \equiv 0 \\ i = j:\ \Gamma_{iik} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v}{\partial u_k} \quad \Gamma_{iii} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v}{\partial u_i} \quad k \neq i \end{cases} \qquad \text{—(4.1.1.3)}$$

再由

$$\boldsymbol{\Gamma}^{ij} = (\Gamma_{ij1}, \Gamma_{ij2}, \cdots, \Gamma_{ijm})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{ij} = (\Gamma^1_{ij}, \Gamma^2_{ij}, \cdots, \Gamma^m_{ij})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{ij} = \boldsymbol{I}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}^{ij} \qquad \text{—(2.4.3.11)}$$

和 $\quad \boldsymbol{I} = vI_m \quad \boldsymbol{I}^{-1} = v^{-1}I_m \quad I_m$—$m$ 阶单位阵

得

$$\begin{cases} i \neq j:\ \Gamma^i_{ij} = \dfrac{v^{-1}}{2}\dfrac{\partial v}{\partial u_j} \quad \Gamma^j_{ij} = \dfrac{v^{-1}}{2}\dfrac{\partial v}{\partial u_i} \quad \text{其他的 } \Gamma^k_{ij} \equiv 0 \\ i = j:\ \Gamma^k_{ii} = -\dfrac{v^{-1}}{2}\dfrac{\partial v}{\partial u_k} \quad \Gamma^i_{ii} = \dfrac{v^{-1}}{2}\dfrac{\partial v}{\partial u_i} \quad k \neq i \end{cases} \qquad \text{—(4.1.1.4)}$$

再由(2.4.3.23)式及等温参数形式的 $\boldsymbol{I}$ 矩阵为对角矩阵,有

$$R_{itjk} = \sum_{h=1}^{m} g_{kh}R^h_{itj} = g_{kk}R^k_{itj} = vR^k_{itj} \qquad \text{—(4.1.1.5)}$$

由(4.1.1.1)式,可知

$$R_{ikik} = \kappa v^2 \quad \text{其他 } R_{itjk} \equiv 0 \quad i \neq k \qquad \text{—(4.1.1.6)}$$

所以,必应成立

$$R^k_{iki} = \kappa v \qquad \text{—(4.1.1.7)}$$

由(2.4.3.16)式,

$$R^k_{iki} = \frac{\partial \Gamma^k_{ii}}{\partial u_k} - \frac{\partial \Gamma^k_{ki}}{\partial u_i} + \sum_{h=1}^{m}(\Gamma^h_{ii}\Gamma^k_{kh} - \Gamma^h_{ki}\Gamma^k_{ih}) \qquad \text{—(4.1.1.8)}$$

由(4.1.1.4)式,可知

$$\sum_{h=1}^{m}(\Gamma^h_{ii}\Gamma^k_{kh} - \Gamma^h_{ki}\Gamma^k_{ih}) = \sum_{\substack{h=1\\ h\neq i,k}}^{m}\Gamma^h_{ii}\Gamma^k_{kh} + \Gamma^i_{ii}\Gamma^k_{ki} + \Gamma^k_{ii}\Gamma^k_{kk} - \Gamma^k_{ki}\Gamma^k_{ik} - \Gamma^i_{ki}\Gamma^k_{ii}$$

并且

$$\Gamma_{ii}^{h}\Gamma_{kh}^{k}=-\frac{v^{-2}}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial u_h}\right)^2 \quad i\neq h,\ k$$

$$\Gamma_{ii}^{i}\Gamma_{ki}^{k}=\frac{v^{-2}}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial u_i}\right)^2$$

$$\Gamma_{ii}^{k}\Gamma_{kk}^{k}=-\frac{v^{-2}}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial u_k}\right)^2$$

$$\Gamma_{ki}^{k}\Gamma_{ik}^{k}=\frac{v^{-2}}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial u_i}\right)^2$$

$$\Gamma_{ki}^{i}\Gamma_{ii}^{k}=-\frac{v^{-2}}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial u_k}\right)^2$$

故

$$\sum_{h=1}^{m}(\Gamma_{ii}^{h}\Gamma_{kh}^{k}-\Gamma_{ki}^{h}\Gamma_{ih}^{k})=-\frac{v^{-2}}{4}\sum_{\substack{h=1\\h\neq i,\ k}}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial u_h}\right)^2$$

$$\frac{\partial\Gamma_{ii}^{k}}{\partial u_k}=\frac{v^{-2}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial u_k}\right)^2-\frac{v^{-1}}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial u_k^2}$$

$$\frac{\partial\Gamma_{ki}^{k}}{\partial u_i}=-\frac{v^{-2}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial u_i}\right)^2+\frac{v^{-1}}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial u_i^2}$$

将这些结果代入(4.1.1.8)式，有

$$R_{iki}^{k}=-\frac{v^{-1}}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial u_k^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial u_i^2}\right)+\frac{v^{-2}}{2}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial u_k}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial u_i}\right)^2\right)-\frac{v^{-2}}{4}\sum_{\substack{h=1\\h\neq i,\ k}}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial u_h}\right)^2 \qquad \text{—(4.1.1.9)}$$

由(4.1.1.6～7)、(4.1.1.9)式，得到

$$2v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial u_k^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial u_i^2}\right)-3\left(\left(\frac{\partial v}{\partial u_k}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial u_i}\right)^2\right)+\sum_{h=1}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial u_h}\right)^2+4\kappa v^3=0$$

$$\forall i、k \quad i\neq k \qquad \text{—(4.1.1.10)}$$

(4.1.1.10)式即为截面曲率为常数 κ 的曲面的等温参数 $v(\boldsymbol{u})$ 因子必须满足的微分方程组.

对(4.1.1.10)式所表示的微分方程组，将下标 i、k 分别加总求和. 先对任一个下标 k，对 $i=1,2,\cdots,m$，$i\neq k$ 求和，并经整理，有

$$2(m-1)v\frac{\partial^2 v}{\partial u_k^2}+2v\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m}\frac{\partial^2 v}{\partial u_i^2}-3(m-2)\left(\frac{\partial v}{\partial u_k}\right)^2-3\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial u_i}\right)^2+$$

$$+(m-1)\sum_{h=1}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial u_h}\right)^2+4(m-1)\kappa v^3=0 \quad k=1,2,\cdots,m$$

再对上式的 $k=1,2,\cdots,m$ 方程式加总求和，得

$$4(m-1)v\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 v}{\partial u_k^2}+(m(m-1)-3(m-2)-3m)\sum_{h=1}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial u_h}\right)^2+$$

$$+4m(m-1)\kappa v^3=0$$

由于 $m(m-1)-3(m-2)-3m=(m-1)(m-6)$

故得到

$$4v\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 v}{\partial u_k^2}+(m-6)\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial u_k}\right)^2+4m\kappa v^3=0 \qquad -(4.1.1.11)$$

注意，对(4.1.1.10)式方程组，简单地按 $i,k=1,2,\cdots,m$ 先后加总，也可以得到(4.1.1.11)式. 但由(4.1.1.5、6、10)式，及在 $i=k\Rightarrow R_{iiii}\equiv R^i_{iii}\equiv 0$，但 $v(\boldsymbol{u})\neq 0$ 的属性，即知，在逻辑上，应按以上方式对(4.1.1.10)式方程组加总.

(4.1.1.11)式是截面曲率为常数 κ 的曲面的等温参数 $v(\boldsymbol{u})$ 因子的必要条件方程式(而(4.1.1.10)式方程组则是充要条件). 但(4.1.1.11)式在有些情形下也具有充分性(见下文说明).

特别地，在 $m=6$ 的 R^{6+1} 维 Euclid 氏空间上，(4.1.1.11)式有最简单的形式

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 v}{\partial u_k^2}+m\kappa v^2=0 \quad (m=6) \qquad -(4.1.1.12)$$

(4.1.1.12)式是椭圆型的二阶偏微分方程. 由(4.1.1.12)式的形式，取

$$v=v(t) \quad t=u_1^2+u_2^2+\cdots+u_6^2$$

的变换，有

$$\frac{\partial v}{\partial u_i}=v'\cdot 2u_i \quad \frac{\partial^2 v}{\partial u_i^2}=v''\cdot 4u_i^2+v'\cdot 2 \quad v'=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad v''=\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2}$$

从而，由(4.1.1.12)式可得以下的常微分方程式

$$2tv''+6v'+3\kappa v^2=0 \qquad -(4.1.1.13)$$

给出一定的初值条件，(4.1.1.13)式即可解得 $v(t)$ 函数.

注意到，若 $v(t)$ 是(4.1.1.13)式的一个特解，那么，对任取的非零实数 a，作

$$\tilde{v}(t)=av(t) \quad \tilde{\kappa}=\kappa/a$$

则 $\tilde{v}(t)$ 一定是(4.1.1.13)式形式的以下方程

$$2tv'' + 6v' + 3\kappa v^2 = 0$$

的特解.故以上形式的等温参数扩大 a 倍,则曲面的截面曲率就缩小 a 倍.

所以,只需考虑初值条件 $v(0) = 1$ 的情形.这时,从(4.1.1.13)式可得一阶初值条件应是 $v'(0) = -\dfrac{\kappa}{2}$.

在这一初值条件下可利用幂级数方法来求解(4.1.1.13)式.设 v 在 $t = 0$ 的邻域有

$$v(t) = 1 - \frac{\kappa}{2}t + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_n}{n!}t^n$$

的幂级数形式.从而

$$v'(t) = -\frac{\kappa}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_n}{(n-1)!}t^{n-1}$$

$$v''(t) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_n}{(n-2)!}t^{n-2}$$

再由(4.1.1.13)式,可得

$$\begin{aligned}2tv'' + 6v' + 3\kappa v^2 &= -3\kappa^2 t + \frac{3}{4}\kappa^3 t^2 + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-2)!} + \frac{3}{(n-1)!}\right]2c_n t^{n-1} + \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{6\kappa c_n}{n!}t^n - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3\kappa^2 c_n}{n!}t^{n+1} + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{h=2}^{\infty}\frac{3\kappa c_n c_h}{n!h!}t^{n+h} \\ &= 0\end{aligned}$$

由以上幂级数中 t^p 项前的系数应为 0 的要求,可解出 c_p, $p = 1, 2, \cdots$ 系数.

$$p = 1 \quad -3\kappa^2 + 8c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{3\kappa^2}{8} = \frac{3!}{4^2}\kappa^2$$

$$p = 2 \quad \frac{3}{4}\kappa^3 + 5c_3 + 3\kappa c_2 = 0 \Rightarrow c_3 = -\frac{3}{8}\kappa^3 = -\frac{4!}{4^3}\kappa^3$$

$$p = 3 \quad 2c_4 + \kappa c_3 - \frac{3\kappa^2}{2}c_2 = 0 \Rightarrow c_4 = \frac{15}{32}\kappa^4 = \frac{5!}{4^4}\kappa^4$$

$$p = 4 \quad \frac{7c_5}{12} + \frac{\kappa c_4}{4} - \frac{\kappa^2 c_3}{2} + \frac{3\kappa c_2^2}{4} = 0 \Rightarrow c_5 = -\frac{45\kappa^5}{64} = -\frac{6!}{4^5}\kappa^5$$

$$p = 5 \quad \left(\frac{1}{4!} + \frac{3}{5!}\right)2c_6 + \frac{6\kappa c_5}{5!} - \frac{3\kappa^2 c_4}{4!} + \frac{3\kappa c_2 c_3}{2!3!} + \frac{3\kappa c_3 c_2}{3!2!} = 0$$

$$\Rightarrow c_6 = \frac{315\kappa^6}{256} = \frac{7!}{4^6}\kappa^6$$

$\cdots$

所以,

$$v(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)!}{n!}\left(\frac{\kappa}{4}\right)^n t^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{\kappa}{4}\right)^n t^n$$

—(4.1.1.14)

显然，在 $\left|\frac{\kappa}{4}t\right|<1$ 时，(4.1.1.14)式右边幂级数绝对收敛. 由此可知

$$v^{(n)}(0)=(-1)^n(n+1)!\left(\frac{\kappa}{4}\right)^n \quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

即可知 $v(t)$ 的变量取 $\frac{\kappa}{4}t$ 形式，$v(t)$ 是倒数函数(因 $v^{(n)}$ 符号＋、－交错)，$n=1$ 时，$v'(0)=-2\left(\frac{\kappa}{4}\right)$，故 $v(t)$ 为平方函数，最后，从 $v(0)=1$ 可知

$$v(t)=\frac{1}{\left(1+\frac{\kappa}{4}t\right)^2} \quad t=x_1^2+\cdots+x_6^2 \qquad \text{—(4.1.1.15)}$$

对这一结果可验证满足(4.1.1.10)式. 并可验证对于任意的 m

$$t=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2$$

由(4.1.1.15)式给出的 $v(t)$ 都满足(4.1.1.10)式. 所以

$$ds^2=\frac{dx_1^2+dx_2^2+\cdots+dx_m^2}{\left(1+\frac{\kappa}{4}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2)\right)^2} \qquad \text{—(4.1.1.16)}$$

决定的曲面是截面曲率为常数 κ 的曲面.

(4.1.1.16)式即是 Riemann 在 1854 年的演讲中提出的公式. 以上则给出这一公式的推导过程.

利用(4.1.1.10)式方程组，再给出以下一个特解. 设等温参数 v 取以下形式

$$v=v(u_m)$$

即 v 是单变量 u_m 的函数. 在(4.1.1.10)式中，对 i，$k\neq m$ 的下标，有

$$\left(\frac{\partial v}{\partial u_m}\right)^2+4\kappa v^3=0 \qquad \text{—(4.1.1.16)}$$

即

$$\frac{\partial v}{\partial u_m}=\pm 2\cdot\sqrt{-\kappa}v^{\frac{3}{2}}$$

故知应有 $\kappa<0$. 直接解出以上方程即得

$$v = (\pm\sqrt{-\kappa}\cdot u_m + c_0)^{-2} \qquad —(4.1.1.17)$$

可验证,(4.1.1.17)式给出的 $v(u_m)$,也满足(4.1.1.10)式中,取下标 i(或 k)等于 m,而 k(或 i)不等于 m 的情形.故(4.1.1.17)式给出的等温参数因子 $v(u_m)$ 决定的曲面也是截面曲率为常数的曲面.

当在(4.1.1.17)式中取 $\kappa = -1$, $c_0 = 0$,有

$$v(u_m) = \frac{1}{u_m^2} \qquad —(4.1.1.18)$$

这即是 Poincaré 上半平面.

但这里应指出,如果局限 R^{m+1} 空间上的正则参数曲面片,那么,其第一基本微分形式取等温参数形式且又是截面曲率恒为常数的正则参数曲面片,就只能是球面.这是因为由(4.1.1.6)式即知,此时**基本 R_{itjk} 符号**(意义可见§4.3.1节说明)中,只有 R_{ikik}, $i<k$ 形式的符号恒为 κv^2,其余的 R_{itjk} 符号均为 0.且由于正则参数曲面片上存在第二基本微分形式,故 $\mathbb{I}$ 矩阵存在.从而可知 $\mathbb{I}$ 矩阵的二阶伴随矩阵 $\mathbb{I}_2$ 是对角矩阵,且主对角元素均为 κv^2.所以 $\mathbb{I}$ 矩阵必也是对角矩阵,且主对角元素应均为 $\sqrt{\kappa}\cdot v$.故知必只能有 $\kappa>0$,并可知成立 $\mathbb{I}=\sqrt{\kappa}\cdot \boldsymbol{I}$.由定理 2.4.2.1 即知这样的正则参数曲面片只能是球面.因此可知由(4.1.1.18)式给出的具有负数值的截面曲率为常数的曲面只能理解为是"抽象曲面".抽象曲面可能在其他类型的内积空间中得到实现.而在(4.1.1.16)式给出的第一基本微分形式下,在 R^{m+1} 空间上建立以下形式的球面参数方程,

设 $\boldsymbol{u}\in D\subset R^m$ 记 $s=\sum_i u_i^2$ 取 $\kappa>0$ 的常数,作

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) = \begin{cases} x_i = \dfrac{4u_i}{4+\kappa s} & i=1,2,\cdots,m \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{\kappa}}\cdot\dfrac{4-\kappa s}{4+\kappa s} \end{cases}$$

则

$$x_1^2+\cdots+x_m^2+z^2 = \frac{1}{\kappa}$$

所以 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 是 R^{m+1} 空间上的球面.且由直接计算即知[1]

$$\boldsymbol{I} = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\mathrm{d}u_1^2+\mathrm{d}u_2^2+\cdots+\mathrm{d}u_m^2}{\left(1+\dfrac{\kappa}{4}(u_1^2+\cdots u_m^2)\right)^2}$$

利用以上诸式,还可以构造出其他类型的具有某些特别属性的曲面.

---

[1] 引自《微分几何》,陈维桓,北京大学出版社,2006年,第269~272页.

例如，规定某抽象曲面的基本 R_{itjk} 符号取值如下：

$$\begin{cases} R_{ikik} = -1 & \text{当 } k \neq m \quad i \neq k \\ R_{imim} = 1 & \text{当 } i \neq m \\ R_{itjk} = 0 & \text{其他情形} \end{cases} \qquad —(4.1.1.19)$$

则相应地，规定该曲面的第一基本微分形式取为等温参数形式，则与(4.1.1.19)对应地有

$$\begin{cases} vR^k_{iki} = -1 & \text{当 } k \neq m \quad i \neq k \\ vR^m_{imi} = 1 & \text{当 } i \neq m \end{cases} \qquad —(4.1.1.20)$$

其中 v 为等温参数因子.

取 $v = v(u_m)$，利用(4.1.1.9)式，并取下标 i，$k \neq m$，就有，

$$R^k_{iki} = -\frac{v^{-2}}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial u_m}\right)^2$$

由(4.1.1.20)式，应要求成立

$$v \cdot \left(-\frac{v^{-2}}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial u_m}\right)^2\right) = -1 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial u_m} = \pm 2v^{\frac{1}{2}}$$

如取

$$\frac{\partial v}{\partial u_m} = 2v^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v = u_m^2$$

可验证这一形式的等温参数因子满足(4.1.1.19)式.

反过来说，当给出一个等温参数形式的某曲面的第一基本微分形式，$v(\boldsymbol{u})$是等温参数因子. 则从(4.1.1.10)式可得，若有常数 κ，使

$$\kappa = -\frac{v^{-3}}{4}\left(2v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial u_k^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial u_i^2}\right) - 3\left(\left(\frac{\partial v}{\partial u_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial u_i}\right)^2\right) + \sum_{h=1}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial u_h}\right)^2\right)$$

$$\forall i,\ k \quad i \neq k \qquad —(4.1.1.21)$$

则该曲面必是常曲率曲面，且 κ 为其截面曲率. 这即是说，如果等温参数 $v(\boldsymbol{u})$ 所决定的曲面是常曲率曲面，则由(4.1.1.11)式，该曲面的截面曲率 κ 由下式决定

$$\kappa = -\frac{v^{-3}}{4m}\left(4v\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 v}{\partial u_k^2} + (m-6)\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial u_k}\right)^2\right) \qquad —(4.1.1.22)$$

注意(4.1.1.21～22)式说明截面曲率 κ 不仅与 $v(\boldsymbol{u})$的形式有关，同时也可能与维数 m 有关.

如果常曲率曲面的等温参数因子 $v = v(t) \quad t = \sum_i^m u_i^2$，那么，由(4.1.1.13)

式截面曲率 κ 由下式给出，

$$\kappa = -\frac{v^{-2}}{3}(2tv'' + 6v') \qquad -(4.1.1.23)$$

类似地，从(4.1.1.16)式中可得到 $v = v(u_m)$ 形式的等温参数因子决定的常曲率曲面的截面曲率 κ 由下式决定

$$\kappa = -\frac{v^{-3}}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial u_m}\right)^2 \qquad -(4.1.1.24)$$

(4.1.1.23～24)式表明，在这样的等温参数形式下，截面曲率 κ 与维数 m 无关.

现再给出一个常曲率曲面的截面曲率 κ，在给定的等温参数因子的函数形式下，与维数 m 有关的例子. 取等温参数

$$v = v(s) \quad s = u_1 + u_2 + \cdots + u_m$$

从而

$$\frac{\partial v}{\partial u_i} = v' \quad \frac{\partial^2 v}{\partial u_i^2} = v''$$

利用(4.1.1.11)式，得

$$4v \cdot v'' + (m-6)v'^2 + 4\kappa v^3 = 0 \qquad -(4.1.1.25)$$

则

$$\kappa = -\frac{v^{-3}}{4}(-4vv'' + (m-6)v'^2) \qquad -(4.1.1.26)$$

即与 m 有关.

从(4.1.1.23)式中，取 $m = 6$，$\kappa = -1$，有

$$v'' = v^2$$

可解出 $v = \frac{6}{s^2}$ $(s \neq 0)$. 可验证，这一等温参数因子仅在 $m = 6$ 维曲面上可决定一个常曲率曲面.

以下再考虑定义 4.1.1.2 给出的 Gauss 曲率恒为常数的曲面. 很容易构造出示例，在 $m > 3$ 的 R^m 空间上，Gauss 曲率恒为常数的曲面其截面曲率不恒为常数. 如在 R^4 空间上的以下曲面

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0 \quad (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0)$$

则

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = 2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_4 \end{bmatrix} \quad \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

由拟特征值分析易知，这一曲面的 3 个拟特征值是

$$\mu_1 = 0 \quad \mu_2 = \mu_3 = 2$$

所以，这一曲面的 3 个主法曲率是

$$\kappa_1 = 0 \quad \kappa_2 = \kappa_3 = -\frac{1}{(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{1/2}}$$

因而，其 Gauss 总曲率恒为 0，但其截面曲率不为常数. 因为由(4.1.16)式，取 $\boldsymbol{\alpha}_{1,2,3}$是对应于 $\kappa_{1,2,3}$的 R^4 空间上的拟特征向量，则在 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 决定的切超平面的 2 维子平面上的截面曲率是

$$\kappa(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = \frac{\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1)\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) - \kappa_n^2(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 - (\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2)^2}$$

因拟特征向量的性质，易知，对 $\boldsymbol{\alpha}_i$，$\boldsymbol{\alpha}_j$ 拟特征向量(见(4.1.15)式)

$$\kappa_n(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\boldsymbol{\alpha}_i}{\|\nabla f\|} = \kappa_i \end{cases}$$

以及 $\boldsymbol{\alpha}_i$、$\boldsymbol{\alpha}_j$ 之间的正交性质，知

$$\kappa(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = 0$$

同理，

$$\kappa(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \kappa_2 \cdot \kappa_3 = \frac{1}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$$

故截面曲率 $\kappa(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) \neq \kappa(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$.

考虑 $\boldsymbol{x} \in D \subset R^m$ 由

$$z = f(u) \quad u = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2)^{\frac{1}{2}} \quad (u \neq 0)$$

形式决定的旋转曲面为 Gauss 总曲率恒为常数曲面的充要条件.

易知

$$\begin{cases} \nabla f = \dfrac{f'}{u}\boldsymbol{x} \\ \nabla^2 f = \dfrac{f'}{u}I_m - \dfrac{f'}{u^3}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} + \dfrac{f''}{u^2}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \end{cases} \qquad —(4.1.1.27)$$

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \quad f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2}$$

将$\nabla^2 f$表成以下形式

$$\nabla^2 f = \frac{f'}{u} I_m - \frac{f' - uf''}{u^3} \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$$

（1）若 $f' = uf'' \Rightarrow z = \frac{1}{2}u^2 + c$，$c$是常数，但这一曲面函数的Gauss总曲率是

$$|\kappa| = \frac{1}{(1 + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{\frac{m}{2}+1}}$$

对于不同的 $\boldsymbol{x}$，κ不可能为常数，故应舍去.

（2）继设 $f' \neq uf''$，$\nabla^2 f$矩阵可表成

$$\nabla^2 f = \left(\frac{f' - uf''}{u^3}\right) \cdot [\lambda I_m - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}] \quad \lambda = \frac{u^2 f'}{f' - uf''} \qquad —(4.1.1.28)$$

则由(3.3.3.9)式即知

$$|\nabla^2 f| = \left(\frac{f' - uf''}{u^3}\right)^m \cdot \lambda^{m-1}(\lambda - u^2)$$

经整理，即得

$$|\nabla^2 f| = \left(\frac{f'}{u}\right)^{m-1} \cdot f'' \qquad —(4.1.1.29)$$

再由(3.1.1.79)式，Gauss曲率可表为

$$\kappa = (-1)^m \frac{\left(\frac{f'}{u}\right)^{m-1} \cdot f''}{(1 + f'^2)^{\frac{m}{2}+1}} \qquad —(4.1.1.30)$$

将$(-1)^m$因子归结于κ的取符号，从上式即得以下微分方程

$$(f')^{m-1} f'' = \kappa u^{m-1} (1 + f'^2)^{\frac{m}{2}+1} \qquad —(4.1.1.31)$$

这就是Gauss曲率是常数的旋转曲面函数 $f(\cdot)$的充要条件.

当 $m = 2$，上式即为

$$f'f'' = \kappa u (1 + f'^2)^2$$

这即是在R^3空间上的旋转曲面为Gauss曲率是常数的曲面的微分方程.

在(4.1.1.31)式中作 $y = f'$ 的替换，通常可得到关于 y 的一次积分表达式，但一般只能在 m 为偶数的情形下，就特别设定的初值条件，才能得到 f 的显式解（例如 $f(u)$是球面函数）.

由(4.1.1.30)式，当取 $f(u)=\pm u$，则 $f''\equiv 0\Rightarrow\kappa\equiv 0$. 这即是上文中给出的示例. 附带说明，对 R^{m+1} 空间上的曲面函数，

$$F(\boldsymbol{x},z)=f(\boldsymbol{x})+0\cdot z=0\qquad \boldsymbol{x}\in D\subset R^m\quad \nabla f(\boldsymbol{x})\neq\boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{x}\in D$$

其中 $f(\boldsymbol{x})$ 是任意的二阶可微函数，则 F 函数决定的 R^{m+1} 空间上的曲面均是直纹(可展)曲面，从而其 Gauss 曲率总为 0. 这可由 F 的加边 Hessian 矩阵行列式恒为 0 得知.

由 § 4.1 节关于 m 维曲面的 n 维截面曲率 $\kappa_\alpha(n)$ 的分析方法，可以拓展以上关于常曲率曲面的定义.

定义 4.1.1.3 m 维曲面的 n 维截面曲率 $\kappa_\alpha(n)=$ 常数的曲面称为 ***n* 维(截面)常曲率曲面**，$2\leqslant n\leqslant m-1$. ■

则通常所说的常曲率曲面即为 2 维常曲率曲面，Gauss 曲率为常数的曲面即为 $m-1$ 维常曲率曲面.

由(4.1.25)式，n 维常曲率曲面即为

$$\kappa_\alpha(n)=\frac{|\,\boldsymbol{t}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I\!I}\,\boldsymbol{t}_j\,|}{|\,\boldsymbol{t}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{t}_j\,|}=\text{常数}\quad i,j=1,2,\cdots,n\quad\text{—(4.1.1.32)}$$

由(4.1.30c)式，上式分式的分子可表成其二阶子式 $I\!I_{\alpha\zeta\beta\gamma}$ 的伴随矩阵行列式，具体地可表成下式. 设 4 下标 $\{\alpha,\zeta,\beta,\gamma\}$ 对应于双下标 $\{p,z\}$，这可使用符号 $I\!I_{pz}$ 表示 $I\!I_{\alpha\zeta\beta\gamma}$，则

引用以下符号

$$N=\binom{n}{2}$$

$$|\,\boldsymbol{t}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I\!I}\,\boldsymbol{t}_b\,|^{n-1}=\sum(-1)^s I\!I_{1z_1}I\!I_{2z_2}\cdots I\!I_{Nz_N}\quad a,b=1,\cdots,n$$

其中 $s=s(z_1,z_2,\cdots,z_N)$ 下标的逆序指数.

由(4.1.30b)式，上式又可表示为

$$|\,\boldsymbol{t}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I\!I}\,\boldsymbol{t}_b\,|^{n-1}=\sum_{\{z_1,z_2,\cdots,z_N\}}(-1)^s\prod_{\sigma=1}^{N}\Big(\sum_{i_\sigma,h_\sigma,j_\sigma,k_\sigma=1}^{m}R_{i_\sigma h_\sigma j_\sigma k_\sigma}\cdot t_{i_\sigma}^{\alpha_{z_\sigma}}t_{h_\sigma}^{\zeta_{z_\sigma}}t_{j_\sigma}^{\beta_{z_\sigma}}t_{k_\sigma}^{\gamma_{z_\sigma}}\Big)$$

—(4.1.1.33)

这里下标 $\{i_\sigma,h_\sigma,j_\sigma,k_\sigma\}$、上标 $\{\alpha_{z_\sigma},\zeta_{z_\sigma},\beta_{z_\sigma},\gamma_{z_\sigma}\}$，都指由下标变换 $\{\alpha,\beta,\zeta,\gamma\}\rightarrow\{\sigma,z_\sigma\}$ $\sigma=1,2,\cdots,N$ 中 σ 的选取有关.

$$\{i,h,j,k\}=\{i_1,h_1,j_1,k_1;\cdots;i_N,h_N,j_N,k_N\}$$

$$R(\{i,h,j,k\})=R_{i_1h_1j_1k_1}\cdot\cdots\cdot R_{i_Nh_Nj_Nk_N}$$

$$T(\{i,h,j,k\},z_1,z_2,\cdots,z_N)=t_{i_1}^{\alpha_{z_1}}t_{h_1}^{\zeta_{z_1}}t_{j_1}^{\beta_{z_1}}t_{k_1}^{\gamma_{z_1}}\cdot\cdots\cdot t_{i_N}^{\alpha_{z_N}}t_{h_N}^{\zeta_{z_N}}t_{j_N}^{\beta_{z_N}}t_{k_N}^{\gamma_{z_N}}$$

则(4.1.1.33)式可简写成

$$|\boldsymbol{t}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I\!I}\,\boldsymbol{t}_b|^{n-1}=\sum_{\{z_1,z_2,\cdots,z_N\}}(-1)^s\sum_{\{i,h,j,k\}=1}^{m}R(\{i,h,j,k\})\cdot$$
$$\cdot T(\{i,h,j,k\},z_1,\cdots,z_N)\qquad —(4.1.1.34)$$

类似地,再引用以下符号

$$G(\{i,h,j,k\})=(g_{i_1j_1}g_{h_1k_1}-g_{i_1k_1}g_{h_1j_1})\cdot\cdots\cdot(g_{i_Nj_N}g_{h_Nk_N}-g_{i_Nk_N}g_{h_Nj_k})$$

则(4.1.1.32)式中的分式的分母可表成

$$|\boldsymbol{t}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{t}_b|^{n-1}=\sum_{\{z_1,z_2,\cdots,z_N\}}(-1)^s\sum_{\{i,h,j,k\}=1}^{m}G(\{i,h,j,k\})\cdot$$
$$\cdot T(\{i,h,j,k\},z_1\cdots z_N)\qquad —(4.1.1.35)$$

(4.1.1.34～35)式中,右边第二个 $\sum$ 号是关于下标序列 $i_1,h_1,j_1,k_1;\cdots;i_N,h_N,j_N,k_N$ 中的任一个下标均取 1 到 m 的值的总和,而第一个 $\sum$ 号即是行列式展开公式中的求和号,即对全部的排列$\{z_1,z_2,\cdots,z_N\}$求和.

比较(4.1.1.34)和(4.1.1.35)式,再由(4.1.1.32)式,即知,当 m 维曲面是 n 维常曲率曲面,则总应有常数 $\kappa=\kappa_a(n)$,并使

$$R(\{i,h,j,k\})=\kappa^{n-1}\cdot G(\{i,h,j,k\})\qquad —(4.1.1.36)$$

(4.1.1.36)式即为

$$\prod_{\sigma=1}^{N}R_{i_\sigma h_\sigma j_\sigma k_\sigma}=\kappa^{n-1}\prod_{\sigma=1}^{N}(g_{i_\sigma j_\sigma}g_{h_\sigma k_\sigma}-g_{i_\sigma k_\sigma}g_{h_\sigma j_\sigma})\qquad —(4.1.1.37)$$

当 $n=2$,上式即为

$$R_{ihjk}=\kappa(g_{ij}g_{hk}-g_{ik}g_{hj})$$

易知,当 m 维曲面为 2 维常曲率曲面时,它同时一定是任意的 n 维常曲率曲面,$2\leqslant n\leqslant m-1$. 所以,$n$ 维常曲率曲面的概念是成立的. 可以构造出 m 维曲面,它是一个 n 维常曲率曲面,同时又不是 $n-1$ 维常曲率曲面,$2<n<m-1$. 如取曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{d}s^2=u_1^2u_2^2\cdot(\mathrm{d}u_1^2+d\,u_2^2)-\sum_{i=3}^{m}a_i^2\mathrm{d}u_i\qquad a_i-\mathrm{const}\quad m\geqslant 4$$

则在这一抽象曲面上,全部基本 R_{itjk} 符号中,只有

$$R_{1212}=R_{2121}=-R_{1221}=-R_{2112}=u_1^2+u_2^2$$

其余的均恒为 0. 故可知，该曲面不是 2 维常曲率曲面，但一定是 3 维常曲率曲面，且 3 维截面曲率恒为 0.

由于任意的 $n+1$ 维截面都可看成是无限多个 n 维截面的集合，所以，若曲面是 n 维常曲率曲面，则一定也是 $n+1$ 维常曲率曲面.

§4.2 Ricci 曲率张量及 Einstein 空间

以下关于曲面上的诸几何量，都是指在 R^m 空间上的一个 $m-1$ 维曲面 f 而言的.

利用 Gauss－Codazzi 方程组(2.4.3.1～26)式的符号规定与分析，

$$\boldsymbol{I}=[g_{ij}]\quad \boldsymbol{I}^{-1}=[g^{ki}]\quad \boldsymbol{II}=[C_{ij}]\quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1\ (k,\ i\ \text{类似})$$

再作

$$\begin{aligned}\sum_{i,\,k=1}^{m-1}R_{itjk}\cdot g^{ki}&=\sum_{i,\,k=1}^{m-1}(C_{ij}C_{tk}-C_{tj}C_{ik})g^{ki}\\&=\sum_{i=1}^{m-1}\Big(C_{ij}\sum_{k=1}^{m-1}C_{tk}g^{ki}-C_{tj}\sum_{k=1}^{m-1}C_{ik}g^{ki}\Big)\\&=-\sum_{i=1}^{m-1}(C_{ij}D_{ti}-C_{tj}D_{ii})\end{aligned}\qquad —(4.2.0)$$

这里的 D_{ij} 是(2.4.3.5)式规定的 W 映射矩阵(取负号)D 的元素，由(2.4.3.17)式，

$$\sum_{i,\,k=1}^{m-1}R_{itjk}g^{ki}=\sum_{i=1}^{m-1}R^i_{itj}\qquad —(4.2.1)$$

规定用符号

$$R_{tj}=-\sum_{i=1}^{m-1}R^i_{itj}\quad t,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1\qquad —(4.2.2)$$

称 R_{tj} 是 **Ricci 曲率张量**[1]. 由(2.4.3.16)式，可得直接用 Christoffel 符号表示的 R_{tj} 的公式：

---

[1] 这里可以指出，(4.2.2)式右边取负号，是因为本书在 Gauss－Codazzi 方程中的(2.4.3.17)式取了负号所至. 但仔细分析可知，在(2.4.3.16)式，(2.4.3.34)式(包括(2.4.3.35)式)和(4.2.2)式之中，总有一式应取成负号. 各文献中的处理方式也不尽统一. 故本书采用了保证(2.4.3.34)式前不取负号的方式.

$$R_{tj} = -\left(\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{\partial\Gamma^i_{ij}}{\partial u_t}-\frac{\partial\Gamma^i_{tj}}{\partial u_i}\right)+\sum_{i,h=1}^{m-1}(\Gamma^h_{ij}\Gamma^i_{th}-\Gamma^h_{tj}\Gamma^i_{ih})\right) \quad —(4.2.2a)$$

引用以下矩阵符号：

$$\mathbb{I}[tj] = \begin{bmatrix} R_{1tj1} & R_{1tj2} & \cdots & R_{1tj(m-1)} \\ R_{2tj1} & R_{2tj2} & \cdots & R_{2tj(m-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{(m-1)tj1} & R_{(m-1)tj2} & \cdots & R_{(m-1)tj(m-1)} \end{bmatrix} \quad —(4.2.3)$$

即$\mathbb{I}[tj]$是黎曼符号 R_{itjk} 固定 t、j 指标后，遍取 $i,k=1,\cdots,m-1$ 所得到 R_{itjk} 元素组成的一个矩阵. 由 R_{itjk} 的意义，也可以说$\mathbb{I}[tj]$矩阵是第二基本二次型矩阵$\mathbb{I}$的第 t 行元素、第 j 列元素所能构造的二阶子式全体组成的矩阵.

其次，再引进以下矩阵符号

$$\widetilde{R} = [R_{tj}] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1(m-1)} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2(m-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{(m-1)1} & R_{(m-1)2} & \cdots & R_{(m-1)(m-1)} \end{bmatrix} \quad —(4.2.4)$$

(4.2.4)式中的 R_{tj} 由(4.2.2)式给出. $\widetilde{R}$ 是 Ricci 曲率张量全体所构造的矩阵.

应注意 R_{tj} 符号与$\mathbb{I}[tj]$符号意义是不同的. 但二者间有以下关系，

$$R_{tj} = \mathrm{tr}(\mathbb{I}[tj]\,I^{-1}) \quad —(4.2.5)$$

这由(4.2.1)式和$\mathbb{I}[tj]$的构造即知.

现在再用I^{-1}右乘 $\widetilde{R}$ 矩阵并取其迹，便有

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\widetilde{R}I^{-1}) &= \sum_{t,j=1}^{m-1} R_{tj}g^{jt} \\ &= \sum_{t,j,i=1}^{m-1}(C_{ij}D_{ti} - C_{tj}D_{ii})g^{jt} \\ &= -\sum_{i,t=1}^{m-1}\left[D_{ti}\left(-\sum_{j=1}^{m-1}C_{ij}g^{jt}\right) - D_{ii}\left(-\sum_{j=1}^{m-1}C_{tj}g^{jt}\right)\right] \\ &= \sum_{i,t=1}^{m-1}[D_{ii}D_{tt} - D_{ti}D_{it}]\end{aligned}$$

因此，可记

$$R = \mathrm{tr}(\widetilde{R}I^{-1}) = \sum_{i,j=1}^{m-1}[D_{ii}D_{jj} - D_{ij}D_{ji}] \quad —(4.2.6)$$

称(4.2.6)式决定的量值 R 为 **Ricci 曲率标量**.

注意到

$$D_{ii}D_{jj}-D_{ij}D_{ji}=\begin{vmatrix}D_{ii} & D_{ij}\\ D_{ji} & D_{jj}\end{vmatrix}$$

故可记

$$D_{itjk}=\begin{vmatrix}D_{ij} & D_{ik}\\ D_{tj} & D_{tk}\end{vmatrix} \qquad \text{—(4.2.7)}$$

则 D_{itjk} 也是一个张量，并且是 W 映射矩阵的 2 阶子式.

由此，Ricci 曲率标量又可表示成

$$R=2\sum_{i=1}^{m-2}\sum_{j=i+1}^{m-1}D_{ijij} \qquad \text{—(4.2.8)}$$

(4.2.8)式由 D_{itjk} 作为 2 阶行列式的属性以及(4.2.6)式即可推知.

注意到

$$D=-W=[D_{ij}]\quad i,j=1,\cdots,n \qquad \text{—(2.4.3.5)}$$

的 2 阶伴随矩阵(见 § 2.4.3 节)，

$$D_2=\begin{bmatrix}D_{1212} & D_{1213} & D_{1214} & \cdots\\ D_{1312} & D_{1313} & D_{1314} & \cdots\\ D_{1412} & D_{1413} & D_{1414} & \cdots\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \end{bmatrix}$$

则

$$\mathrm{tr}D_2=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m-1}D_{ijij} \qquad \text{—(4.2.9)}$$

由此可知 Ricci 曲率标量是

$$R=2\mathrm{tr}D_2 \qquad \text{—(4.2.10)}$$

但由 2 阶伴随矩阵的性质可知，D_2 的特征值是

$$\lambda=\lambda_i\lambda_j\quad i<j\quad 1\leqslant i,j\leqslant m-1 \qquad \text{—(4.2.11)}$$

其中 λ_i、λ_j 均指 D 矩阵的特征值. 从而可知

$$R=2\sum_{\substack{(i,j)\\ i<j}}\lambda_i\lambda_j \qquad \text{—(4.2.12)}$$

因此，Ricci 曲率标量 R 是 W 映射矩阵 W 的特征值 λ_i 的乘积 $\lambda_i\lambda_j$ $i<j$ 的和的 2 倍[附带指出，(4.2.12)式与 λ_i 的下标排序方式无关]. 显然，由于 W 矩阵的特征值就是曲面的主法曲率，故 R 标量也可以说是曲面主法曲率 κ_i 的乘积 $\kappa_i\kappa_j$ 的和的 2 倍. 当 $m=3$，则

$$\frac{R}{2}=\kappa$$

这里的 κ 是指的曲面的 Gauss 曲率. 因此,类似地,R 曲率标量也完全可由 Hessian 矩阵的拟特征值表出.

实际上,由(3.2.2.24)式,即得 Ricci 曲率标量

$$R=2\binom{m-1}{2}\kappa_f(2) \qquad —(4.2.13)$$

定义 4.2.1 设 R^m 空间上的 $m-1$ 维曲面 f,如果 f 满足以下条件

$$\widetilde{R}=cR\cdot \boldsymbol{I} \qquad —(4.2.14)$$

称曲面 f 为 **Einstein 空间**. ■

这里 $\widetilde{R}$ 是(4.2.4)式规定的矩阵,R 是 Ricci 曲率标量,$\boldsymbol{I}$ 是曲面 f 的第一基本二次型矩阵,c 是比例因子. 在(4.2.14)式中当 R 曲率标量为 0,就有 $\widetilde{R}=[0]$,这即成为真空 Einstein 方程(见下一节内容). 这里先考虑 $R\neq 0$ 的情形.

以下证明满足(4.2.14)式的曲面 f 上必要有

$$c=\frac{1}{m-1}\quad (m\geqslant 4)$$

假设(4.2.14)式成立,则有

$$\widetilde{R}\boldsymbol{I}^{-1}=cRI_{m-1}\quad I_{m-1}—m-1\text{ 阶单位阵} \qquad —(4.2.15)$$

记

$$\widetilde{R}\boldsymbol{I}^{-1}=[\widetilde{R}_{tk}]\quad t,\ k=1,\ \cdots,\ m-1$$

则

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_{tk}&=\sum_{j=1}^{m-1}R_{tj}g^{jk}=\sum_{i,\ j=1}^{m-1}(C_{ij}D_{ti}-C_{tj}D_{ii})g^{jk}\\&=-\sum_{i=1}^{m-1}\Big(\Big(-\sum_{j=1}^{m-1}C_{ij}g^{jk}\Big)D_{ti}-\Big(-\sum_{j=1}^{m-1}C_{tj}g^{jk}\Big)D_{ii}\Big)\end{aligned}$$

所以

$$\widetilde{R}_{tk}=\sum_{i=1}^{m-1}(D_{tk}D_{ii}-D_{ik}D_{ti})=\sum_{i=1}^{m-1}D_{tiik} \qquad —(4.2.16)$$

故知由(4.2.15)式

$$\widetilde{R}_{tk}=\begin{cases}0 & t\neq k\\ cR & t=k\end{cases} \qquad —(4.2.17)$$

由(4.2.6)式,得

$$\widetilde{R}_{kk} = \sum_{i=1}^{m-1} D_{ikik} = c \cdot \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-1} D_{ijij} = cR \quad k = 1, 2, \cdots, m-1 \qquad —(4.2.18)$$

由(4.2.18)式，可以看成以下 $(m-2)$ 个方程必成立

$$\begin{cases} \widetilde{R}_{11} = \widetilde{R}_{22} \\ \widetilde{R}_{22} = \widetilde{R}_{33} \\ \vdots \\ \widetilde{R}_{(m-2)(m-2)} = \widetilde{R}_{(m-1)(m-1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{m-1} D_{i1i1} = \sum_{i=1}^{m-1} D_{i2i2} \\ \sum_{i=1}^{m-1} D_{i2i2} = \sum_{i=1}^{m-1} D_{i3i3} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m-1} D_{i(m-2)i(m-2)} = \sum_{i=1}^{m-1} D_{i(m-1)i(m-1)} \end{cases} \qquad —(4.2.19)$$

现对 D_{ijij} 量的下标按 i，j 双下标的字典序编成单下标量 t_k. 即 $D_{ijij} = t_k$，(i, j) 双下标对应到 k 按下式给出.

$$\begin{aligned} &(i, j) = (1, 2) \to k = 1 \quad (i, j) = (1, 3) \to k = 2, \cdots, (i, j) = (1, m-1) \to k = m-1 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (i, j) = (2, 3) \to k = m, \cdots, (i, j) = (2, m-1) \to k = 2m-3 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (i, j) = (m-2, m-1) \to k = \frac{m(m-1)}{2} \end{aligned}$$

并注意到，当 $i = j$ 时 $D_{ijij} = 0$，$D_{ijij} = D_{jiji}$，故(4.2.19)式又可表示为

$$At = \mathbf{0} \qquad —(4.2.20)$$

其中 $\quad t = \left(t_1, t_2, \cdots, \frac{t_{m(m-1)}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(m-2) & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \cdots & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0 \\ A(m-1) & & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(m-3) & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \cdots & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0 \\ & & & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(m-4) & \cdots & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0 \\ & A(m-2) & & & & \vdots & \vdots \\ & & A(m-3) & & & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0 \\ & & & A(m-4) & \cdots & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(2) & -1 \\ & & & & & A(2) & 0 \end{array}\right]$$

且

$$A(m-1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & -1 \end{bmatrix}_{(m-1)\times(m-1)}$$

$$A(m-2)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}_{(m-2)\times(m-2)}$$

$$\vdots$$

$$A(2)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(m-2)=(\underbrace{-1,-1,\cdots,-1}_{m-2\text{个}})$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(2)=(-1,-1)$$

$\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ 是与 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(m-j)$ 同维的 0 向量.

再记 B 是以上的 A 矩阵划去 $A(m-1)$ 子矩阵后的余矩阵，则(4.2.20)式的解可写成为(设 $m \geqslant 4$)

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{m-1} \end{bmatrix}=-A^{-1}(m-1)B\begin{bmatrix} t_m \\ t_{m+1} \\ \vdots \\ t_{\frac{m(m-1)}{2}} \end{bmatrix} \qquad —(4.2.21)$$

这里因 $m \geqslant 4$，易知 $A(m-1)$ 是可逆的.

$$|A(m-1)|=(-1)^{m-2}(m-2)\neq 0 \qquad —(4.2.22)$$

$$A^{-1}(m-1)=\frac{1}{|A(m-1)|}\begin{bmatrix} 1 & m-2 & m-3 & m-4 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & m-3 & m-4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & -1 & m-4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & -2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & \cdots & -(m-3) \end{bmatrix} \qquad —(4.2.23)$$

再记

$$c(m-2)=\begin{bmatrix} m-4 & m-4 & \cdots & m-4 \\ m-4 & \ddots & & -2 \\ & & \ddots & \\ -2 & & & m-4 \end{bmatrix}_{(m-1)\times(m-2)}$$

$$c(m-3)=\begin{bmatrix} m-4 & m-4 & \cdots & m-4 \\ m-4 & \ddots & & -2 \\ & & \ddots & \\ -2 & & & m-4 \end{bmatrix}_{(m-2)\times(m-3)}$$

$$\vdots$$

$$c(2)=\begin{bmatrix} m-4 & m-4 \\ m-4 & -2 \\ -2 & m-4 \end{bmatrix}$$

注意 $c(m-j)$, $j=2, 3, \cdots, (m-2)$ 不是方阵.

以及

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}(m-3)=(\underbrace{-2, -2, \cdots, -2}_{m-3\text{个}})$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}(2)=(-2, -2)$$

则可知在 $m\geqslant 4$ 时,可得,

$$A^{-1}(m-1)B=\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} c(m-2) & \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}(m-3) & \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}(m-4) & \cdots & \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}(2) & -2 \\ & & & & \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}(2) & -2 \\ & c(m-3) & \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}(m-4) & \cdots & \vdots & \vdots \\ & & & & \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}(2) & -2 \\ & & c(m-4) & \cdots & c(2) & m-4 \\ & & & & & m-4 \end{array}\right]\Big/(m-2)$$

—(4.2.24)

于是可得

$$\sum_{i=1}^{m-1} t_i=\frac{2}{m-2}\sum_{j=m}^{\frac{m(m-1)}{2}} t_j \qquad \text{—(4.2.25)}$$

再由 t_i、t_j 的意义知

$$\sum_{i=1}^{m-1} t_i = \sum_{i=1}^{m-1}(D_{11}D_{ii} - D_{i1}D_{1i}) = \widetilde{R}_{11} = \frac{2}{m-2}\sum_{j=m}^{\frac{m(m-1)}{2}} t_j \qquad —(4.2.26)$$

因此由(4.2.19)式即知,成立

$$\widetilde{R}_{11} = \widetilde{R}_{22} = \cdots = \widetilde{R}_{(m-1)(m-1)} = \frac{2}{m-2}\sum_{j=m}^{\frac{m(m-1)}{2}} t_j \qquad —(4.2.27)$$

再由(4.2.6)式

$$R = \sum_{i=1}^{m-1}\widetilde{R}_{ii} = \frac{2(m-1)}{m-2}\sum_{j=m}^{\frac{m(m-1)}{2}} t_j \qquad —(4.2.28)$$

故由(4.2.18)式,$\widetilde{R}_{kk} = cR$ 得

$$\frac{2}{m-2}\sum_{j=m}^{\frac{m(m-1)}{2}} t_j = c\cdot\frac{2(m-1)}{m-2}\sum_{j=m}^{\frac{m(m-1)}{2}} t_j$$

即知当 Ricci 曲率 $R \neq 0$ 时,必只有

$$c = \frac{1}{m-1} \quad (m \geqslant 4) \qquad —(4.2.28a)$$

以上证明中(4.2.20～25)式推导过程涉及到诸个矩阵的形式,不难给出归纳法证明,只是这要涉及繁琐的下标运算,这里不予详述.

注意以上证明中的(4.2.24)式只能用于 $m \geqslant 4$ 的场合.对 $m = 4$,给出一个示例.

$$A(4-1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad |A(4-1)| = (-1)^{4-2}(4-2) = 2$$

$$A^{-1}(4-1) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} A(4-1) & \begin{array}{c} \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(2) \\ \\ A(2) \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^{-1}(4-1)B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因为

$$c(2)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

由(4.2.24)式，在 $m=4$ 时，应有

$$A^{-1}(4-1)B=\left[\begin{array}{c|c} & -2\\ c(2) & 0\\ & 0\end{array}\right]/(m-2)=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{2}$$

所以，(4.2.24)式的形式不能用于 $m<4$ 的场合. 故以上推论只能适用于 $m\geqslant 4$.

其次再考虑满足(4.2.14)式的 m 维 Euclid 空间 R^m 上的曲面 f 的性状. 由(4.2.0～2)式，可知有

$$-R_{ij}=-\sum_{i=1}^{m-1}D_{li}C_{ij}+\Big(\sum_{i=1}^{m-1}D_{ii}\Big)C_{ij} \qquad —(4.2.29)$$

所以，从(4.2.4)式中又可得到

$$-\widetilde{R}=[R_{ij}]=-D\cdot\mathit{II}+\mathrm{tr}D\cdot\mathit{II} \qquad —(4.2.30)$$

因此，

$$-\widetilde{R}I^{-1}=-D\cdot\mathit{II}\,I^{-1}+\mathrm{tr}D\cdot\mathit{II}\,I^{-1}$$

由于

$$D=-\mathit{II}\,I^{-1} \qquad —(2.3.1.23)$$

得

$$-\widetilde{R}I^{-1}=D^2-\mathrm{tr}D\cdot D \qquad —(4.2.31)$$

再由(4.2.15)式，得

$$\mathrm{tr}D\cdot D-D^2=cR\cdot I_{m-1} \qquad —(4.2.32)$$

对(4.2.32)式两边取行列式

$$|\,\mathrm{tr}D\cdot I_{m-1}-D\,|\cdot|\,D\,|=cR \qquad —(4.2.33)$$

即知，当 $R\neq 0$，必应有 $|D|\neq 0$. $R=0$ 显然是一个平凡的情形. 以下设 $R\neq 0$，记

$$D^2=\mathrm{tr}D\cdot D-cR\cdot I_{m-1} \qquad —(4.2.34)$$

构造幂矩阵 D^2 的特征多项式

$$|\,\widetilde{\lambda}\cdot I_{m-1}-D^2\,|=0 \qquad —(4.2.35)$$

以及

$$|\tilde{\tilde{\lambda}}\cdot I_{m-1}-(\mathrm{tr}D\cdot D-cR\cdot I_{m-1})|=0 \qquad —(4.2.36)$$

由(4.2.34)式，可知(4.2.35～36)两式应完全相等. 故二者的特征根 $\tilde{\lambda}_i=\tilde{\tilde{\lambda}}_i$ $i=1,\cdots,m-1$，并设 $\tilde{\lambda}_i$、$\tilde{\tilde{\lambda}}_i$ 是递增排序的. 再由幂矩阵的性质即知，D^2 的特征根 $\tilde{\lambda}_i=\lambda_i^2$，$\lambda_i$ 是 D 矩阵的特征根(＝主法曲率).

以下先考虑(4.2.36)式中的 $\mathrm{tr}D\neq 0$ 的情形. 则可以有

$$|\tilde{\tilde{\lambda}}\cdot I_{m-1}-(\mathrm{tr}D\cdot D-cR\cdot I_{m-1})|=(\mathrm{tr}D)^{m-1}\cdot\left|\frac{\tilde{\tilde{\lambda}}+cR}{\mathrm{tr}D}\cdot I_{m-1}-D\right|$$

$$=0$$

则显然应有

$$\lambda_i=\frac{\tilde{\tilde{\lambda}}_i+cR}{\mathrm{tr}D}\quad i=1,\cdots,m-1 \qquad —(4.2.37)$$

以及由关系 $\tilde{\tilde{\lambda}}_i=\tilde{\lambda}_i=\lambda_i$，便知有

$$\lambda_i^2-\mathrm{tr}D\cdot\lambda_i+cR=0 \qquad —(4.2.38)$$

所以，

$$\lambda_i=\frac{\mathrm{tr}D\pm\sqrt{(\mathrm{tr}D)^2-4cR}}{2}\quad i=1,\cdots,m-1 \qquad —(4.2.39)$$

由(2.4.3.5)式，即知，在 R^m 空间的曲面上，其 D 矩阵的特征根应全为实数. 所以，如果限制在实数域讨论，总应有

$$(\mathrm{tr}D)^2-4cR\geqslant 0\quad(\mathrm{tr}D\neq 0) \qquad —(4.2.40)$$

由特征根与矩阵的关系又可知，总还要成立

$$\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i=\mathrm{tr}D \qquad —(4.2.41)$$

由以上诸关系，考虑(4.2.39)式中的符号取法的可能性.

(1) 若 $(\mathrm{tr}D)^2-4cR=0$，则由(4.2.39)式，即知

$$\lambda_i=\frac{\mathrm{tr}D}{2}\quad i=1,2,\cdots,m-1$$

但这又导致

$$\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i = \frac{m-1}{2}\cdot \mathrm{tr}D \neq \mathrm{tr}D \quad (\text{当 } m \geqslant 4,\ \mathrm{tr}D \neq 0 \text{ 时})$$

所以，可知当 $m \geqslant 4$、$\mathrm{tr}D \neq 0$ 时，只能有 $(\mathrm{tr}D)^2 > 4cR > 0$ [1].

(2) 下设 $(\mathrm{tr}D)^2 - 4cR > 0$. 由(4.2.39)式，$\lambda_i$ 的取法只能有以下 3 种情形.

(2.1) $\lambda_i = \lambda \quad i = 1, 2, \cdots, m-1$ —(4.2.42)

$$\lambda = \frac{\mathrm{tr}D + \sqrt{(\mathrm{tr}D)^2 - 4cR}}{2}\left(\text{或者 } \lambda = \frac{\mathrm{tr}D - \sqrt{(\mathrm{tr}D)^2 - 4cR}}{2}\right)$$

即 λ_i 特征值全都相等. 但因(4.2.12)式及(4.2.41)式，可知在 $m \geqslant 4$ 时上式右边分子的$\sqrt{\cdot}$号前应取负号，即有

$$\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i = \frac{m-1}{2}(\mathrm{tr}D - \sqrt{(\mathrm{tr}D)^2 - 4cR}) = \mathrm{tr}D$$

可知应成立

$$R = \frac{m-2}{m-1}(\mathrm{tr}D)^2 \qquad —(4.2.43)$$

(4.2.43)式等价于

$$\frac{m-2}{m-1}\Big(\sum_{i=1}^{m-1}D_{ii}\Big)^2 = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}D_{ijij} \qquad —(4.2.44)$$

由于当 D 矩阵的特征值全部相等时，D 矩阵必是对角矩阵，且其主对角元素是

$$D_{ii} = \frac{\mathrm{tr}D}{m-1} = \pm\left(\frac{R}{(m-2)(m-1)}\right)^{1/2} \quad i = 1, \cdots, m-1 \qquad —(4.2.45)$$

这样，由 $D = -\mathrm{I\!I}\,I^{-1}$，即知，此时有

$$\mathrm{I\!I} = \pm\left(\frac{R}{(m-2)(m-1)}\right)^{1/2} I$$

再由定理 2.4.2.1 即知这时 Einstein 空间应是 R^m 上的超球面. 容易验证，R^m 空间上的超球面的 D 矩阵满足(4.2.44)式.

(2.2) 存在 $1 \leqslant k < m-1$，使

$$\lambda_i = \frac{\mathrm{tr}D - \sqrt{(\mathrm{tr}D)^2 - 4cR}}{2} \quad i = 1, \cdots, k$$

---

[1] $\mathrm{tr}D = 0$ 的情形见以下的论述.

$$\lambda_j=\frac{\mathrm{tr}D+\sqrt{(\mathrm{tr}D)^2-4cR}}{2}\quad j=k+1,\cdots,m-1$$

先设 $1\leqslant k\leqslant\frac{m-1}{2}$，则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i&=(\lambda_1+\lambda_{k+1})+\cdots+(\lambda_k+\lambda_{2k})+\lambda_{2k+1}+\cdots+\lambda_{m-1}\\&=k\cdot\mathrm{tr}D+\left(\frac{(m-1)-2k}{2}\right)(\mathrm{tr}D+\sqrt{(\mathrm{tr}D)^2-4cR})\\&=\mathrm{tr}D\end{aligned}$$

由此可得应有

$$(m-3)\mathrm{tr}D=-(m-1-2k)\sqrt{(\mathrm{tr}D)^2-4cR}$$

故应设 $k<\frac{m-1}{2}$，而将 $k=\frac{m-1}{2}\Rightarrow\mathrm{tr}D=0$ 归入下文关于 $\mathrm{tr}D=0$ 的讨论.

从而可有 $\mathrm{tr}D<0$ 且

$$R=\frac{(m-1)(m-2-k)(k-1)}{(m-1-2k)^2}(\mathrm{tr}D)^2\geqslant0\qquad—(4.2.45\mathrm{a})$$

当 $k=1$ 时上式要导出 $R=0$，并注意到 $\sqrt{(\mathrm{tr}D)^2}=|\mathrm{tr}D|$，此即表示 D 矩阵的特征值是

$$\lambda_1=\mathrm{tr}D\quad\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_{m-1}=0\qquad—(4.2.46)$$

从而

$$\mathrm{rank}D=1$$

但 $D=-\mathit{II}\,I^{-1}$ 且 I^{-1} 可逆，故

$$\mathrm{rank}D=\mathrm{rank}\mathit{II}\qquad—(4.2.47)$$

所以，此时必有

$$\mathrm{rank}\mathit{II}=1$$

很容易构造出这一情形下的 Einstein 空间曲面. 由于这种情形下的 Einstein 空间曲面就是 R^m 空间上真空 Einstein 方程的解空间(之一)，故具体论述放在下一节给出，这里直接给出一个示例.

例 4.2.1 在 R^{m+1} 空间上($m\geqslant3$)，以下 Monge 形式的曲面函数

$$z=f(x_1)+\sum_{j=2}^{m}a_jx_j\quad f''>0\qquad—(4.2.48)$$

就是一个 Einstein 空间曲面.

利用(2.4.5.20～24)式，马上可得

$$\Gamma_1 = f'' \cdot f' \quad \Gamma_k = 0 \quad k = 2, 3, \cdots, m$$

$$|\boldsymbol{I}| = 1 + f'^2 + \sum_{j=2}^{m} a_j^2$$

$$D = -W = -\frac{1}{|\boldsymbol{I}|^{3/2}} \begin{bmatrix} f''|\boldsymbol{I}| - f''f'^2, & -a_2 f''f', & \cdots, & -a_m f''f' \\ & \boldsymbol{0} & & \end{bmatrix}$$

由(4.2.12)式知 $R = 0$，由(4.2.16)式知 $\widetilde{R}\boldsymbol{I}^{-1} = [\widetilde{R}_{\iota\kappa}] = [0]$. 所以，$\widetilde{R} = [0]$，即(4.2.14)式成立. 从而这一曲面就是 R^m 上的一个 Einstein 空间.

附带指出，这里的 $f'' > 0$ 条件改为 $f'' \neq 0$，(4.2.48)式给出的曲面仍然是 Einstein 空间曲面.

当 $\frac{m-1}{2} > k > 1$，理论上可以通过解(4.2.1)式、(4.2.45a)式得到对应的曲面函数. 但具体求解仍然是困难的.

容易理解，$\frac{m-1}{2} < k < m-1$ 的情形与以上分析类似. 仍旧要成立(4.2.45a)式，只不过现在应有 $\mathrm{tr}D > 0$.

实际上，当改变曲面定向，则 $1 \leqslant k < \frac{m-1}{2}$ 就转化成为 $\frac{m-1}{2} < k < m-1$.

最后考虑 $\mathrm{tr}D = 0$ 的情形. 则由(4.2.35～36)式即知应有 D 矩阵的特征根

$$\lambda_i = \pm\sqrt{cR} \quad i = 1, \cdots, m-1 \qquad —(4.2.49)$$

再由

$$\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i = \mathrm{tr}D = 0$$

即知这只能在 $m \geqslant 4$，且 m 为奇数，并有

$$\begin{cases} \lambda_i = -\sqrt{cR} & i = 1, \cdots, \dfrac{m-1}{2} \\ \lambda_j = \sqrt{cR} & j = \dfrac{m-1}{2} + 1, \cdots, m-1 \end{cases} \qquad —(4.2.50)$$

时才能实现.

当 $m = 3$ 时，由(4.2.39)式，Einstein 空间曲面的主法曲率 κ_i(κ_i 等于 D 矩阵特征值取负号 $-\lambda_i$)，还可以有

$$\kappa_1 = \frac{-\mathrm{tr}D - \sqrt{(\mathrm{tr}D)^2 - 4cR}}{2} \quad \kappa_2 = \frac{-\mathrm{tr}D + \sqrt{(\mathrm{tr}D)^2 - 4cR}}{2}$$

的情形. 取 $c = 1/2$, 可验证以上两式是相容的. 由此可见 $m = 3$ 时的特殊性.

以下导出在 $\boldsymbol{I} = v(\boldsymbol{u}) I_{m-1}$ 的等温参数形式下, Einstein 空间要求的因子 $v(\boldsymbol{u})$ 的充要条件. 所用的方法类似于 §4.1.1 节. 所以不再写出详细的过程而直接给出一些结果.

为方便起见, 考虑 m 维曲面满足(4.2.14)式要求的条件. 注意, 这时(4.2.14)式应为

$$\widetilde{R} = \frac{R}{m} \cdot I$$

即其中的参数 $c = m$.

由(4.2.4)式, $v(\boldsymbol{u})$ 因子应满足

$$R_{jj} = \frac{R}{m} v \qquad j = 1, 2, \cdots, m$$

再由(4.2.6)式

$$R = \sum_{i=1}^{m} R_{ii} \cdot v^{-1}$$

所以, 应有

$$R_{jj} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} R_{ii} \qquad —(4.2.51)$$

(4.2.51)式就是 Einstein 空间曲面的等温参数 $v(\boldsymbol{u})$ 的必要条件.

由(4.2.2a)式

$$-R_{jj} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^{i}}{\partial u_j} - \frac{\partial \Gamma_{jj}^{i}}{\partial u_i} \right) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{m} (\Gamma_{ij}^{h} \Gamma_{jh}^{i} - \Gamma_{jj}^{h} \Gamma_{ih}^{i})$$

由(4.1.1.4)式, 易得

$$\sum_{h=1}^{m} (\Gamma_{ij}^{h} \Gamma_{jh}^{i} - \Gamma_{jj}^{h} \Gamma_{ih}^{i}) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{h=1 \\ h \neq i, j}}^{m} \left(\dfrac{\partial v}{\partial u_h} \right)^2 \cdot \dfrac{v^{-2}}{4} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

所以

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{m} (\Gamma_{ij}^{h} \Gamma_{jh}^{i} - \Gamma_{jj}^{h} \Gamma_{ih}^{i}) = \frac{m-2}{2} \left(\sum_{h=1}^{m} \left(\frac{\partial v}{\partial u_h} \right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial u_j} \right)^2 \right) \frac{v^{-2}}{2}$$

另有

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^{i}}{\partial u_j} - \frac{\partial \Gamma_{jj}^{i}}{\partial u_i} = \begin{cases} -\dfrac{v^{-2}}{2} \left(\left(\dfrac{\partial v}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial u_j} \right)^2 \right) + \dfrac{v^{-1}}{2} \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial u_i^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial u_j^2} \right) & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

所以

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\Gamma_{ij}^{i}}{\partial u_j}-\frac{\partial\Gamma_{jj}^{i}}{\partial u_i}\right)=-\frac{v^{-2}}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial u_i}\right)^2-\frac{v^{-2}}{2}(m-2)\left(\frac{\partial v}{\partial u_j}\right)^2+$$

$$+\frac{v^{-1}}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 v}{\partial u_i^2}+\frac{v^{-2}}{2}(m-2)\frac{\partial^2 v}{\partial u_j^2}$$

即得

$$-R_{jj}=\left(\frac{m-4}{2}\sum_{h=1}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial u_h}\right)^2-\frac{3(m-2)}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial u_j}\right)^2\right)\frac{v^{-2}}{2}+\left(\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial^2 v}{\partial u_h^2}+(m-2)\frac{\partial^2 v}{\partial u_j^2}\right)\frac{v^{-1}}{2}$$

—(4.2.52)

$$-\sum_{i=1}^{m}R_{ii}=\frac{m(m-4)-3(m-2)}{2}\sum_{h=1}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial u_h}\right)^2\cdot\frac{v^{-2}}{2}+(2m-2)\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial^2 v}{\partial u_h^2}\cdot\frac{v^{-1}}{2}$$

—(4.2.53)

将(4.2.52～53)式代入(4.2.51)式,经整理并化简,可得

$$2\left[m\frac{\partial^2 v}{\partial u_j^2}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 v}{\partial u_i^2}\right]v=3\left[m\left(\frac{\partial v}{\partial u_j}\right)^2-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial u_i}\right)^2\right]\quad j=1,2,\cdots,m$$

—(4.2.54)

(4.2.54)式所表示的方程组,就是等温参数形式的 Einstein 空间曲面的必要条件.

将(4.2.54)式表成以下形式,

$$2\frac{\partial^2 v}{\partial u_j^2}v-3\left(\frac{\partial v}{\partial u_j}\right)^2=f(\boldsymbol{u})\quad j=1,2,\cdots,m \qquad —(4.2.55)$$

$$2\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 v}{\partial u_i^2}v-3\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial u_i}\right)^2=mf(\boldsymbol{u}) \qquad —(4.2.56)$$

其中从(4.2.55)式有解的角度讲,$f(\boldsymbol{u})$是使(4.2.55)式可积的任意的连续函数,$\boldsymbol{u}\in R^m$.

(4.2.56)式是(4.2.55)式的加总,这二式也只是必要条件(见下文的说明).

比较(4.2.55)式与(4.1.1.10)式,可知若 $v(\boldsymbol{u})$满足(4.2.55)式且 $f(\boldsymbol{u})$满足

$$\sum_{h=1}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial u_h}\right)^2+4\kappa v^3+2f(\boldsymbol{u})=0 \qquad —(4.2.57)$$

则 $v(\boldsymbol{u})$因子决定的 Einstein 空间曲面同时也就是截面曲率为常数的常曲率空间.(4.2.55～57)式可以构成常曲率的 Einstein 空间曲面的充要条件.

例如,取 $v=v(t)\quad t=u_1+u_2+\cdots+u_m$,并简单地取 $f(\boldsymbol{u})=0$ 则从

(4.2.55)式中得到

$$2vv'' = 3v'^2$$

有

$$2\frac{\mathrm{d}v'}{v'} = 3\frac{\mathrm{d}v}{v}$$

得

$$v'^2 = b^2v^3 \Rightarrow v' = \pm bv^{\frac{3}{2}}$$

将 b 看成是可选取符号的积分常数,从而由

$$v' = bv^{\frac{3}{2}}$$

可得

$$v = \frac{1}{\left(a+\frac{b}{2}t\right)^2} \quad t = \sum_i^m u_i \tag{4.2.58}$$

其中 a 也为积分常数.

当取 $a=0$, $b=2$, 即得 $v=t^{-2}$. 可知 v 同时即是满足(4.2.57)式$\left(\text{取 } k=-\frac{1}{m}\right)$的等温因子.

由(4.2.58)式,一般地有

$$\frac{\partial v}{\partial u_j} = -\frac{b}{\left(a+\frac{b}{2}t\right)^3}$$

将其代入(4.2.57)式,应可有

$$mb^2 + 4\kappa = 0$$

即

$$\kappa = -\frac{b^2}{4m}$$

所以,这个曲面具有负曲率 $-\frac{b^2}{4m}$,且易验证这个曲面也是常曲率曲面.

附带地,可知 m 维(等温参数形式的)常曲率曲面空间一定是 Einstein 空间. 因为在常曲率曲面上的

$$R_{jj} = -\sum_{i=1}^m R_{ijji}g^{ii} \quad \text{其余} \quad R_{ij} = 0 \quad t \neq j$$

因为

$$R_{ijji} = \begin{cases} -\kappa v^2 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

且 $g^{ii} = v^{-1}$，故

$$R_{jj} = (m-1)\kappa v(\boldsymbol{u}) \qquad —(4.2.59)$$

所以(4.2.51)式总是成立的.

现在说明为什么(4.2.54～56)式都只是必要条件. 这是因为在推导(4.2.54)式时隐含地已设定了 Ricci 曲率张量 $R_{ij} \equiv 0 \quad i \neq j$ 的条件在内. 因而，满足(4.2.54～56)式的等温参数因子 $v(\boldsymbol{u})$不一定满足这一隐含条件.

例如取 $f(\boldsymbol{u}) = -1$, $v(0) = 0 \quad v'(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$，从(4.2.55)式中可知，其解为

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} t \quad t = u_1 + \cdots + u_m \quad (t \neq 0)$$

但这个 $v(t)$函数代入(4.2.57)式，即得到应有

$$\frac{m}{3} + 4\kappa \cdot 3^{-\frac{3}{2}} t^3 - 2 = 0$$

故 κ 不可能取成常数. 所以，由这一等温参数因子决定的曲面不可能成为 Einstein 空间.

事实上，在这一曲面空间上，由基本 R_{itjk} 符号(见下文说明)组成的矩阵不是对角矩阵，故 Ricci 张量矩阵 $\widetilde{R}$ 也不可能是对角矩阵，所以，(4.2.14)式不成立.

不妨以 R_{1213} 符号作一个验证. 易知对这一等温参数 $v(t)$有

$$\Gamma^i_{ij} = \Gamma^j_{ij} = \Gamma^i_{ii} = \frac{t^{-1}}{2} \quad \Gamma^k_{ii} = -\frac{t^{-1}}{2} \quad (k \neq i) \text{ 其余 } \Gamma^k_{ij} = 0$$

$$R_{1213} = R^3_{121} \cdot v$$

$$R^3_{121} = \frac{\partial \Gamma^3_{11}}{\partial \boldsymbol{u}_2} - \frac{\partial \Gamma^3_{21}}{\partial \boldsymbol{u}_1} + \sum_{h=1}^{m} (\Gamma^h_{11}\Gamma^3_{2h} - \Gamma^h_{21}\Gamma^3_{1h})$$

$$= \frac{\partial \Gamma^3_{11}}{\partial \boldsymbol{u}_2} + \Gamma^2_{11}\Gamma^3_{22} + \Gamma^3_{11}\Gamma^3_{23} - \Gamma^1_{21}\Gamma^3_{11}$$

$$= \frac{3}{4} t^{-2}$$

即知 $\quad R_{1213} = \frac{\sqrt{3}}{4} t^{-1} \neq 0$

即不满足以上所说的隐含条件. 但这个等温参数因子决定的抽象曲面具有

Ricci 曲率张量 R_{ij} 全部相等的特别属性.

§4.3 真空 Einstein 方程的解——几何构造

§4.3.1 真空 Einstein 方程几何解的类型及 R^m 空间上的秩 1 解、C^m 空间上的幂零解

真空 Einstein 方程即 Ricci 曲率张量

$$R_{ij}=0 \quad t,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1 \qquad —(4.3.1.1)$$

或等价地写成矩阵形式

$$\widetilde{R}=[R_{ij}]=[0] \qquad —(4.3.1.2)$$

(4.3.1.2)式的解,如果能构造出 R^m 空间上的一个曲面 f,且这个曲面 f 的第二基本二次型矩阵

$$\mathbb{I}\neq[0]$$

并使(4.3.1.2)式成立,这一曲面 f 的第一基本二次型矩阵$\boldsymbol{I}$即为(4.3.1.2)式的一个非平凡解.

因此,若(4.3.1.2)式的解,能够对应到 R^m 空间(或复 Euclid 空间 C^m)上的一个"曲面"f,就称这一解是**几何解**[1],否则,就称为**解析解**.

这里主要分析几何解,对于解析解,只给予一个示例性的说明.

在几何解的情形,直接利用(4.2.31)式,马上就有

$$\widetilde{R}=[0]\Leftrightarrow D^2=\mathrm{tr}D\cdot D \qquad —(4.3.1.3)$$

(4.3.1.3)式是(4.3.1.1)式的几何解的基本方程.先考虑 $\mathrm{tr}D\neq 0$ 的情形.由(4.3.1.3)式可知,真空 Einstein 方程几何解的矩阵 D(D 等价于 Weingraten 映射矩阵)必具有以下性质:

性质 1:$D=[0]$ 是(4.3.1.3)式的解.

这时无疑是平凡解.故以下总设 $D\neq[0]$.

性质 2:$|D|=0$,即 $\mathrm{rank}D<m-1 \quad (m\geqslant 3)$

用反证法可以证明这一点.设 $|D|\neq 0$.故 D^{-1}存在,用 D^{-1}右乘(4.3.1.3)式左、右两边,得

---

[1] 几何解也可以理解为利用了$\mathbb{I}$矩阵的解.

$$\mathrm{tr}D \cdot I_{m-1} = D \qquad \text{—(4.3.1.4)}$$

从而应有

$$\begin{cases} D_{ii} = \sum_{j=1}^{m-1} D_{jj} & i = 1, \cdots, m-1 \\ D_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

但由此可得，应成立

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ \vdots \\ D_{(m-1)(m-1)} \end{bmatrix} = 0$$

容易验证以上齐次方程组的系数矩阵行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{m-2}(m-2)$$

故当 $m \geqslant 3$ 时，以上方程上有唯一解 $D_{ii} = 0 \quad i = 1, \cdots, m-1$. 但这即与 $|D| \neq 0$ 矛盾.

这里附带证明了从

$$\mathrm{tr}D \cdot I_{m-1} = D \Rightarrow D = [0]$$

所以，从(4.2.30)式中

$$-\widetilde{R} = (\mathrm{tr}D \cdot I_{m-1} - D) \cdot \mathit{II} = [0]$$

直接利用 $\mathrm{tr}D \cdot I_{m-1} = D$ 的关系只能得到平凡解. 故不用考虑这一关系.

由于 D 矩阵行列式为 0，即知作为(4.3.1.1)式的几何解的曲面的 Gauss 曲率必为 0.

性质 3：设 $D \in C^{(m-1)\times(m-1)}$，$\mathrm{tr}D \neq 0$，则

$$\mathrm{rank}D = 1$$

注意 D 是复数域上的矩阵，则(4.3.1.1)式几何解的曲面的 D 矩阵的秩只能为 1(当 $\mathrm{tr}D \neq 0$).

证明：由

$$\mathrm{tr}D \cdot D = D^2$$

构造以下特征行列式

$$| \tilde{\lambda} \cdot I_{m-1} - \mathrm{tr}D \cdot D | = 0 \qquad —(4.3.1.5)$$

$$| \tilde{\lambda} \cdot I_{m-1} - D^2 | = 0 \qquad —(4.3.1.6)$$

显然这两个 $\tilde{\lambda}$ 多项式应完全相同. 由(4.3.1.6)式知

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i^2 \quad i = 1, \cdots, m-1$$

这里 λ_i 是 D 矩阵的特征值. 且由假设 $\mathrm{tr}D \neq 0$, 从(4.3.1.5)式又可得到

$$(\mathrm{tr}D)^{m-1} \cdot \left| \frac{\tilde{\lambda}}{\mathrm{tr}D} \cdot I_{m-1} - D \right| = 0$$

故

$$\lambda_i = \frac{\tilde{\lambda}_i}{\mathrm{tr}D} \quad i = 1, \cdots, m-1$$

所以,必要有 $\lambda_i^2 = \mathrm{tr}D \cdot \lambda_i$, 即

$$\lambda_i(\mathrm{tr}D - \lambda_i) = 0 \quad i = 1, \cdots, m-1 \qquad —(4.3.1.7)$$

当 $\lambda_i = 0$ 时,(4.3.1.7) 式显然成立. 当对某个下标 k, $i = k$,若 $\lambda_k \neq 0$, 则(4.3.1.7)式表示,这必又有

$$\lambda_k = \mathrm{tr}D$$

因此,这样的下标 k 最多只能有 1 个,否则,

$$\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i = \mathrm{tr}D$$

将不能成立. 故 D 的特征值只能是 $\lambda_k = \mathrm{tr}D$, $\lambda_i = 0 \quad i \neq k$, $i = 1, \cdots, m-1$.

且现已设 $\mathrm{tr}D \neq 0$, 故 λ_i 不能全部为 0,即知以上结论.

由于

$$\mathrm{rank}D = \mathrm{rank}\,\mathit{II} \qquad —(4.2.47)$$

所以即知,(4.3.1.1)式的几何解在 $\mathrm{tr}D \neq 0$ 时有

$$\mathrm{rank}\,\mathit{II} = 1 \qquad —(4.3.1.8)$$

的曲面. 称这一类型的曲面解是**秩 1 解**.

上一节已说明了满足(4.3.1.8)式的曲面同时也就是一个 Einstein 空间. 例 4.2.1 已给出一个示例.

在 $m = 3$ 的场合,可以利用 Monge 形式的曲面函数,利用(4.3.1.8)式给出的微分方程的解,并得到其他类型的解.

设

$$z = F(x, y)$$

是曲面函数. $F(t)$是二阶可微,且 F'、$F'' \neq 0$ 的函数. 记

$$t = u(x)v(y)$$

$$z = F(t)$$

由

$$\mathit{II} = \frac{1}{(1+\nabla F^{\mathrm{T}}\nabla F)^{1/2}}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{bmatrix} \qquad \nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}$$

所以

$$\mathrm{rank}\,\mathit{II} = 1 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)^2 \qquad —(4.3.1.9)$$

由此可得到(4.3.1.9)式成立的一个充分条件是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 u^2 v + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 uv^2 = 2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 uv \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} uv = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \end{cases} \qquad —(4.3.1.10)$$

将(4.3.1.10)式第二式代入第一式并整理,又可得到(4.3.1.10)式成立的一个充分条件是

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \\ v\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \end{cases} \qquad —(4.3.1.11)$$

由于 $u(x)$、$v(y)$都是单变量函数,故将(4.3.1.11)式视作常微分方程求解,最终便得到

$$z = f(c_1 x + c_2 y) \quad (其中\ f',\ f'' \neq 0)$$

这样的拟线性方程.

以上解推广到 m 维空间,即

$$z = f\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right) = f(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}) \qquad —(4.3.1.12)$$

是 R^m 空间上真空 Einstein 方程的秩 1 解的一个类型. 这一类型的曲面的第一,

二基本二次型矩阵是

$$\boldsymbol{I} = I_m + f'^2 \boldsymbol{aa}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{II} = \frac{-f'' \cdot \boldsymbol{aa}^{\mathrm{T}}}{(1+f'^2 \cdot \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})^{1/2}} \qquad \text{—(4.3.1.13)}$$

显然 $$\mathrm{rank}\boldsymbol{II} = \mathrm{rank}(\boldsymbol{aa}^{\mathrm{T}}) = 1$$

如果将(4.3.1.12)式看成是(设 $a_m \neq 0$)

$$x_m = \frac{1}{a_m} f^{-1}(z) - \sum_{i=1}^{m-1} \tilde{a}_i x_i \quad \tilde{a}_i = \frac{a_i}{a_m} \qquad \text{—(4.3.1.14)}$$

那么,它就是例 4.2.1 中所给出的曲面类型.

可以对(4.3.1.13)给出的$\boldsymbol{I}$矩阵的元素 g_{ij} 直接由 Christoffel 符号、Riemann 符号的演算(即不经由$\boldsymbol{II}$、D 矩阵)的方法来验证 Ricci 曲率张量 $R_{ij} = 0$.

由 $g_{ij} \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{r}}_i^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_j$ 的对应性以及(2.4.3.10)式,知

$$\boldsymbol{\Gamma}^{ij} = \boldsymbol{a} \cdot 2f'f'' a_i a_j$$

再由(2.4.5.21)式

$$|\boldsymbol{I}| = 1 + f'^2 \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}$$

由(2.4.5.22)式、(4.3.1.13)式可知

$$\boldsymbol{I}^{-1} = \frac{|\boldsymbol{I}| \cdot I_m - f'^2 \boldsymbol{aa}^{\mathrm{T}}}{|\boldsymbol{I}|}$$

由(2.4.3.11)式 Christoffel 符号向量

$$\boldsymbol{\Gamma}_{ij} = \boldsymbol{I}^{-1} \boldsymbol{\Gamma}^{ij} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot a_i a_j f' f''}{|\boldsymbol{I}|}$$

所以

$$\Gamma_{ij}^k = a_k a_i a_j \frac{f'f''}{|\boldsymbol{I}|}$$

由(2.4.3.16)式,将 u_t, u_i 变元对应为 x_t、x_i,再由上式,

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x_t} = a_k a_i a_j a_t \frac{f''^2 + f'f'''}{|\boldsymbol{I}|} - a_k a_i a_j a_t \frac{2(f'f'')^2 \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{I}|^2}$$

并易知 $\dfrac{\partial \Gamma_{tj}^k}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x_t}$

再由

$$\Gamma_{ij}^h \Gamma_{th}^k - \Gamma_{tj}^h \Gamma_{ih}^k = (a_h a_i a_j a_k a_t a_h - a_h a_t a_j a_k a_i a_h) f'f''/|\boldsymbol{I}| = 0$$

由(2.4.3.16)式即知 $R_{itj}^k = 0 \quad \forall\ i,\ t,\ j,\ k \Rightarrow R_{tj} = 0 \quad \forall\ t,\ j.$

很显然，在(4.3.1.12)式给出的曲面上，当 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ 时，就给出了一个常曲率的截面曲面. 在 f 映射是 1-1 单射时，这个截面曲面就是 $z=f(c)$ 的交曲面.

由于 $\operatorname{rank}\mathbb{I}=1$，故曲面有一个主法曲率不恒为 0. 所以，(4.3.1.12)式给出的曲面不是超平面. 但由 Riemann 符号 R_{itjk} 是 $\mathbb{I}$ 矩阵的一个二阶子式的意义知，(4.3.1.12)式给出的曲面上，总有

$$R_{itjk}=0 \quad i,\ t,\ j,\ k=1,\ \cdots,\ m-1 \qquad —(4.3.1.15)$$

(4.3.1.15)式是 D-秩 1 解的基本性质. 由(4.2.1～2)式即知，在 D-秩 1 解的曲面上，总成立

$$R_{itj}^{k}=0 \quad i,\ t,\ j,\ k=1,\ \cdots,\ m-1 \qquad —(4.3.1.16)$$

由(2.4.3.22)式、(4.3.1.15)式即知此结果. 但例 4.2.1 已说明具有这一性质的曲面并不是平面.

但这一曲面上总成立

$$R_{tj}=0 \quad t,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$$

所以，(4.3.1.12)式给出的曲面确是真空 Einstein 方程的解的类型之一.

以上的讨论是在 $\operatorname{tr}D\neq 0$ 的前提下给出的，以下再考虑 $\operatorname{tr}D=0$ 时情形. 仍由(4.3.1.3)式，在不考虑 $D=[0]\Leftrightarrow \mathbb{I}=[0]$ 的平凡解时，那么，对应于这一条件($\operatorname{tr}D=0$)的非平凡解，就是

$$D^{2}=[0] \quad (\operatorname{tr}D=0) \qquad —(4.3.1.17)$$

即曲面的 Weingarten 映射矩阵必为**平方幂零矩阵**. 称由(4.3.1.17)式给出的真空 Einstein 方程的解为**幂零解**.

一般地，A 是方阵，使 $A^{k}=[0]$ 的最小正整数 k 称为矩阵 A 的幂零指数，并称 A 是 k 次幂零矩阵. 以下几个引理给出了幂零矩阵的一些性质.

引理 4.3.1.1 方阵 A 是 k 次幂零矩阵，当且仅当 A 的所有特征值为 0. ■

因此如果一曲面 f 的 W 映射矩阵是幂零矩阵，则 f 必是极小曲面、常曲率曲面.

引理 4.3.1.2 非零的幂零矩阵不能用相似变换化为对角矩阵. ■

引理 4.3.1.3 上(下)三角矩阵是幂零矩阵，当且仅当所有主对角线元素等于 0，并且三角矩阵的幂零指数不超过矩阵的阶数. ■

称分块方阵 $A=[A_{ij}]$ 为分块三角矩阵，如果 A 的所有主对角线小块 A_{ii} 是方阵，而位于主对角某一侧的所有小块均为[0].

引理 4.3.1.4 分块三角矩阵是幂零矩阵，当且仅当它的所有主对角线小块都是幂零矩阵. ■

由引理 4.3.1.4 可推知，分块对角矩阵是幂零矩阵，当且仅当它的主对角线小块都是幂零矩阵. 由这个性质可以利用小块幂零矩阵构造出高阶的幂零矩阵.

引理 4.3.1.5 A 是 n 阶平方幂零矩阵，$A^2=[0]$，则 $\mathrm{rank}A\leqslant\frac{n}{2}$ [1]. ■

引理 4.3.1.5 的结论可由著名的 Sylvester 不等式直接得到. 记 A、B 是 n 阶方阵，r_A、r_B 是它们的秩. Sylvester 不等式

$$r_A+r_B-n\leqslant r_{AB}\leqslant\min(r_A,\ r_B)\qquad —(4.3.1.18)$$

现令 $B=A$，$AB=A^2=[0]\Rightarrow r_{AB}=0$. 由(4.3.1.18)式的左端不等式即得 $2r_A\leqslant n$，此即以上结论.

此外，还可以得到若 A 是平方幂零方阵，则用 -1 分别乘以 A 的第 i 行和第 i 列元素后，A 矩阵仍是平方幂零矩阵.

要将以上关于幂零矩阵的性质的分析应用于曲面 f 的 D 矩阵并以此构造出真空 Einstein 方程的解，还必须先要拓展曲面 f 的类型以及第一基本二次型矩阵的类型. 这是因为如果把具有幂零性质的矩阵 D 看成是某个曲面 f 决定的 Weingarten 映射矩阵(取负号)，那么，就必先要将曲面 f 拓展到复 Euclid C^m 空间上去，并放松曲面函数的一些限制条件. 这一点，可由 $\mathrm{tr}D=0$ 时，从(4.2.30)式推知.

由(4.2.30)式，当 $\widetilde{R}=[R_{ij}]=[0]$ 且 $\mathrm{tr}D=0$，则又要有

$$-D\cdot\boldsymbol{I\!I}=[0]\Leftrightarrow\boldsymbol{I\!I}\,\boldsymbol{I}^{-1}\boldsymbol{I\!I}=[0]\qquad —(4.3.1.19)$$

由于$\boldsymbol{I}^{-1}$一定是满秩矩阵，(4.3.1.19)式成立的必要条件是 $|\boldsymbol{I\!I}|=0$.

记$\boldsymbol{I\!I}=[\boldsymbol{c}_1,\ \boldsymbol{c}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{c}_{m-1}]$ $\boldsymbol{c}_i$ 是$\boldsymbol{I\!I}$的第 i 列向量，则由(4.3.1.19)式，又应有

$$\boldsymbol{I\!I}\,\boldsymbol{I}^{-1}\boldsymbol{I\!I}=[\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{c}_j]=[0]\Leftrightarrow\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}^{-1}\boldsymbol{c}_j=0\quad i,\ j=1,\ \cdots,\ m-1\qquad —(4.3.1.20)$$

由此可知，$\boldsymbol{I}^{-1}$矩阵必定要有正、负数特征值，所以$\boldsymbol{I}$矩阵不能局限于正定矩阵.

为此，仍先考虑由 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ $\boldsymbol{u}\in D\subset R^{m-1}$ $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})\in R^m$ 形式给出的一个正则参数曲面函数，称

$$g=\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{u}}E\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{u}}\mathrm{d}\boldsymbol{u}\quad E\in R^{m\times m}\qquad —(4.3.1.21)$$

是广义的第一基本微分形式(或称其为**度规**). 其中 E 是对角矩阵，且其主对角线元素可为±1.

规定

---

[1] 引理 4.3.1.1～5 引自《线性代数习题集》，见前注，第 947、956、1123、1124、940 题及相关证明提示.

$$I = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} E \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = [g_{ij}] \qquad —(4.3.1.22)$$

则形式上仍有

$$g = \mathrm{d}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I}\, \mathrm{d}\boldsymbol{u} \qquad —(4.3.1.23)$$

显然，若在(4.3.1.22～23)式中取 E 的主对角元素均为 1，$E = I_m$，则(4.3.1.21)式就是经典的第一基本微分形式，$\boldsymbol{I}$ 矩阵就是经典的第一基本二次型矩阵.

易知，当取 $E = I_m$，$\boldsymbol{I}$ 矩阵是正定的，当取 $E = -I_m$，则 $\boldsymbol{I}$ 矩阵是负定的，当取 E 的主对角线元素中部分为 -1，其余为 1，则 $\boldsymbol{I}$ 矩阵就可以成为不定矩阵.

但由于随 E 矩阵的取法，有可能造成(4.3.1.22)式规定的 $\boldsymbol{I}$ 矩阵成为不可逆矩阵. 因此，先要对这一问题给予一个说明.

一般地，设 $A \in R^{n\times(n-1)}$，$\mathrm{rank}A = n-1$，即 A 是列满秩矩阵，E 是 n 阶矩阵其意义同上，则由矩阵乘积的秩的公式(见本书(3.3.2.31)式)

$$\mathrm{rank}A^{\mathrm{T}}EA = \mathrm{rank}EA - \dim(R(EA) \cap N(A^{\mathrm{T}})) \quad —(4.3.1.24)$$

易知 $\mathrm{rank}EA = n-1$ 而 $A^{\mathrm{T}}EA \in R^{(n-1)\times(n-1)}$. 故要使 $|A^{\mathrm{T}}EA| \neq 0$，充要条件是

$$R(EA) \cap N(A^{\mathrm{T}}) = \varnothing \qquad —(4.3.1.25)$$

由于 A 是列满秩矩阵，记 $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}]$，且记

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{a}_{n-1}$$

是 A 的列空间唯一的法向量. 则

$$N(A^{\mathrm{T}}) = \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} = a\boldsymbol{N} \quad a \neq 0 \quad a \in R\}$$

并记 EA 的值域是

$$R(EA) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = EA\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{b} \in R^{n-1}\}$$

所以，(4.3.1.25)式成立，即以下方程

$$\boldsymbol{y} = EA\boldsymbol{b} \Leftrightarrow EA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{N} \qquad —(4.3.1.26)$$

应无解.

显然，(4.3.1.26)式无解等价于

$$\mathrm{rank}[EA : \boldsymbol{N}] > \mathrm{rank}EA = n-1$$

故可知 $A^{\mathrm{T}}EA$ 乘积矩阵可逆的充要条件是增广矩阵 $[EA : \boldsymbol{N}]$ 可逆.

由多重矢量积方法中的(2.4.1.3～6)式的关系，以及 EA 乘积的结果是使

A 矩阵的一些行向量乘以-1因子的事实,易知,行列式

$$|EA:\mathbf{N}| = (\pm)N_1^2 + (\pm)N_2^2 + \cdots + (\pm)N_n^2 \quad —(4.3.1.27)$$

其中 N_i 是 $\mathbf{N}$ 的分量.

(4.3.1.27)式中右边 N_i^2 前的($\pm$)表示了一个与 E 的取法有关的符号函数. 当 $E = I_n$,则所有的($\pm$) 均取为+,$E = -I_n$,所有($\pm$)都取为$-$,当 E 中有部分主对角元素为-1其余为1,则(4.3.1.27)式右边就出现有些 N_i^2 因子前将取为$-$号其余则取为+号的结果.

由于数论中的"平方和定理"[1],可知任一整数 m 的平方 m^2 都可以表示为不多于4个整数平方数的和,

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$$

所以,在(4.3.1.27)式的右边,如果 N_i 都是整数,并且 $N_i^2 \quad i = 1, \cdots, n$ 中刚好有下标 i_j, $j = 1, 2, 3, 4$, 以及 k 下标,使

$$N_k^2 = N_{i_1}^2 + N_{i_2}^2 + N_{i_3}^2 + N_{i_4}^2$$

则可能存在 E 的一个取法,使 $N_{i_j}^2$ 因子前取"$-$"号 N_k^2 因子前取"+"号(或相反),从而将这一组因子消去. 如果所有的 N_i^2 之间刚好满足上述的平方和关系,那么,可能存在 E 的一个取法将它们全部消去. 这样,行列式 $|EA:\mathbf{N}| = 0$ 从而 $A^{\mathrm{T}}EA$ 乘积不可逆.

例 4.3.1.1 设

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

显然 A 是列满秩的,但

$$A^{\mathrm{T}}EA = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad |A^{\mathrm{T}}EA| = 0$$

事实上,由

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

---

[1] 参见《数学词典》,谷超豪主编,上海辞书出版社,1992年,第95页,平方和问题.

$$EA = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

将以下行列式按第 3 列元素作展开后，有

$$| EA : \boldsymbol{N} | = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -3^2 - 4^2 + 5^2 = 0$$

这即是以上分析过的情形.

因此，以下的论述中凡涉及(4.3.1.22)式给出的$\boldsymbol{I}$矩阵时，均隐含地假设存在 $\boldsymbol{u}$ 的一个区域 D_u，使

$$\boldsymbol{u} \in D_u \subset D \quad | \boldsymbol{I} | > 0(\text{或} \ | \boldsymbol{I} | < 0) \qquad —(4.3.1.28)$$

即 D_u 是由行列式 $| \boldsymbol{I} | \neq 0$ 为条件给出的 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$的一个定义子域.

称(4.3.1.21)式给出的度规 g 是真空 Einstein 方程的一个几何解，如果 g 度规的二次型矩阵$\boldsymbol{I}$(由(4.3.1.22)式给出)的元素 g_{ij} 所构造的 Ricci 曲率张量 $R_{ij} = 0$，t、$j = 1$，…，$m - 1$.

这样，给出 $R_{ij} = 0$ 方程的解就转化为寻求一个曲面函数 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$，使 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的 g 度规在给出 E 矩阵的一个取法时，就正好是 $R_{ij} = 0$ 方程的解. 当然，由前面的分析实际已给出了 $\text{tr}D \neq 0$ 时 $R_{ij} = 0$ 方程的曲面解的形式，因此，这里所给出的方法，即是为求得 $\text{tr}D = 0$ 时的幂零解.

为此先分析数值方阵 A 为平方幂零矩阵时所具有的一些性质. 由前面的分析可知，高阶的平方幂零矩阵可由 2 阶(或 3 阶)的平方幂零矩阵构造出来，故先给出 2 阶平方幂零矩阵的数值特征.

记 A 是 2×2 阶幂零矩阵，

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

由

$$A^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ ac + cd = 0 \\ ab + bd = 0 \\ bc + d^2 = 0 \end{cases}$$

(1) $a = 0 \Rightarrow d = 0$ ($\because$ $\text{tr}A = 0$)，故 $bc = 0$，所以这时 A 只能是三角形矩阵，

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ or } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

(2) $a \neq 0 \Rightarrow a = -d$，故应有 $bc = -a^2$. 由此即知在实数域上 A 不能是对称矩阵. 在实数域上，简单地取 M 是任一非 0 实数，令

$$b = \pm \frac{a}{M} \quad c = \mp Ma$$

$$A = \begin{bmatrix} a & \pm \frac{a}{M} \\ \mp Ma & -a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & \pm \frac{1}{M} \\ \mp M & -1 \end{bmatrix}$$

而在复数域上，仍取 M 是任一非 0 实数，记 $i = \sqrt{-1}$ 令

$$b = i \frac{a}{M} \qquad c = iMa$$

$$A = \begin{bmatrix} a & i \frac{a}{M} \\ iMa & -a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & i \frac{1}{M} \\ iM & -1 \end{bmatrix}$$

如取 $M = 1$，则 A 是复数域上的对称矩阵.

对于 A 是 3 阶方阵的情形，也可以归纳出几种 $A^2 = 0$ 的矩阵的类型. 但对于以下的应用而言，只举出 $\operatorname{rank} A = 1$ 的类型之一.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & i\sqrt{2} & i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & 1 & 1 \\ i\sqrt{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad i = \sqrt{-1}$$

容易理解，这一类型的矩阵可以推广到 $A \in R^{n \times n}$（或 $C^{n \times n}$）的一般情形，如

$$A = \begin{bmatrix} n-1 & \sqrt{n-1} & \cdots & \sqrt{n-1} \\ -\sqrt{n-1} & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -\sqrt{n-1} & -1 & \cdots & -1 \end{bmatrix}_{n \times n} \qquad \text{—(4.3.1.29)}$$

$A \in C^{n \times n}$ 的情形类推.

利用以上的 2、3 阶平方幂零矩阵，就可以构造更高阶的平方幂零矩阵，如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & i & -1 \end{bmatrix} \quad i = \sqrt{-1} \qquad \text{—(4.3.1.30)}$$

是 4 阶的平方幂零矩阵，且 $\operatorname{rank} A = 2$.

现在再拓展参数曲面函数的形式. 在 Monge 形式

$$z = f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in D_x \subset R^m$$

给出的曲面上，已知作以下变换

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ z \end{bmatrix},\ \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}):\ \begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} & \boldsymbol{u} \in D_u \\ z = f(\boldsymbol{u}) \end{cases}$$

则

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} I_m \\ \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

则由(4.3.1.22)式，对 E 矩阵(是 $m+1$ 阶矩阵)作复数域上的分解，并在 E 的主对角线元素中，不写出 1(用 · 代替)而只写出 -1，则对于 E 的一个取法(指 $E \neq \pm I_{m+1}$) 可以有

$$E = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & -i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -i & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & -i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -i & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$= E_i E_i$$

分解. 其中 E_i 也是对角矩阵，其主对角线上的元素要么是 1 要么是 $-i$，且至少有一个主对角线元素是 $-i$.

在这样的符号规定下，(4.3.1.22)式的$\boldsymbol{I}$矩阵可由复向量乘积(见下文说明)构造，

$$\boldsymbol{I} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} E_i\right) * \left(E_i \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\right) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)_i^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)_i \qquad —(4.3.1.31)$$

其中

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)_i = E_i \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \qquad —(4.3.1.32)$$

现在，当 E_i 矩阵主对角线上的 $-i$ 项都是前 m 个主对角线元素中的项，即 E_i 矩阵的第 $(m+1)(m+1)$ 元素恒为 1 时，(4.3.1.32)式在 Monge 形式函数的参数化表示上，就相当于作了以下变换

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) = \begin{cases} \boldsymbol{x} = \widetilde{E}_i \boldsymbol{u} \\ z = f(\boldsymbol{u}) \end{cases} \quad \boldsymbol{u} \in D_u \subset R^m \qquad —(4.3.1.33)$$

其中 $\widetilde{E}_i$ 矩阵是(4.3.1.32)式中的 E_i 矩阵的前 $m \times m$ 阶顺序主子矩阵.

现在 $\boldsymbol{x}$ 中的某些分量成为纯虚数函数 $x_j = -iu_j$，$u_j \in R$，所以 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$现在是一个复 Euclid 空间上的函数. 但其变元 $\boldsymbol{u}$ 是实向量，$f(\boldsymbol{u})$仍是实函数. 以下将说

明，这样的 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面函数虽然在形式上并不一定是解析函数，但它可以由一个解析函数中构造出来.

很显然，由(4.3.1.33)式决定的 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 所构造的 $\boldsymbol{I}$ 矩阵（由(4.3.1.31)式）决定的度规 g 一定是一个 R^m 空间上的度规.

这里特别需要注意的是在(4.3.1.31)式中规定的矩阵（向量）乘积“$*$”所表示的是复 Euclid 空间（酉空间）上的复向量乘积（而不是内积）.

C^m 上的标准内积是指 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b} \in C^m$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \bar{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a} \qquad —(1.2.36)$$

其中 $\bar{\boldsymbol{a}}$ 是指 $\boldsymbol{a}$ 的共轭向量，$\bar{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}$ 是指共轭转置，$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ 是指单纯转置（不取共轭）.

由于这里面对的问题，在(4.3.1.31)式中若只能取标准内积运算，则 $\widetilde{E}_i \cdot \widetilde{E}_i \equiv I_m$，故(4.3.1.31)式就构造不出可逆不定的 $\boldsymbol{I}$ 矩阵而只能构造出正定的 $\boldsymbol{I}$ 矩阵. 所以，这里（及以下）给出的复向量的乘积运算（凡未指明的）均是非内积的乘积. **“复向量乘积”**的意思是指 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b} \in C^m$

$$\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{m} b_i a_i \qquad —(1.2.37)$$

即只取转置而不取共轭的数量乘积.

设 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + i\boldsymbol{b}_2 \quad \boldsymbol{a}_{1,2}$、$\boldsymbol{b}_{1,2} \in R^m$，则标准内积“$\cdot$”和复向量乘积“$*$”的结果如下：

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \bar{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} - i\boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2) = (\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2) + i(\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1) \qquad —(4.3.1.34)$$

$$\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} + i\boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2) = (\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2) + i(\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1) \qquad —(4.3.1.35)$$

由上可见 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ 乘积定义在 C^m 上的区别. 由于以上两式中最右端（$\cdot$）内的 $\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_i$ 项又等于 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_i$，故本书以下在使用这两种运算时，不加区别，在以上两式最右端的（$\cdot$）中，使用 $\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_i$ 或 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_i$ 的表示方式.

标准内积具有以下性质[1]，对 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b} \in C^m$

(1) 当 $\boldsymbol{b}$ 固定时，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 的线性函数，当 $\boldsymbol{a}$ 固定时，则是 $\boldsymbol{b}$ 的斜线性函数. “斜线性函数”是指对 $\alpha \in C$，有

$$\boldsymbol{a} \cdot (\alpha \boldsymbol{b}) = \bar{\alpha}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$

(2) 斜对称性，即 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}$，因此 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$ 一定是实数.

(3) 正定性，即对 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} > 0$.

---

[1] 引自《特殊矩阵》，见前注，第 86 页.

复向量乘积具有以下性质，对 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}\in C^m$，

(1) 双线性型，即对 $\alpha\in C$，有

$$(\alpha\boldsymbol{a})*\boldsymbol{b}=\alpha(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b})\quad \boldsymbol{a}*(\alpha\boldsymbol{b})=\alpha(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b})$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})*\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}*\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}*\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{a}*(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}*\boldsymbol{c}$$

(2) 对称性，即 $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}*\boldsymbol{a}$

(3) 共轭性，即 $\overline{\boldsymbol{a}}*\overline{\boldsymbol{b}}=\overline{\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}}$

但特别指出，复向量乘积**不**具有正定性.

标准内积与复向量乘积存在以下共轭对应关系

$$\boldsymbol{a}\cdot\overline{\boldsymbol{b}}=\overline{\overline{\boldsymbol{b}}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}\qquad —(4.3.1.36)$$

在复向量乘积下，$\boldsymbol{a}\in C^m\quad \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+i\boldsymbol{a}_2\quad \boldsymbol{a}_{1,2}\in R^m$，有

$$\boldsymbol{a}*\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2)+i2\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2\qquad —(4.3.1.37)$$

故在复向量乘积下，$\boldsymbol{a}*\boldsymbol{a}$ 一般不是实数，除非 $\boldsymbol{a}_1\perp\boldsymbol{a}_2$. 并且，在

$$\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2\quad \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2=0\qquad —(4.3.1.38)$$

时，即有

$$\boldsymbol{a}*\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=0$$

的结果.

一般地，复向量乘积意义下的正交概念是，若

$$\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=0\quad \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\in C^m\qquad —(4.3.1.39)$$

则表示 $\boldsymbol{b}$ 向量是与 $\boldsymbol{a}$ 向量**共轭正交**的向量. 这里的“共轭正交”即表示 $\boldsymbol{b}$ 的共轭向量 $\overline{\boldsymbol{b}}$ 在标准内积的意义下是与 $\boldsymbol{a}$ 正交的向量. 因为若(4.3.1.39)式成立，那么，由(4.3.1.36)式，必又有

$$\boldsymbol{a}\cdot\overline{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=0$$

从而 $\overline{\boldsymbol{b}}$ 就是标准内积意义下与 $\boldsymbol{a}$ 正交的向量. 由这一共轭正交的关系就有，当

$$\boldsymbol{a}*\boldsymbol{a}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\overline{\boldsymbol{a}}=0$$

这即表示 $\overline{\boldsymbol{a}}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 是标准内积意义下的正交向量. 称 $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{a}=0$ 的向量 $\boldsymbol{a}$ 是**自共轭正交**的向量.

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}\in C^m$，若在标准内积下，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即称 $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{a}$ **标准正交**的向量. 由(4.3.1.36)式的关系即知，与 $\boldsymbol{a}$ 标准正交的 C^m 的子空间 $V\subset C^m$ 的共轭空间 $\overline{V}\subset C^m$，就是与 $\boldsymbol{a}$ 共轭正交的子空间.

$$\boldsymbol{b} \in V \Rightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \quad \bar{\boldsymbol{b}} \in \bar{V} \Rightarrow \boldsymbol{a} * \bar{\boldsymbol{b}} = 0$$

反之亦然.

在几何上,共轭正交可以看成是向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 关于 C^m 空间中的实超平面 R^m 的镜像对称向量即 $\bar{\boldsymbol{b}}$ 的正交关系,因此也可以称共轭正交为**镜像正交**.

设 $C^m = C \times C \times \cdots \times C$ C—复数域. $\boldsymbol{a} \in C^m$ $\boldsymbol{a} = (a_i)^{\mathrm{T}}$, $a_i \in C$ 是复数. 则 C^m 上有复向量加法, $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b} \in C^m$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_i + b_i)^{\mathrm{T}}$$

和复向量乘法 $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$. C^m 关于复向量加法、乘法运算是封闭的,且易知 C^m 是线性空间.

规定 C^m 上的内积是标准内积. C^m 由标准内积定义成为酉空间.

定义 4.3.1.1 设 $\boldsymbol{a} \in C^m$,则 $\boldsymbol{a}$ 的**模**是指

$$\| \boldsymbol{a} \| = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})^{1/2} = (\bar{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a})^{1/2} = (\sum_i \bar{a}_i a_i)^{1/2} \qquad \blacksquare$$

即仍利用标准内积定义 C^m 上复向量的模(范数).

注意,在以上规定下, C^m 上的复向量的乘法运算有标准内积与复向量乘积这样性质不同的两种运算. 这实际只是复数域 C 上存在复数乘法和取模这样两种运算在 C^m 空间上的推广.

以下分析中,所有关于复向量的乘法运算都指复向量乘积即 $*$ 运算,仅在取复向量的模时,使用标准内积运算.

以下再对复向量的"正交"这一说法给予进一步的说明.

在以上规定的标准内积下,设 $\boldsymbol{z}_1$、$\boldsymbol{z}_2 \in C^m$ 是 2 个复向量.

$$\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{a}_1 + i\boldsymbol{a}_2 \qquad \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{b}_1 + i\boldsymbol{b}_2$$

由上文已指出,若标准内积下 $\boldsymbol{z}_1$、$\boldsymbol{z}_2$ 是正交的,即

$$\boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{z}_2 = \bar{\boldsymbol{z}}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{z}_1 = (\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_2) + i(\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_1) = 0$$

即有

$$\begin{cases} \mathrm{R}_e(\boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{z}_2) = \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_2 = 0 \\ \mathrm{I}_m(\boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{z}_2) = \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{—(4.3.1.36a)}$$

注意,因为 $\boldsymbol{a}_{1,2}$、$\boldsymbol{b}_{1,2} \in R^m$,故将(4.3.1.36a)式可表成以下形式,设 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 已给定, $\boldsymbol{b}_1$、$\boldsymbol{b}_2$ 可任取,并记 $\boldsymbol{a}_i = (a_{ij})$, $\boldsymbol{b}_i$ 类似,

$$\begin{cases} a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22} + \cdots + a_{2m} b_{2m} = -\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b}_1 \\ a_{11} b_{21} + a_{12} b_{22} + \cdots + a_{1m} b_{2m} = \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b}_1 \end{cases} \qquad \text{—(4.3.1.36b)}$$

当 $m \geqslant 2$ 时,对于任意给定的 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 都可以取到 $\boldsymbol{b}_1$ 向量,使(4.3.1.36b)式

是有解的. 事实上,

若 $$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=0\Rightarrow \boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}$$

则任取的 $\boldsymbol{b}_1$、$\boldsymbol{b}_2$ 向量均使(4.3.1.36a)式成立. 这可以说 $\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{0}$ 向量时,$\boldsymbol{z}_1$ 是与任一 $\boldsymbol{z}_2\in C^m$ 正交的向量(平凡的情形).

若 $$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=1\Rightarrow \text{如设 } \boldsymbol{a}_2=c\cdot\boldsymbol{a}_1 \quad c\in R$$

此时,(4.3.1.36b)式有解,应要求

$$c\cdot\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1=-\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1\Rightarrow(1+c^2)\cdot\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1=0$$

所以,可以取 $\boldsymbol{b}_1\perp\boldsymbol{a}_1$ 的任一向量,便可从(4.3.1.36b)式中解出 $\boldsymbol{b}_2$ 向量(有无穷个解).

若 $$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=2$$

则任取 $\boldsymbol{b}_1\neq\boldsymbol{0}$,(4.3.1.36b)式均可解出 $\boldsymbol{b}_2$ 向量(有无穷个解).

所以,在 $m\geqslant 2$ 时,标准内积下的(非平凡)正交情形是存在的. 现在再考虑 $m=1$ 时的情形. 这时,$z_1=a_1+ia_2 \quad z_2=b_1+ib_2 \quad a_{1,2}$、$b_{1,2}\in R$. (4.3.1.36a)式成为

$$\begin{cases}a_1b_1+a_2b_2=0\\ a_2b_1-a_1b_2=0\end{cases}$$

若 a_1、a_2 已给定,则要从上式中解出非 0 的 b_1、b_2,应要求

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ a_2 & -a_1\end{vmatrix}=-(a_1^2+a_2^2)=0$$

故这时满足标准内积正交概念的复数只能是 $z_1=0$,即 $a_1=a_2=0$,平凡的情形.

由此可见,标准内积意义下的正交是一个限制很强的概念. 放松这个概念的要求,可以规定以下狭义的正交

$$\mathrm{R}_e(\boldsymbol{z}_1\cdot\boldsymbol{z}_2)=\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2=0 \qquad \text{—(4.3.1.36c)}$$

若复向量 $\boldsymbol{z}_1$、$\boldsymbol{z}_2$ 在标准内积下,使(4.3.1.36c)式成立,即称 $\boldsymbol{z}_1$、$\boldsymbol{z}_2$ 是狭义正交的. 狭义正交也可认为是**几何正交**[1].

---

〔1〕 见《代数学引论》卷一,A. И. 柯斯特利金,张英伯译,高等教育出版社,2007 年,第 152 页.

狭义正交在 $m \geqslant 1$ 的 C^m 复数空间都有非平凡的向量正交情形存在. z_1、$z_2 \in C^m$,则若 z_1、z_2 是标准内积下的正交向量,则二者一定是几何正交的,但反之未必.

当 z_1、z_2 是几何正交的,就是作 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B} \in R^{2m}$ 实向量

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} \qquad \text{且 } \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B}$$

这就是几何正交的意义.

本书以下所指的复向量的"正交",均仅指标准内积下的正交或复向量乘积下的正交,不使用狭义的正交.

利用复向量乘积运算,并在(4.3.1.33)式给出的变换形式下,

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \widetilde{E}_i \\ \nabla f(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} \qquad \text{—(4.3.1.40)}$$

仍取

$$I = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \Leftrightarrow I = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} * \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} \qquad \text{—(4.3.1.41)}$$

则I矩阵等价于(4.3.1.22)式.

注意到(4.3.1.41)式形式上与经典的 R^m 空间上的曲面的第一基本二次型矩阵是一致的. 则由(4.3.1.40)式决定的$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$矩阵的列满秩性质,仍可由多重矢量积算法,构造出法向量 $\boldsymbol{N}$,

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \times \cdots \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_m}$$

仍规定单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 是

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{\|\boldsymbol{N}\|} \qquad \|\boldsymbol{N}\| = (\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N})^{1/2} \qquad \text{—(4.3.1.42)}$$

注意现在单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 的分量中有一些是纯虚数(其余均是实数). 由多重矢量积算法易知,在复向量乘积算法下,一定有 $|I| = \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}$, 故 $|I|$ 一定是实数.

由于单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 存在且可微,所以依旧定义第二基本二次型矩阵

$$I\!I = -\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} \Leftrightarrow I\!I = -\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} * \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} \qquad \text{—(4.3.1.43)}$$

以及 W 映射矩阵

$$W = I\!I\, I^{-1} = -D$$

(4.3.1.41～42)式在形式上与 R^m 空间上的同名量都是一致的. 容易理解关于 R^m 空间上曲面的经典微分几何的其他量值,在(4.3.1.33)式的变换以及上述的相关规定下在形式上也不会有变化. 利用这一点,即可由一个解析函数构造出 R^m 空间上真空 Einstein 方程的实度规解. 具体的方法可见下一节内容.

以上的分析已说明,如果给出一个以 m 维向量 $\boldsymbol{x}$ 为变元的函数

$$z = f(\boldsymbol{x})$$

并将 $f(\boldsymbol{x})$ 看成是某个 m 维向量空间上的曲面函数,并且,f 的第一基本二次型矩阵$\boldsymbol{I}$就是以 $\boldsymbol{x}$ 为变元的真空 Einstein 方程的度规(幂零解),那么,$f(\boldsymbol{x})$ 只能是一个其偏导数为复函数的函数. 以上的分析利用了复向量乘积运算. 也可以利用拟特征值的分析方法得到这一结论.

由以上关于 W 映射矩阵 D 为 k 次幂零矩阵的充要条件是 D 矩阵的全部特征值为 0(见引理 4.3.1.1)的结论,而 D 矩阵的特征值均为 0,即等价于

$$F(\boldsymbol{x},\ z) = z - f(\boldsymbol{x}) = 0$$

函数的加边 Hessian 矩阵的拟特征值全为 0. 由(3.2.2.27)式,即知,这等价于拟特征多项式的各系数均为 0.

以 $\boldsymbol{x}$ 为 4 维变元向量为例,并设 $f(\boldsymbol{x})$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 是二阶以上可微的. 这隐含地要求 f 是解析函数. 但现在先不以此为前提条件.

由拟特征多项式(3.2.2.20)式,(3.2.2.27)式,并用 f_i、f_{ij} 分别表示 $f(\cdot)$ 关于 x_i 的一阶偏导数和关于 x_i、x_j 的二阶偏导数,则

$$\sum_{\substack{\{i,\ j\}\\ i<j}} \begin{vmatrix} f_{ii} & f_{ij} & f_i \\ f_{ji} & f_{jj} & f_j \\ f_i & f_j & 0 \end{vmatrix} - \sum_{i=1}^{4} f_{ii} = 0$$

$$\sum_{\substack{\{i,\ j,\ k\}\\ i<j<k}} \begin{vmatrix} f_{ii} & f_{ij} & f_{ik} & f_i \\ f_{ji} & f_{jj} & f_{jk} & f_j \\ f_{ki} & f_{kj} & f_{kk} & f_k \\ f_i & f_j & f_k & 0 \end{vmatrix} - \sum_{\substack{\{i,\ j\}\\ i<j}} \begin{vmatrix} f_{ii} & f_{ij} \\ f_{ji} & f_{jj} \end{vmatrix} = 0$$

$$|H_a| - \sum_{\substack{\{i,\ j,\ k\}\\ i<j<k}} \begin{vmatrix} f_{ii} & f_{ij} & f_{ik} \\ f_{ji} & f_{jj} & f_{jk} \\ f_{ki} & f_{kj} & f_{kk} \end{vmatrix} = 0$$

$$|H| = 0$$

其中 $\quad H = \nabla^2 f \quad H_a = \begin{bmatrix} \nabla^2 f & \nabla f \\ \nabla f^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$

以上 4 个式子即为 $\boldsymbol{x}\in R^4$ 空间上真空 Einstein 方程解的"曲面"函数必需满足的偏微分方程组. 但这一组偏微分仅具有必要条件的意义,因为即便从中得到解函数 $f(\boldsymbol{x})$,也只能保证由此函数 $f(\boldsymbol{x})$产生的 D 矩阵是 k 次幂零矩阵而不一定保证 $k=2$.

具有充要条件意义的是直接从 $D^2=[0]$ 中导出的偏微分方程组. 如利用(2.3.2.23)式. 但显而易见的是这样导出的偏微分方程组十分复杂,一般是不能求解的.

但在低维的状况,可以利用以上方式得到关于 $f(\boldsymbol{x})$函数必须是复数偏导函数的结论. 对此,可以由 $\boldsymbol{x}\in R^2$ 的情形予以分析. 此时,由拟特征值全为 0 得到的条件是

$$\begin{cases}(1+f_2^2)f_{11}-2f_1f_2f_{12}+(1+f_1^2)f_{22}=0\\ f_{11}f_{22}-f_{12}^2=0\end{cases}\qquad —(4.3.1.44)$$

简化运算,利用与 $D^2=[0]$ 条件等价的(4.3.1.19)式,可得到以下条件

$$\begin{cases}(1+f_2^2)f_{11}^2+(1+f_1^2)f_{12}^2-2f_1f_2f_{11}f_{12}=0\\ (1+f_2^2)f_{11}f_{12}+(1+f_1^2)f_{12}f_{22}-f_1f_2f_{11}f_{22}-f_1f_2f_{12}^2=0\\ (1+f_1^2)f_{22}^2+(1+f_2^2)f_{12}^2-2f_1f_2f_{22}f_{12}=0\end{cases}$$

$$—(4.3.1.45)$$

由于引理 4.3.1.5,可知现在(4.3.1.44)式不仅是 $D^2=[0]$ 的必要条件同时一定是充分条件. 故易知(4.3.1.45)式与(4.3.1.44)式是相关的方程组. 但由(4.3.1.45)式的第 1、3 两式又可得到

$$\begin{cases}f_{11}^2+f_{12}^2+(f_2f_{11}-f_1f_{12})^2=0\\ f_{22}^2+f_{12}^2+(f_1f_{22}-f_2f_{12})^2=0\end{cases}\qquad —(4.3.1.46)$$

故若 $\nabla^2 f\neq 0$,即知(4.3.1.46)式只能在 f_i、f_{ij} 偏导数中含有复(函)数的条件下才能成立.

因此,应可以先导出 C^m 空间上的由一个解析函数决定的复曲面上构造真空 Einstein 方程的幂零解的方法——由此可得到的是复函数度规——然后,再将其拓展,以得到幂零解的实函数度规.

C^m 空间上定义的解析函数 $f(\boldsymbol{z})$的 C-R 条件,已由(2.4.4.139)式给出. 为以下使用的方便计,这里再将 C-R 条件用向量、矩阵形式表出.

设 $\boldsymbol{z}\in D_z\subset C^m$, $\boldsymbol{z}=(z_1,\cdots,z_m)^{\mathrm{T}}$ $\quad z_i=x_i+iy_i \quad x_i,y_i\in R$,$D_z$ 是 C^m 中的一个开集,将 $\boldsymbol{z}$ 表示成

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}\quad \boldsymbol{x}、\boldsymbol{y}\in R^m$$

若对于 $w\in C$,有复变函数

$$w = f(\boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) + ih(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$$

存在,其中 $g(\cdot)$、$h(\cdot)$均为 2 阶以上可微的实函数,那么,当且仅当以下表示的 C-R 条件成立,$f(\boldsymbol{z})$是解析函数,

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{y}} \Leftrightarrow \nabla_x g = \nabla_y h \quad \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{y}} = -\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{x}} \Leftrightarrow \nabla_y g = -\nabla_x h \qquad \text{—(4.3.1.47)}$$

这里∇_x、∇_y均为导数算子,下标 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 指明了对应的求导变元.

由于解析函数的任意阶导数都存在,所以,设 $f(\boldsymbol{z})$是解析函数,那么

$$\nabla_z f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{z}} = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1},\ \frac{\partial f}{\partial z_2},\ \cdots,\ \frac{\partial f}{\partial z_m}\right)^{\mathrm{T}}$$

是解析函数(向量),故可以对其求导.

由 $f(\boldsymbol{z})$的解析性,其关于 $\boldsymbol{z}$ 的一阶导数可表为下式,

$$\nabla_z w = \nabla_z f = \nabla_x g + i\,\nabla_x h = \nabla_y h - i\,\nabla_y g = \nabla_x g - i\,\nabla_y g = \nabla_y h + i\,\nabla_x h \qquad \text{—(4.3.1.48)}$$

规定二阶导数算子符号

$$\nabla_{xy}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{x} \partial \boldsymbol{y}} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j}\right] = \nabla_{yx}^2 \quad i,\ j = 1,\ \cdots,\ m \qquad \text{—(4.3.1.49)}$$

则

$$\nabla_{zz}^2 w = \nabla_{zz}^2 f \qquad \text{—(4.3.1.50)}$$

由 $f(\boldsymbol{z})$的解析性、二阶混合偏导数求导次序的可交换性,有,

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \nabla_x g = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} \nabla_x h = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \nabla_y h = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} \nabla_y g$$

所以

$$\nabla_{xx}^2 g = \nabla_{yx}^2 h = \nabla_{xy}^2 h = -\nabla_{yy}^2 g \qquad \text{—(4.3.1.51)}$$

以及

$$\nabla_{xx}^2 h = -\nabla_{xy}^2 g = -\nabla_{yx}^2 g = -\nabla_{yy}^2 h \qquad \text{—(4.3.1.52)}$$

由以上两式可得关系

$$\begin{cases} \nabla_{xx}^2 g + \nabla_{yy}^2 g = [0] \\ \nabla_{xx}^2 h + \nabla_{yy}^2 h = [0] \end{cases} \qquad \text{—(4.3.1.53)}$$

(4.3.1.53)式表示解析函数的实部、虚部函数都是调和函数.

定义 4.3.1.2 设 $\boldsymbol{z} \in C^m \quad w \in C$

$$w = f(\boldsymbol{z}) \quad \boldsymbol{z} \in D_z \subset C^m \qquad —(4.3.1.54)$$

是一个解析函数，记

$$F(\boldsymbol{z}, w) = w - f(\boldsymbol{z}) = 0 \qquad —(4.3.1.55)$$

并记

$$\nabla_z f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{z}} = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial z_m}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\nabla F = \left(-\frac{\partial f^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{z}}, 1\right)^{\mathrm{T}} \qquad —(4.3.1.56)$$

若在复向量乘积下

$$\nabla F * \nabla F = \nabla F^{\mathrm{T}} \nabla F = 1 + \frac{\partial f^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{z}} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{z}} \neq 0 \quad \boldsymbol{z} \in D_z' \subset D_z \quad —(4.3.1.57)$$

则称 $F(\boldsymbol{z}, w)$（或称 $f(\boldsymbol{z})$）是**正则解析函数**. 其中 D_z'是非空单连通开集. ■

定义 4.3.1.2 是在复向量乘积运算下的正则性定义. 相比较，在标准内积运算下，任意的 Monge 形式(4.3.1.54)式决定的解析函数 $f(\boldsymbol{z})$所对应的 $F(\boldsymbol{z}, w)$形式的一般函数的梯度∇F 都有

$$\nabla F \cdot \nabla F = \overline{\nabla F}^{\mathrm{T}} \nabla F = \| \nabla F \|^2 > 0$$

故都是正则的. 但在复向量乘积 * 运算下，可能存在

$$\frac{\partial f^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{z}} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{z}} = -1$$

的函数，从而使

$$\nabla F * \nabla F = 0$$

所以，需要排除这类情形. 这即是说，在复向量乘积运算下的正则性定义比标准内积运算下的正则性定义要更严格.

定理 4.3.1.6 设 $\boldsymbol{z} \in C^m$ $w \in C$，有

$$w = f(\boldsymbol{z}) \quad \boldsymbol{z} \in D_z \subset C^m$$

是正则的解析函数. 若 $f(\boldsymbol{z})$的 Hessian 矩阵 $H = \nabla_{zz}^2 f(\boldsymbol{z})$ 是平方幂零矩阵，且 $\nabla_z f(\boldsymbol{z})$就是 H 的特征向量，那么，复参数曲面函数

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}): \begin{cases} \boldsymbol{z} = \boldsymbol{u} & \boldsymbol{u} \in D_u \subseteq D_z \\ w = f(\boldsymbol{u}) & \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) \in C^{m+1} \end{cases} \qquad —(4.3.1.58)$$

是可定向的，且

$$I=\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}=\begin{bmatrix} I_m \\ \nabla_u f^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\quad I_m\in R^{m\times m}(\text{单位阵})$$

就是真空 Einstein 方程的(复)幂零解度规. ■

注意定理 4.3.1.6 中构造$\boldsymbol{I}$矩阵的仍是复向量乘积，以下情况均如此，不再逐一指明. 由于复向量乘积在形式上(将 i 看成为一个系数符号)就没有改变实 Euclid 空间上(标准)内积的形式，所以，在 C^m 空间上，利用复向量乘积运算下，可以直接沿用前面得到的诸多公式.

以下给出定理 4.3.1.6 的证明.

证明：因为 $f(\boldsymbol{z})$的 Hessian 矩阵 H 是平方幂零矩阵，故 H 的特征值全为 0. $\nabla_z f(\boldsymbol{z})$是 H 的特征向量，所以

$$H\nabla_z f(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{0}$$

由(2.4.5.19)式[1]，应有

$$\Gamma_k=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial z_k\partial z_i}\cdot\frac{\partial f}{\partial z_i}=0\quad k=1,\cdots,m$$

且由于 $f(\boldsymbol{z})$是正则的，故作一般形式的函数

$$F(\boldsymbol{z},w)=w-f(\boldsymbol{z})=0$$

有

$$\nabla F^{\mathrm{T}}\nabla F=1+\nabla_z f^{\mathrm{T}}\nabla_z f\neq 0$$

但由多重矢量积的算法知

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\times\cdots\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_m}=\nabla F$$

所以

$$|\boldsymbol{I}|=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|=\nabla F^{\mathrm{T}}\nabla F\neq 0\quad \boldsymbol{I}\text{ 可逆.}$$

单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 是指在标准内积运算下，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=\overline{\boldsymbol{n}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}=1$，有

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{N}}{\|\boldsymbol{N}\|}\quad \boldsymbol{N}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\times\cdots\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_m}\quad \|\boldsymbol{N}\|=(\overline{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N})^{1/2}$$

存在且可微. 故 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$是可定向的.

所以

---

[1] 只有维数上的差异. 这里的 m 维在意义上等价于那里的 $m-1$ 维.

$$\mathbb{I} = -\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} \qquad W = -D = \mathbb{I}\, \boldsymbol{I}^{-1}$$

都存在.

由(2.4.5.24)式及 $\Gamma_k = 0$ 的关系即得

$$D = -\frac{H}{|\boldsymbol{I}|^{1/2}}$$

所以 D 是平方幂零矩阵,故$\boldsymbol{I}$就是真空 Einstein 方程的幂零解.

定理 4.3.1.6 保证了 C^m 空间上通过构造正则解析函数 $f(\boldsymbol{z})$,并使其具有平方幂零性质的 Hessian 矩阵的方式,间接地得到真空 Einstein 方程的度规. 这显然是比直接求解更简便的方法.

总结以上的分析,以 C^4 空间为例,真空 Einstein 方程的几何解可归结为以下几种类型

$$\text{几何解}\begin{cases} D = [0] & & \text{平凡解} \\ \mathrm{tr}D \neq 0 & \mathrm{rank}D = 1 & \text{秩 1 解} \\ \mathrm{tr}D = 0 & D^2 = [0] & \text{幂零解} \\ \text{其中} & \mathrm{rank}D = 1 & \text{秩 1 幂零解} \\ & \mathrm{rank}D = 2 & \text{秩 2 幂零解} \end{cases}$$

$\mathrm{tr}D \neq 0$ 时的秩 1 解,前面已经分析过. 利用 C^m 空间上的复向量乘积,可以将那里的分析直接推广到 C^m 空间上. 以下再给出 C^4 空间上的幂零解的示例.

例 4.3.1.2 利用(4.3.1.29)式给出的秩 1 的平方幂零矩阵的形式,容易构造出以下函数

$$w = f(\boldsymbol{z}) = \mathrm{e}^{i\sqrt{3}az_1 + az_2 + az_3 + az_4} \quad z_i = x_i + iy_i \quad x_i,\ y_i \in R$$

这里

$$f(\boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) + ih(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$$

$$g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \mathrm{e}^{-\sqrt{3}ay_1 + ax_2 + ax_3 + ax_4} \cdot \cos(\sqrt{3}ax_1 + ay_2 + ay_3 + ay_4)$$

$$h(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \mathrm{e}^{-\sqrt{3}ay_1 + ax_2 + ax_3 + ax_4} \cdot \sin(\sqrt{3}ax_1 + ay_2 + ay_3 + ay_4)$$

易验证 C-R 条件成立,故 $f(\boldsymbol{z})$是解析函数.

由

$$F(\boldsymbol{z},\ w) = w - f(\boldsymbol{z}) = 0$$

得

$$\nabla F = (-i\sqrt{3}aw,\ -aw,\ -aw,\ -aw,\ 1)^{\mathrm{T}}$$

所以

$$\nabla F^{T}\nabla F = 1$$

因此 $f(z)$是正则的.

作

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}):\begin{cases} z = \boldsymbol{u} \\ w = f(\boldsymbol{u}) \end{cases}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} I_4 \\ \nabla_u f^{T} \end{bmatrix}$$

有

$$\boldsymbol{I} = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{T}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = I_4 + \nabla_u f\,\nabla_u f^{T}$$

注意到实际上有

$$\nabla_u f = (i\sqrt{3}aw,\ aw,\ aw,\ aw)^{T}$$

所以

$$\nabla_u f^{T}\nabla_u f = 0$$

即$\nabla_u f$ 是自共轭正交的向量. 因此,矩阵$\nabla_u f\,\nabla_u f^{T}$一定是平方幂零矩阵. 因为

$$\nabla_u f\,\nabla_u f^{T}\nabla_u f\,\nabla_u f^{T} = (\nabla_u f^{T}\nabla_u f)\cdot\nabla_u f\,\nabla_u f^{T} = [0]$$

因此易验证有,

$$\boldsymbol{I}^{-1} = I_4 - \nabla_u f\,\nabla_u f^{T}$$

以及(2.4.5.9)式,得

$$\boldsymbol{II} = \frac{\nabla_{uu}^{2} f}{(1+\overline{\nabla_u f}^{T}\,\nabla_u f)^{1/2}} = \frac{\nabla_{uu}^{2} f}{\|\nabla F\|}$$

且

$$\nabla_{uu}^{2} f = \begin{bmatrix} -3 & i\sqrt{3} & i\sqrt{3} & i\sqrt{3} \\ i\sqrt{3} & 1 & 1 & 1 \\ i\sqrt{3} & 1 & 1 & 1 \\ i\sqrt{3} & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} a^{2}w$$

有

$$\nabla_{uu}^{2} f\,\nabla_{uu}^{2} f = [0]$$

以及

$$\nabla_{uu}^2 f \, \nabla_u f = \mathbf{0}$$

成立. 从而

$$D = -\mathbb{II}\,\mathbb{I}^{-1} = -\frac{\nabla_{uu}^2 f}{\| \nabla F \|} \quad \text{rank} D = 1$$

是幂零矩阵. 故$\mathbb{I}$矩阵即为真空 Einstein 方程的度规.

也可以不利用$\mathbb{II}$、D 矩阵,而直接利用 Christoffel、Riemann 符号的运算来验证以上$\mathbb{I}$矩阵是真空 Einstein 方程的解. 这只要参照(4.3.1.13)式及以下的分析即知.

例 4.3.1.3 秩 2 幂零解

$$w = f(\boldsymbol{z}) = Ln(iz_1 + z_2) + Ln(iz_3 + z_4) \quad z_i \in C$$

$$f(\boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) + ih(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$$

$$g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\ln((-y_1 + x_2)^2 + (x_1 + y_2)^2) + \frac{1}{2}\ln((-y_3 + x_4)^2 + (x_3 + y_4)^2)$$

$$h(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \text{arctg}\,\frac{x_1 + y_2}{-y_1 + x_2} + \text{arctg}\,\frac{x_3 + y_4}{-y_3 + x_4}$$

易验证 $f(\boldsymbol{z})$是解析函数.

记 $\quad w_1 = iz_1 + z_2 \quad w_2 = iz_3 + z_4 \quad w_1,\ w_2 \neq 0$

且 $w_{1,2}$也是解析函数. 作

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}):\begin{cases} \boldsymbol{z} = \boldsymbol{u} \\ w = f(\boldsymbol{u}) \end{cases}$$

有

$$\nabla_u f = \left(\frac{i}{w_1},\ \frac{1}{w_1},\ \frac{i}{w_2},\ \frac{1}{w_2}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\nabla_{uu}^2 f = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{bmatrix} \dfrac{1}{w_1^2} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{bmatrix} \dfrac{1}{w_2^2} \end{bmatrix}$$

$\nabla_{uu}^2 f$ 是(4.3.1.30)式形式的秩 2 幂零矩阵. 且又有

$$\nabla_{uu}^2 f \, \nabla_u f = \mathbf{0} \quad \nabla_u f^{\mathrm{T}} \nabla_u f = 0$$

故 $f(\boldsymbol{z})$是正则的.

类似地有

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} I_4 \\ \nabla_u f^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$I = I_4 + \nabla_u f \, \nabla_u f^{\mathrm{T}}$$

其中

$$\nabla_u f \, \nabla_u f^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{w_1^2} & \dfrac{i}{w_1^2} & -\dfrac{1}{w_1 w_2} & \dfrac{i}{w_1 w_2} \\ \dfrac{i}{w_1^2} & \dfrac{1}{w_1^2} & \dfrac{i}{w_1 w_2} & \dfrac{1}{w_1 w_2} \\ -\dfrac{1}{w_1 w_2} & \dfrac{i}{w_1 w_2} & -\dfrac{1}{w_2^2} & \dfrac{i}{w_2^2} \\ \dfrac{i}{w_1 w_2} & \dfrac{1}{w_1 w_2} & \dfrac{i}{w_2^2} & \dfrac{1}{w_2^2} \end{bmatrix}$$

类似地

$$|I| = 1 \quad I^{-1} = I_4 - \nabla_u f \, \nabla_u f^{\mathrm{T}}$$

$$I\!I = \nabla_{uu}^2 f / \| \nabla F \|$$

$$D = -I\!I \, I^{-1} = -\nabla_{uu}^2 f / \| \nabla F \| \quad \mathrm{rank} D = 2$$

D 是秩 2 平方幂零解，I 是真空 Einstein 方程的秩 2 幂零度规. 对这一度规直接利用 Christoffel、Riemann 符号的验证可参见下一节分析.

例 4.3.1.4 取

$$w = f(\boldsymbol{z}) = z_1 z_3 + z_2 z_4 + i(z_2 z_3 - z_1 z_4) \quad z_i = x_i + i y_i \quad x_i 、 y_i \in R$$

$$f(\boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + ih(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 x_3 + x_2 x_4 + x_1 y_4 - x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_4 y_1 - y_1 y_3 - y_2 y_4$$

$$h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_1 y_3 + x_2 y_4 + x_3 y_1 + x_4 y_2 + y_1 y_4 - y_2 y_3$$

$f(\boldsymbol{z})$是解析函数. 仍有

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}): \begin{cases} \boldsymbol{z} = \boldsymbol{u} \\ w = f(\boldsymbol{u}) \end{cases}$$

记

$$p_1 = z_3 - iz_4 \quad p_2 = z_4 + iz_3 \quad p_3 = z_1 + iz_2 \quad p_4 = z_2 - iz_1$$

$$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)^{\mathrm{T}}$$

则 $\quad \nabla_u f = \boldsymbol{p} \quad \nabla_u f^{\mathrm{T}} \nabla_u f = 0$

$$\nabla_{uu}^2 f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \nabla_{uu}^2 f \, \nabla_{uu}^2 f = [0]$$

$$\nabla^2_{uu} f \, \nabla_u f = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{I} = I_4 + \boldsymbol{pp}^{\mathrm{T}} \quad |\boldsymbol{I}| = 1 \quad \boldsymbol{I}^{-1} = I_4 - \boldsymbol{pp}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{I\!I} = -\nabla^2_{uu} f / \|\nabla F\| \quad D = \nabla^2_{uu} f / \|\nabla F\| \quad \mathrm{rank} D = 2$$

D 是秩 2 平方幂零矩阵.$\boldsymbol{I}$是真空 Einstein 方程的秩 2 幂零解.

从以上几个例子可见,所构造的解析函数 $f(z)$具有

$$\nabla_z f^{\mathrm{T}} \nabla_z f = c \quad c\text{— 常数} \qquad \text{—(4.3.1.59)}$$

的性质.以上例子中,$c = 0$. 实际上,由 $f(z)$具有的性质

$$\nabla^2_{zz} f \, \nabla_z f = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}} \nabla_z f^{\mathrm{T}} \nabla_z f = \mathbf{0} \Rightarrow \nabla_z f^{\mathrm{T}} \nabla_z f = c$$

因此,取 $f(\boldsymbol{z})$是梯度向量的复向量乘积等于常数 c(且 $c \neq -1$) 的一类解析函数,且其 Hessian 矩阵为平方幂零矩阵,则 $f(\boldsymbol{z})$就是满足定理 4.3.1.6 的正则解析函数.

以下直接利用 Christoffel、Riemann 符号的演算来验证例 4.3.1.4 中的$\boldsymbol{I}$矩阵是真空 Einstein 方程的解.为此先说明基本 R_{itjk}符号与 R_{itjk}符号中的独立分量个数的问题.

所谓"**基本 R_{itjk} 符号**"的意义是指所有的 R_{itjk} 符号中,其 4 个下标按字典序排列刚好能构造出$\boldsymbol{I\!I}$矩阵的 2 阶伴随矩阵$\boldsymbol{I\!I}_2$的那些符号[见(2.4.3.32)式及其说明].以 4 阶的$\boldsymbol{I\!I}$矩阵为例,其 2 阶伴随矩阵是对称矩阵,即

$$\boldsymbol{I\!I}_2 = \begin{bmatrix} R_{1212} & R_{1213} & R_{1214} & R_{1223} & R_{1224} & R_{1234} \\ R_{1312} & R_{1313} & R_{1314} & R_{1323} & R_{1324} & R_{1334} \\ R_{1412} & R_{1413} & R_{1414} & R_{1423} & R_{1424} & R_{1434} \\ R_{2312} & R_{2313} & R_{2314} & R_{2323} & R_{2324} & R_{2334} \\ R_{2412} & R_{2413} & R_{2414} & R_{2423} & R_{2424} & R_{2434} \\ R_{3412} & R_{3413} & R_{3414} & R_{3423} & R_{3424} & R_{3434} \end{bmatrix} \qquad \text{—(4.3.1.60)}$$

$\boldsymbol{I\!I}_2$矩阵中[包括主对角线元素在内的上(或下)三角矩阵]所含有的 R_{itjk} 符号就是基本符号.

基本 R_{itjk} 符号的意义在于它们包含了全部 R_{itjk} 符号中的独立分量.仍以 4 阶$\boldsymbol{I\!I}$矩阵为例,相对应的 R_{itjk} $\quad i, t, j, k = 1, \cdots, 4$ 符号的总数无疑是 $4^4 = 256$ 个.但由(2.4.3.29) 式知,在 $i = t$(以及 $j = k$) 时,$R_{itjk} \equiv 0$ 的总数是 $2 \times 4^3 = 128$ 项,但其中有 $i = t$ 或 $j = k$ 时的重复计算的项.这些重复计算项是 $4 \times 4 = 16$ 项,故(不重复的)$R_{itjk} \equiv 0$ 项应是 $128 - 16 = 112$ 项.所以,R_{itjk} 不恒为 0 的项总数应为 144 项.注意到(4.3.1.60)式给出的$\boldsymbol{I\!I}_2$矩阵是对称矩阵,故其 $\frac{1}{2}$ 的非主对角线元素 R_{itjk} 符号应是 15 个.这 15 个非主对角线上的 R_{itjk} 符号按

(2.4.3.27)式的第1式,每一个可决定其余7个 R_{itjk} 符号,故共计可决定 $15\times(1+7)=120$ 个 R_{itjk} 符号;其次,在 $\mathbb{I}_2$ 矩阵的主对角线上的6个 R_{itjk} 符号,则应按(2.4.3.27)式的第2式,共计可决定 $6\times 4=24$ 个 R_{itjk} 符号.这两部分合计即为 $120+24=144$ 项不恒为0的 R_{itjk} 符号.

但基本 R_{itjk} 符号(即如(4.3.1.60)式矩阵的上三角子矩阵元素),在 R^m 空间的维数 $m\geqslant 5$ 时,并不全部为独立的.这可通过考察 Bianchi 恒等式(即(2.4.3.30)式)的独立性得知.与(2.4.3.27)式和(2.4.3.29)式相比较可知,在 R_{itjk} 符号的4个下标中,若有其中的2个下标(数字)是相同的,则(2.4.3.30)式 Bianchi 恒等式表示的循环关系,就必定已包含在(2.4.3.27)式表达的关系式之中.所以,R_{itjk} 的下标中有相同数字时,Bianchi 恒等式不是独立的关系式.然而,在 R_{itjk} 的4个下标互不相同时,同样易验证,Bianchi 恒等式是一个独立的关系式.因此,在这一场合,由 Bianchi 恒等式,全部基本 R_{itjk} 符号中,应减去4个下标数字互不相同的 R_{itjk} 符号中的1/3的非独立符号后,即为独立的基本 R_{itjk} 符号(总数).

综合以上的分析,一般地 R^m 空间上的 $m-1$ 维曲面的 R_{itjk} 符号的基本符号数目,记为 N

$$N=\frac{(m-1)(m-2)}{4}\left(\frac{(m-1)(m-2)}{2}+1\right)\quad(m\geqslant 3)$$

—(4.3.1.61a)

在 $m\geqslant 5$ 时,4个下标(数字)互不相同的 R_{itjk} 符号总数应是

$$(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$$

个,故其中的基本符号数目应是

$$\frac{1}{8}(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$$

个,所以,其中的非独立的基本符号数目应是

$$\frac{1}{24}(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$$

个,由此即知,独立的基本符号 R_{itjk} 的总数,记为 N_0

$$N_0=N-\frac{1}{24}(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)=\frac{(m-1)^2}{12}\cdot m(m-2)$$

—(4.3.1.61b)

当取 $m-1=n$,(4.3.1.61b)式就是传统文献上的通常形式

$$N_0=\frac{n^2}{12}(n^2-1)$$

因此，在 R^5 空间的 4 维曲面上，基本 R_{itjk} 符号共有 $N = 21$ 个. 由(4.3.1.60)式，4 个下标数字互不相同的基本 R_{itjk} 符号就是$\boldsymbol{I\!I}_2$矩阵的逆对角线(上三角部分)的 3 个元素. 易知这 3 个元素间存在着 Bianchi 恒等式的关系

$$R_{1234} - R_{1324} + R_{1423} = R_{1234} + R_{2314} + R_{3124} = 0$$

从而，其中的独立分量只有 2 个. 所以，独立的基本 R_{itjk} 符号总数应为 20 个.

容易理解，当 $3 \leqslant m < 5$ 时，R^m 空间上的 $m-1$ 维曲面上的 R_{itjk} 符号中的独立的基本符号的数目就是(4.3.1.61a)式给出的 N，且 $N_0 = N$.

对于例 4.3.1.4 给出的 $\boldsymbol{I}$ 矩阵，由那里的符号规定，直接计算即得 Christoffel 符号 Γ_{ij}^k 组成的向量

$$\boldsymbol{\Gamma}_{ij} = (\Gamma_{ij}^1, \Gamma_{ij}^2, \cdots, \Gamma_{ij}^{m-1})^{\mathrm{T}} \qquad —(2.4.3.6)$$

这里 $m-1 = 4$，对本例，有

$$\boldsymbol{\Gamma}_{13} = \boldsymbol{\Gamma}_{31} = \boldsymbol{\Gamma}_{24} = \boldsymbol{\Gamma}_{42} = \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{\Gamma}_{14} = \boldsymbol{\Gamma}_{41} = -i\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{\Gamma}_{23} = \boldsymbol{\Gamma}_{32} = i\boldsymbol{p}$$

其余的 $\boldsymbol{\Gamma}_{ij} = \mathbf{0}$. 由(4.2.2a)式，直接验证即知 Ricci 曲率张量 $R_{ij} = 0 \quad t,\ j = 1, 2, 3, 4$.

例 4.3.1.4 中的$\boldsymbol{I\!I}$矩阵的 2 阶伴随矩阵$\boldsymbol{I\!I}_2$是

$$\boldsymbol{I\!I}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & i & -i & -1 & 0 \\ 0 & i & 1 & -1 & i & 0 \\ 0 & -i & -1 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -1 & i & -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \|\nabla F\|^{-1}$$

上式即给出了全部基本 R_{itjk} 符号的取值[1].

对于真空 Einstein 方程，当然也可以直接利用 Christoffel、Riemann 符号，构造微分方程求解. 这样的解法不再需要先构造出曲面函数. 称这样的解法所得到的解是**解析解**. 解析解的示例及实函数的度规 $\boldsymbol{I}$ 矩阵的构造的幂零解方面的内容均放在下一节叙述.

§4.3.2 实度规的幂零解构造及解析解示例

以下先利用(4.3.1.33)式给出真空 Einstein 方程的实度规的幂零解的构

---

[1] **特别指出**，在直接利用 Γ_{ij}^k、R_{itj}^k 和 R_{itjk} 这些符号作演算时，应注意在 C^m 空间上，对 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b} \in C^m$，并使用张量记法 $\boldsymbol{a} = \{a^i\} \quad \boldsymbol{b} = \{b^i\}$，那么，依 Einstein 和式约定，$a^i b^i = \boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$. 也就是说，应将演算中所引公式中的求和号 $\sum$(或 Einstein 和式约定乘积)项下，复向量分量乘积加总算法的地方，都理解为是复向量乘积 $*$.

造，然后，再将其与上一节定理 4.3.1.6 条件下的解析函数关联起来.

设有 Monge 形式的函数

$$z = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \cdots, ix_{j_1}, \cdots, x_i, \cdots, ix_{j_2}, \cdots, x_m) \qquad —(4.3.2.1)$$

其中 $x_k \in R \quad k = 1, 2, \cdots, m, k \neq j_1, j_2, \cdots, j_n$

$$x_j \in iR \quad j = j_1, j_2, \cdots, j_n \quad 1 \leqslant n < m \quad i = \sqrt{-1}$$

这里 iR 表示虚数轴，故 x_j 是虚数，所以 ix_j 是实数，即是说 $f(\boldsymbol{x})$ 本质上仍是实函数，故 $z \in R$.

由(4.3.1.33)式及那里的符号规定，对以上的 x_k, $k = 1, 2, \cdots, m$ 作变换，

$$\boldsymbol{x} = \widetilde{E}_i \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R^m \qquad —(4.3.2.2)$$

$\widetilde{E}_i$ 是 m 阶对角矩阵，其主对角线元素在下标 $k = j_1, j_2, \cdots, j_n$ 时为 $-i$，其余均为 1，而 $\boldsymbol{u}$ 则是实变元参量.

在此变换下

$$z = f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{u}) \qquad —(4.3.2.3)$$

且 $f(\boldsymbol{u})$ 是标准的实函数表示形式.

设 $f(\boldsymbol{u})$ 关于 $\boldsymbol{u} \in D_u \subset R^m$ 是三阶可微的.

显然，(4.3.2.2)式的逆变换是

$$\boldsymbol{u} = \widetilde{I}_m \widetilde{E}_i \boldsymbol{x} \qquad —(4.3.2.4)$$

其中

$$\widetilde{I}_m = \widetilde{E}_i^2 \quad \widetilde{I}_m^2 = I_m \qquad —(4.3.2.5)$$

$\widetilde{I}_m$ 是主对角线元素为 ±1 组成的对角矩阵，$\widetilde{I}_m$ 的平方即为 m 阶单位矩阵.

则由(4.3.2.3～4)，有[1]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f}{\partial u_k} \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f}{\partial u_k} \quad k = 1, \cdots, m \quad k \neq j_1, j_2, \cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial u_j} \dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} = i \dfrac{\partial f}{\partial u_j} \quad j = j_1, j_2, \cdots \end{cases} \qquad —(4.3.2.5a)$$

将上式表成向量、矩阵形式，即是

---

[1] 注意由(4.3.2.6～8)式，$\nabla_u f$、$\nabla_{uu}^2 f$ 是实向量、矩阵，但 $\nabla_x f$、$\nabla_{xx}^2 f$ 则是复向量、矩阵. 由于 x_j $j = j_1, j_2, \cdots$ 是虚数，故 $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 是(4.3.2.1)式形式下的一个实函数对于虚数变元的偏导数. (4.3.2.5a)式给出其意义.

$$\nabla_x f(\boldsymbol{x}) = \tilde{I}_m \tilde{E}_i \nabla_u f(\boldsymbol{u}) \qquad —(4.3.2.6)$$

$$\nabla_u f(\boldsymbol{u}) = \tilde{E}_i \nabla_x f(\boldsymbol{x}) \qquad —(4.3.2.7)$$

$$\nabla_{xx}^2 f(\boldsymbol{x}) = \tilde{I}_m \tilde{E}_i \nabla_{uu}^2 f(\boldsymbol{u}) \tilde{E}_i \tilde{I}_m \qquad —(4.3.2.8)$$

将(4.3.2.1)式表成一般形式，

$$F(\boldsymbol{x}, z) = z - f(\boldsymbol{x}) = 0$$

由以上关系，F 的梯度向量是

$$\nabla F = \begin{bmatrix} -\nabla_x f(\boldsymbol{x}) \\ 1 \end{bmatrix} \qquad —(4.3.2.9)$$

仍规定，若 F 的梯度向量∇F，在复向量乘积运算下，有

$$\begin{aligned} \nabla F * \nabla F &= \nabla F^{\mathrm{T}} \nabla F = 1 + \nabla_x f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) \nabla_x f(\boldsymbol{x}) \\ &= 1 + \nabla_u f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}) \tilde{I}_m \nabla_u f(\boldsymbol{u}) \neq 0 \quad \boldsymbol{u} \in D_u' \subseteq D_u \end{aligned} \qquad —(4.3.2.10)$$

即称 $F(\cdot)$(或 $f(\cdot)$)是正则的，其中 D_u' 是非空单连通集. 易知$\nabla F^{\mathrm{T}} \nabla F$ 是实数.

类似定理 4.3.1.6，有以下定理.

定理 4.3.2.1 设 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \in R^m$　$z \in C$ 有(4.3.2.1)式形式上的 Monge 形式函数

$$z = f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in D_x \subset R^m$$

$f(\boldsymbol{x})$关于 $\boldsymbol{x}$ 是三阶可微函数，其一般形式是

$$F(\boldsymbol{x}, z) = z - f(\boldsymbol{x}) = 0$$

若 $f(\boldsymbol{x})$函数满足以下条件

(1) $\nabla_{xx}^2 f$ 是平方幂零矩阵

(2) $\nabla_x f^{\mathrm{T}} \nabla_x f = 0$

则由参数函数

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}): \begin{cases} \boldsymbol{x} = \tilde{E}_i \boldsymbol{u} & \boldsymbol{u} \in D_u \subseteq D_x \\ z = f(\boldsymbol{u}) \end{cases}$$

决定的矩阵

$$\boldsymbol{I} = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$$

就是真空 Einstein 方程的幂零解度规，并且$\boldsymbol{I}$ 是实对称矩阵. ■

证明：由定理的条件第(2)点及(4.3.2.10)式，可知 $F(\boldsymbol{x}, z)$是正则的，

$\nabla F = (-\nabla_x f^{\mathrm{T}},\ 1)^{\mathrm{T}}$

$$\nabla F^{\mathrm{T}} \nabla F \equiv 1$$

由(4.3.2.7)式

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \widetilde{E}_i \\ \nabla_u f^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ \nabla_x f^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \widetilde{E}_i \qquad \text{—(4.3.2.11)}$$

得

$$\boldsymbol{I} = \widetilde{I}_m + \nabla_u f\, \nabla_u f^{\mathrm{T}} = \widetilde{I}_m + \widetilde{E}_i\, \nabla_x f\, \nabla_x f^{\mathrm{T}} \widetilde{E}_i \qquad \text{—(4.3.2.12)}$$

由(4.3.2.1)式及 $\widetilde{E}_i$ 矩阵的构造，$\boldsymbol{I}$ 矩阵是实对称矩阵.

由多重矢量积

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \times \cdots \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_m} = (-i)^n\, \nabla F \qquad \text{—(4.3.2.13)}$$

n 是 $\widetilde{E}_i$ 矩阵中主对角线元素为 $-i$ 的个数. 所以

$$\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N} = i^{2n} = (-1)^n \Rightarrow |\boldsymbol{I}| = \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N} = (-1)^n$$

$\boldsymbol{I}$ 可逆. $\boldsymbol{n}$ 单位法向量存在且可微，并得到

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{(\overline{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N})^{1/2}} = \frac{(-i)^n\, \nabla F}{\|\nabla F\|} \qquad \text{—(4.3.2.14)}$$

其中 $\overline{\boldsymbol{N}} = i^n\, \overline{\nabla F}$ $\overline{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N} = (-1)^n i^{2n}\, \overline{\nabla F}^{\mathrm{T}}\, \nabla F = \|\nabla F\|^2$

故$\boldsymbol{I\!I}$、W 矩阵均存在. 由上式

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}} \left(\frac{(-i)^n\, \nabla F}{\|\nabla F\|} \right) = \frac{(-i)^n\, \dfrac{\partial (\nabla F)}{\partial \boldsymbol{u}}}{\|\nabla F\|} - \frac{\boldsymbol{n}}{\|\nabla F\|} \frac{\partial (\|\nabla F\|)}{\partial \boldsymbol{u}}$$

得

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} = (-i)^n \begin{bmatrix} -\nabla_{xx}^2 f \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\widetilde{E}_i}{\|\nabla F\|} - \frac{\boldsymbol{n}}{\|\nabla F\|} \frac{\partial (\|\nabla F\|)}{\partial \boldsymbol{u}} \qquad \text{—(4.3.2.15)}$$

再由定义

$$\boldsymbol{I\!I} = -\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}} = (-i)^n \frac{\widetilde{E}_i\, \nabla_{xx}^2 f \widetilde{E}_i}{\|\nabla F\|} \qquad \text{—(4.3.2.16)}$$

易知$\boldsymbol{I\!I}$有可能是复对称矩阵，但$\boldsymbol{I\!I}$的任一 2 阶子式均为实(函)数.

因 $\nabla_x f^{\mathrm{T}} \nabla_x f = 0$，故$\nabla_x f\, \nabla_x f^{\mathrm{T}}$是平方幂零矩阵，于是可知

$$\boldsymbol{I}^{-1} = \widetilde{I}_m - \widetilde{I}_m \widetilde{E}_i\, \nabla_x f\, \nabla_x f^{\mathrm{T}} \widetilde{E}_i \widetilde{I}_m \qquad \text{—(4.3.2.17)}$$

并注意到定理中的条件(2)可导出

$$\nabla^2_{xx} f \, \nabla_x f = \mathbf{0}$$

以及

$$\widetilde{E}_i \widetilde{I}_m \widetilde{E}_i = I_m$$

有

$$D = -W = -\mathbb{I}\, I^{-1} = -\mathbb{I}\, \widetilde{I}_m \qquad —(4.3.2.18)$$

容易验证,因为$\nabla^2_{xx} f$ 是平方幂零矩阵,故一定有

$$D^2 = \mathbb{I}\, \widetilde{I}_m \mathbb{I}\, \widetilde{I}_m = [0]$$

所以$\boldsymbol{I}$ 矩阵就是真空 Einstein 方程的度规. 即证.

仍以 $\boldsymbol{x} \in R^4$ 的情形为例.

例 4.3.2.1 取

$$z = f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{i\sqrt{3}ax_1 + ax_2 + ax_3 + ax_4} \quad (a \neq 0)$$

显然,这里的函数形式等同于例 4.3.1.2 中的 $f(z)$. 故只要将那里的$\nabla_u f$、$\nabla^2_{uu} f$ 改写成$\nabla_x f$、$\nabla^2_{xx} f$,将 w 改写成 z 就是本例中的对应量. 可知 $f(\boldsymbol{x})$满足定理 4.3.2.1 的条件.

再作(4.3.33)式的变换. 令

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) = \begin{cases} x_1 = -iu_1 \\ x_2 = u_2 \\ x_3 = u_3 \\ x_4 = u_4 \\ z = \mathrm{e}^{\sqrt{3}au_1 + au_2 + au_3 + au_4} \end{cases} \qquad u_i \in R$$

注意现在 z 已成为实函数. 有

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{3}az & az & az & az \end{bmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{I} = \frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} -1 + 3a^2z^2 & \sqrt{3}a^2z^2 & \sqrt{3}a^2z^2 & \sqrt{3}a^2z^2 \\ \sqrt{3}a^2z^2 & 1 + a^2z^2 & a^2z^2 & a^2z^2 \\ \sqrt{3}a^2z^2 & a^2z^2 & 1 + a^2z^2 & a^2z^2 \\ \sqrt{3}a^2z^2 & a^2z^2 & a^2z^2 & 1 + a^2z^2 \end{bmatrix}$$

可知不论 a、z 取何值，总有 $|\boldsymbol{I}|=-1$，故$\boldsymbol{I}$ 矩阵中一定含有单数的负数特征值.

由$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}}$的列向量作多重矢量积，可得

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}-\sqrt{3}az\\ iaz\\ iaz\\ iaz\\ -i\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}=-1\quad \|\boldsymbol{N}\|=(1+6a^2z^2)^{1/2}$$

得单位法向量

$$\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3}az,\ iaz,\ iaz,\ iaz,\ -i)^{\mathrm{T}}/(1+6a^2z^2)^{1/2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}}=\begin{bmatrix}-3 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ i\sqrt{3} & i & i & i\\ i\sqrt{3} & i & i & i\\ i\sqrt{3} & i & i & i\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\frac{a^2z}{(1+6a^2z^2)^{1/2}}-\frac{\boldsymbol{n}}{(1+6a^2z^2)^{1/2}}\frac{\partial((1+6a^2z^2)^{1/2})}{\partial \boldsymbol{u}}$$

故

$$\mathbb{I}=-\frac{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}}=-\frac{ia^2z}{(1+6a^2z^2)^{1/2}}\begin{bmatrix}3 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1 & 1 & 1\\ \sqrt{3} & 1 & 1 & 1\\ \sqrt{3} & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$\mathbb{I}$ 的秩为 1，且为虚数对称矩阵，故其 2 阶子式均为实数.

再由

$$\boldsymbol{I}^{-1}=-\begin{bmatrix}1+3a^2z^2 & -\sqrt{3}a^2z^2 & -\sqrt{3}a^2z^2 & -\sqrt{3}a^2z^2\\ -\sqrt{3}a^2z^2 & -1+a^2z^2 & a^2z^2 & a^2z^2\\ -\sqrt{3}a^2z^2 & a^2z^2 & -1+a^2z^2 & a^2z^2\\ -\sqrt{3}a^2z^2 & a^2z^2 & a^2z^2 & -1+a^2z^2\end{bmatrix}$$

即得

$$D=-\mathbb{I}\,\boldsymbol{I}^{-1}=\frac{ia^2z}{(1+6a^2z^2)^{1/2}}\begin{bmatrix}3 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1 & -1 & -1\\ \sqrt{3} & -1 & -1 & -1\\ \sqrt{3} & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

易知 $D^2=[0]$.

例 4.3.2.2 取

$$z=f(\boldsymbol{x})=Ln(ix_1+x_2)+Ln(ix_3+x_4)\quad x_k\in R$$

即此例的函数形式与例 4.3.1.3 相似，用 x_k 替代那里的 z_k，将那里的$\nabla_u f$、$\nabla_{uu}^2 f$ 直接对应成$\nabla_x f$、$\nabla_{xx}^2 f$ 可知 $f(\boldsymbol{x})$满足定理 4.3.2.1

作参数变换

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})=\begin{cases}x_1=-iu_1\\ x_2=u_2\\ x_3=-iu_3\\ x_4=u_4\\ z=ln(u_1+u_2)+ln(u_3+u_4)\end{cases}$$

则现在 z 是实函数，其定义域可取为 $0<u_k<+\infty$.

再作替换

$$w_1=\frac{1}{u_1+u_2}\quad w_2=\frac{1}{u_3+u_4}$$

即得

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{u}}=\begin{bmatrix}-i&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-i&0\\0&0&0&1\\w_1&w_1&w_2&w_2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}-1+w_1^2&w_1^2&w_1w_2&w_1w_2\\w_1^2&1+w_1^2&w_1w_2&w_1w_2\\w_1w_2&w_1w_2&-1+w_2^2&w_2^2\\w_1w_2&w_1w_2&w_2^2&1+w_2^2\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{I}$是实对称矩阵. 由$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{u}}$列向量的多重矢量积可得

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}iw_1\\w_1\\iw_2\\w_2\\-1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}=1\quad \|\boldsymbol{N}\|=(1+2(w_1^2+w_2^2))^{1/2}$$

$$\boldsymbol{I}^{-1}=\begin{bmatrix}-1-w_1^2 & w_1^2 & -w_1w_2 & w_1w_2\\ w_1^2 & 1-w_1^2 & w_1w_2 & -w_1w_2\\ -w_1w_2 & w_1w_2 & -1-w_2^2 & w_2^2\\ w_1w_2 & -w_1w_2 & w_2^2 & 1-w_2^2\end{bmatrix}$$

由 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{N}/\|\boldsymbol{N}\|$，得

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{u}}=\frac{1}{\|\boldsymbol{N}\|}\begin{bmatrix}-iw_1^2 & -iw_1^2 & 0 & 0\\ -w_1^2 & -w_1^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -iw_2^2 & -iw_2^2\\ 0 & 0 & -w_2^2 & -w_2^2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}-\frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{N}\|}\cdot\frac{\partial(\|\boldsymbol{N}\|)}{\partial \boldsymbol{u}}$$

$$\boldsymbol{II}=\frac{1}{\|\boldsymbol{N}\|}\begin{bmatrix}w_1^2 & w_1^2 & 0 & 0\\ w_1^2 & w_1^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & w_2^2 & w_2^2\\ 0 & 0 & w_2^2 & w_2^2\end{bmatrix}\quad \mathrm{rank}\boldsymbol{II}=2$$

$$D=-\boldsymbol{II}\,\boldsymbol{I}^{-1}=\frac{1}{\|\boldsymbol{N}\|}\begin{bmatrix}w_1^2 & -w_1^2 & 0 & 0\\ w_1^2 & -w_1^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & w_2^2 & -w_2^2\\ 0 & 0 & w_2^2 & -w_2^2\end{bmatrix}\Rightarrow D^2=[0]\quad \mathrm{rank}D=2$$

本例中$\boldsymbol{I}$、$\boldsymbol{II}$均为实矩阵.

以下仍然再利用 Christoffel、Riemann 符号对以上结果予以验证. 仍利用符号

$$\boldsymbol{\Gamma}_{ij}=(\Gamma_{ij}^1,\Gamma_{ij}^2,\cdots,\Gamma_{ij}^{m-1})^{\mathrm{T}}\qquad —(2.4.3.6)$$

本例中
$$m=5\quad m-1=4$$
可得

$$\boldsymbol{\Gamma}_{11}=\boldsymbol{\Gamma}_{12}=\boldsymbol{\Gamma}_{21}=\boldsymbol{\Gamma}_{22}=\begin{bmatrix}w_1\\ -w_1\\ w_2\\ -w_2\end{bmatrix}w_1^2\quad \boldsymbol{\Gamma}_{33}=\boldsymbol{\Gamma}_{34}=\boldsymbol{\Gamma}_{43}=\boldsymbol{\Gamma}_{44}=\begin{bmatrix}w_1\\ -w_1\\ w_2\\ -w_2\end{bmatrix}w_2^2$$

其余的 $\boldsymbol{\Gamma}_{ij}=\boldsymbol{0}$.

由此可得基本 R_{iijk} 符号组成的二阶伴随矩阵是

$$\mathbb{I}_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&1&0\\0&1&1&1&1&0\\0&1&1&1&1&0\\0&1&1&1&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}w_1^2w_2^2$$

因为现在 Weingarten 映射矩阵的秩为 2,故 Riemann 符号 R_{itjk} 中必有部分符号是非 0 的. 并可注意到I 矩阵的 2 阶顺序主子式$=-1$,故可知I 矩阵是不定矩阵.

可以从以上给出的 Γ_{ij}^k 符号,直接验证 $R_{tj}=0$, t, $j=1$, 2, 3, 4. 如省略 $\Gamma_{ij}^k\equiv 0$ 的项,按(4. 2. 2a) 式,以 $t=j=1$ 为例

$$\begin{aligned}-R_{11}&=\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial\Gamma_{i1}^{i}}{\partial u_1}-\frac{\partial\Gamma_{11}^{i}}{\partial u_i}\right)+\sum_{i=1}^{4}\sum_{h=1}^{4}(\Gamma_{i1}^{h}\Gamma_{1h}^{i}-\Gamma_{11}^{h}\Gamma_{ih}^{i})\\&=\frac{\partial\Gamma_{11}^{1}}{\partial u_1}+\frac{\partial\Gamma_{21}^{2}}{\partial u_1}-\frac{\partial\Gamma_{11}^{1}}{\partial u_1}-\frac{\partial\Gamma_{11}^{2}}{\partial u_2}-\frac{\partial\Gamma_{11}^{3}}{\partial u_3}-\frac{\partial\Gamma_{11}^{4}}{\partial u_4}+\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{11}^{1}+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{12}^{1}+\Gamma_{21}^{1}\Gamma_{11}^{2}+\\&\quad+\Gamma_{21}^{2}\Gamma_{12}^{2}-\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{11}^{1}-\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{12}^{1}-\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{21}^{2}-\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{11}^{3}\Gamma_{33}^{3}-\Gamma_{11}^{4}\Gamma_{34}^{3}-\\&\quad-\Gamma_{11}^{3}\Gamma_{43}^{4}-\Gamma_{11}^{4}\Gamma_{44}^{4}\end{aligned}$$

对上式简化,并代入 Γ_{ij}^k 因子,有

$$\begin{aligned}-R_{11}&=-\frac{\partial w_1^3}{\partial u_1}+\frac{\partial w_1^3}{\partial u_2}-\frac{\partial(w_1^2w_2)}{\partial u_3}+\frac{\partial(w_1^2w_2)}{\partial u_4}-w_1^6+w_1^6+w_1^6-w_1^6-w_1^2w_2^4+\\&\quad+w_1^2w_2^4+w_1^2w_2^4-w_1^2w_2^4\\&=0\end{aligned}$$

其余 R_{ij} 可类推.

由此即知以上给出的I矩阵就是真空 Einstein 方程的幂零解(秩 2 解)度规.

推论 4. 3. 2. 2 设 $z\in C^m$ $w\in C$, 有函数

$$w=f(\boldsymbol{z})=g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+ih(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\quad \boldsymbol{z}\in D_z\subset C^m\quad \boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}\quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R^m$$

若 $f(\boldsymbol{z})$满足以下条件

(1) $f(\boldsymbol{z})$是解析函数

(2) $f(\boldsymbol{z})$的 Hessian 矩阵$\nabla_{zz}^2 f(\boldsymbol{z})$是平方幂零矩阵

(3) $f(\boldsymbol{z})$的形式可表成

$$f(z)=f(z_1,\cdots,iz_{j_1},\cdots,z_i,\cdots,iz_{j_2},\cdots,z_m)\qquad —(4.3.2.19)$$

(4) $\nabla_z f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{z})\nabla_z f(\boldsymbol{z})=0$

则 $f(z)$是满足定理 4.3.1.6 条件的正则解析函数，并且，取

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{z})\mid_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}} = g(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{b}) + ih(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{b}) \quad \boldsymbol{x} \in D_z(\boldsymbol{b}) \subset D_z \qquad —(4.3.2.20)$$

则 $f(\boldsymbol{x})$在形式上就是满足定理 4.3.2.1 条件的函数. 其中 $\boldsymbol{b} \in R^m$ 是任一个使集合

$$D_z(\boldsymbol{b}) = D_z \cap \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{x}、\boldsymbol{b} \in R^m\} \qquad —(4.3.2.21)$$

是关于 $\boldsymbol{x}$ 的非空单连通开区域的常数向量. ■

这里所谓"关于 $\boldsymbol{x}$ 的非空单连通开区域"，即是指，有 $\boldsymbol{b} \in R^m$ 及常数向量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$，且 $\boldsymbol{a}_1 < \boldsymbol{a}_2$，使

$$D_z(\boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{a}_1 < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{x} \in R^m\} \subset D_z \qquad —(4.3.2.22)$$

且 $D_z(\boldsymbol{b})$非空[1]. 这保证了(4.3.2.20)式的 $f(\boldsymbol{x})$有定义.

由以上推论的(1)、(2)和(4)点即知 $f(\boldsymbol{z})$满足定理 4.3.1.6 的条件，再由(3)及(4.3.2.20～21)式即知 $f(\boldsymbol{x})$满足定理 4.3.1.2 的条件(只需将下标为 j_1，j_2…的 x_j 变元定义成虚数).

以上推论表明了满足定理 4.3.2.1 条件的 $f(\boldsymbol{x})$在形式上可以从一个满足定理 4.3.1.6 条件的解析函数中直接导出. 如以上的例 4.3.2.1～2 中 $f(\boldsymbol{x})$就是取自例 4.3.1.2～3 中的 $f(\boldsymbol{z})$函数，并按(4.3.2.20)式取 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ 导出的函数[2]. 但这一推论的逆，即任取的一个满足定理 4.3.2.1 条件的函数 $f(\boldsymbol{x})$，都存在有一个满足定理 4.3.1.6 条件的解析函数 $f(\boldsymbol{z})$，使 $f(\boldsymbol{x})$可由 $f(\boldsymbol{z})$按(4.3.2.20)式的要求导出，尚有待论证.

以上的分析，从几何意义上给出了真空 Einstein 方程解的一种构造方法. 但应说明，以上的方法不能说已涵盖了真空 Einstein 方程解的全部的几何构造方法.

由以上的分析与示例已可以看到，要给出真空 Einstein 方程的解，可以由两种途径完成，其一是假设 g 度规是某个曲面函数 $f(\boldsymbol{x})$产生的**Ⅰ**矩阵所给出的，从而，可以利用 $f(\boldsymbol{x})$函数所产生的**Ⅱ**矩阵和 D 矩阵的性质通过构造 $f(\boldsymbol{x})$函数得到 g 度规；其二则可以是利用 Christoffel 符号按 Ricci 曲率张量恒为 0 的条件直接去解出 g 度规. 前一种方法即是上文所说的几何解，后一种方法(逆方向的运算)在以上示例中是作为前一种方法的验证算法出现的.

不利用**Ⅱ**矩阵(其实质是不利用法向量概念)而只利用 Christoffel 符号求解真空 Einstein 方程的方法，就是**解析解**方法.

---

[1] $\boldsymbol{a}_1 < \boldsymbol{a}_2$ 等价于 $\boldsymbol{a}_1$ 的各分量均小于 $\boldsymbol{a}_2$ 的对应下标分量.

[2] 很显然，$\boldsymbol{b}$ 不取为 $\boldsymbol{0}$ 也是可以的.

解析解方法中最著名的就是 K. Schwarzschild 度规. 不考虑这一个度规的物理学意义,用以下算法表示这一度规的构造方法.

例 4.3.2.3 K. Schwarzschild 度规 利用极坐标,设真空 Einstein 方程的解(4 维曲面条件下)是

$$g = -A(r)\mathrm{d}t^2 + B(r)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$$

且其中 $A(\infty) = B(\infty) = 1$, A 、B 是待定函数.

即

$$I = \begin{bmatrix} -A(r) & & & 0 \\ & B(r) & & \\ & & r^2 & \\ 0 & & & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

由此,可得 Christoffel 符号(不恒为 0 的项),

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2B}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r},\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r},\ \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2B}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}r}$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\frac{r}{B},\ \Gamma_{44}^2 = -\frac{r\sin^2\theta}{B},\ \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{44}^3 = -\sin\theta\cos\theta,\ \Gamma_{24}^4 = \Gamma_{42}^4 = \frac{1}{r},\ \Gamma_{34}^4 = \Gamma_{43}^4 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

利用(4.2.2a)式得 Ricci 曲率张量

$$R_{11} = -\frac{1}{2B}\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{4B}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{1}{rB}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} \quad \text{—(a)}$$

$$R_{22} = \frac{1}{2A}\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{4A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{1}{rB}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}r} \quad \text{—(b)}$$

$$R_{33} = -1 + \frac{r}{2B}\left(\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{B} \quad \text{—(c)}$$

$$R_{44} = R_{33}\cdot\sin^2\theta$$

$$R_{ij} \equiv 0 \quad (t \neq j)$$

由此可知,只要给出满足 $R_{11} = R_{22} = R_{33} = 0$ 的 $A(r)$、$B(r)$ 函数,就得到解.

由以上(a、b)两式

$$\frac{R_{11}}{A} + \frac{R_{22}}{B} = -\frac{1}{rB}\left(\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}r}\right)$$

因 $R_{11} = R_{22} = 0$ 故应有关系

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dr}=-\frac{1}{B}\frac{dB}{dr}\Rightarrow\frac{d}{dr}(AB)=0$$

所以，

$$A(r)B(r)=c(\text{积分常数})$$

因为 $A(\infty)=B(\infty)=1$ 故可推知

$$A(r)B(r)=1\Rightarrow B(r)=\frac{1}{A(r)}$$

将这一关系代入(a、b、c)式得

$$R_{33}=-1+r\frac{dA}{dr}+A=0$$

以及

$$R_{22}=\frac{1}{2A}\frac{d^2A}{dr^2}+\frac{1}{rA}\frac{dA}{dr}=\frac{1}{2rA}\frac{dR_{33}}{dr}=0$$

故只要求解 $R_{33}=0$，也就同时得到 $R_{22}=0$ 的解. 由 $R_{33}=0$ 得

$$r\frac{dA}{dr}+A=1\Leftrightarrow\frac{d}{dr}(rA)=1$$

即

$$rA=r+h\quad(h\text{— 积分常数})$$

或

$$A=1+\frac{h}{r}\quad B=\left(1+\frac{h}{r}\right)^{-1}$$

这样便得到 K. Schwarzschild 度规(下记为 K. S 度规)[1]：

$$g=-\left(1+\frac{h}{r}\right)dt^2+\left(1+\frac{h}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

$$\boldsymbol{I}=\text{diag}\left(-\left(1+\frac{h}{r}\right),\left(1+\frac{h}{r}\right)^{-1},r^2,r^2\sin^2\theta\right)$$

可知不恒为 0 的基本 R_{itjk} 符号是

$$R_{1212}=\frac{h}{r^3}\quad R_{1313}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{h}{r}\right)\frac{h}{r}\quad R_{1414}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{h}{r}\right)\frac{h}{r}\sin^2\theta$$

---

〔1〕 以上关于 K. S 度规的构造解法，引自《广义相对论导论》，唐肇华等编著，广西师范大学出版社，1997 年，第 109～113 页. 但符号与下标排列有所改动.

$$R_{2323}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{h}{r}\right)^{-1}\frac{h}{r}\quad R_{2424}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{h}{r}\right)^{-1}\frac{h}{r}\sin^2\theta\quad R_{3434}=-hr\sin^2\theta$$

利用以上示例,可以说明几何解与解析解的不同性质之处.由 K.S 度规的非 0 的基本 R_{itjk} 符号即知,不可能存在 R^5(或 C^5)上的一个曲面函数(三阶可微),

$$z=f(\boldsymbol{x})\quad \boldsymbol{x}\in R^4(\text{或 } \boldsymbol{x}\in C^4)$$

并且因其一般函数

$$F(\boldsymbol{x},\ z)=z-f(\boldsymbol{x})=0$$

的梯度向量 $\nabla F^{\mathrm{T}}\nabla F=1+\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f\neq 0$,即 $F(\boldsymbol{x},\ z)=0$ 决定的曲面是可定向的,同时,K.S 度规的二次型矩阵$\boldsymbol{I}$可以由此曲面的第一基本二次型矩阵所构造出来.

这是因为由于 $F(\boldsymbol{x},\ z)=0$ 可定向,从而其单位法向量就存在,且可微.因而这一曲面函数就可以构造出$\boldsymbol{II}$矩阵、D 矩阵.则由以上的分析,具有$\boldsymbol{II}$矩阵的曲面函数,若其$\boldsymbol{I}$矩阵给出了真空 Einstein 方程的度规,则必要条件是 $|\boldsymbol{II}|=0$.所以,可知,必定要有$\boldsymbol{II}$矩阵的 2 阶伴随矩阵 $|\boldsymbol{II}_2|=0$.由(4.3.1.60)式和上例中 K.S 度规决定的非 0 的基本 R_{itjk} 符号的情形即知,K.S 度规对应的 $|\boldsymbol{II}_2|\neq 0$.

这即是说不可能有一个几何解与 K.S 度规相容.由此即知,每一个几何解都可以看成是一个解析解,但反之未必.真空 Einstein 方程的所有几何解(集合)显然只是其解的全体(集合)的真子集合.

再给出一个解析解的示例

例 4.3.2.4 Robinson - Trautman 度规[1]

$$g=\frac{r^2}{x^3}\mathrm{d}x^2+\frac{r^2}{x^3}\mathrm{d}y^2+3x\mathrm{d}u^2+2\sqrt{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}r$$

记 $\boldsymbol{u}=(x,\ y,\ u,\ r)^{\mathrm{T}}$,这一度规的 Christoffel 符号是

$$\boldsymbol{\Gamma}_{11}=\begin{bmatrix}-\dfrac{3}{2}x^{-1}\\ 0\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}rx^{-3}\\ \dfrac{3}{2}rx^{-2}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{\Gamma}_{12}=\boldsymbol{\Gamma}_{21}=\begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{3}{2}x^{-1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{\Gamma}_{13}=\boldsymbol{\Gamma}_{31}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\end{bmatrix}$$

[1] 引自《简明微分几何》,马力编著,清华大学出版社,2004 年,第 145 页.这里有一些改动.

$$\boldsymbol{\Gamma}_{14}=\boldsymbol{\Gamma}_{41}=\begin{bmatrix} r^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Gamma}_{24}=\boldsymbol{\Gamma}_{42}=\begin{bmatrix} 0 \\ r^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Gamma}_{22}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2}x^{-1} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}rx^{-3} \\ \frac{3}{2}rx^{-2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{33}=\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}r^{-2}x^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其余的 $\boldsymbol{\Gamma}_{ij}=\mathbf{0}$.

这一度规可以产生的$\mathbb{I}_2$矩阵是

$$\mathbb{I}_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{4}rx^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{4}x^{-1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}r^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{2}}{4}rx^{-3} & 0 & 0 & \frac{9}{4}x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}r^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

现在有 $|\mathbb{I}_2|=0$. 但易知$\mathbb{I}_2$矩阵的特征值中,0 只是其 2 重根. 由 2 阶伴随矩阵特征值的性质知,也不可能有 R^5(或 C^5)上的曲面函数 $z=f(\boldsymbol{x})$,且 $f(\boldsymbol{x})$所构造的$\boldsymbol{I}$ 矩阵就是此度规的二次型矩阵. 因为由 R^5 上的曲面函数所构造的$\boldsymbol{I}$矩阵,若这一曲面函数的$\boldsymbol{I}$矩阵能够构造出真空 Einstein 方程的解,0 必是$\mathbb{I}_2$矩阵的(至少)5 重特征根.

由上可见,可将几何解看成是 R^m(或 C^m)空间上的函数图像曲面上的解,而将解析解看成是(可能存在于非标准内积空间上的)抽象曲面上的解. 但后一点尚要求有更具体的论证. 即应当给出在(非标准)内积空间上的抽象曲面上的第一、二基本微分形式及局部标架系方程组、可积性条件方程组,从而,使 R_{itjk} 符号仍具有可构造出 Gauss 曲率的意义.

利用 § 2.3.1 节中已分析过的 R^m 空间上的 n 维曲面(线) $(n<m-1)$ 的概念,还可以对上述的真空 Einstein 方程几何解的曲面给予一些更深入的分析.

仍利用以上的示例，对于幂零解给出的曲面，构造其对应的实曲面参数函数.

续例 4.3.2.1 将例 4.3.2.1 中的 $f(\boldsymbol{x})$ 函数的 x_i，$i=1, 2, 3, 4$ 变元看成为实变元，从而 $f(\boldsymbol{x})$ 是复函数，并将其表示成 R^6 空间上的 4 维曲面参数函数

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}):\begin{cases}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}\in R^4\\ z_a=f_a(\boldsymbol{u}) & f_a(\boldsymbol{u})=\cos(\sqrt{3}au_1)\cdot e^{a(u_2+u_3+u_4)}\\ z_b=f_b(\boldsymbol{u}) & f_b(\boldsymbol{u})=\sin(\sqrt{3}au_1)\cdot e^{a(u_2+u_3+u_4)}\end{cases}$$

其中 $f_a(\boldsymbol{u})$、$f_b(\boldsymbol{u})$ 分别是例 4.3.2.1 中的复函数的实部、虚部函数. 并记 $\mathbf{z}=(z_a, z_b)^{\mathrm{T}}$. 对这里的 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})\in R^6$ 可按一般的实函数方法构造 $\boldsymbol{I}$、$\boldsymbol{I\!I}$ 矩阵，直接写出结果

$$\boldsymbol{I}=I_4+\begin{bmatrix}3&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}a^2\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}\qquad|\boldsymbol{I}|=(1+3a^2\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z})^2$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{u}}=\begin{bmatrix}I_4\\ \nabla f_a^{\mathrm{T}}\\ \nabla f_b^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$ 由 $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{u}}$ 的列向量组的多重矢量积方法可得到其单位法向量

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{t})=\begin{bmatrix}\sqrt{3}at_2\\ -at_1\\ -at_1\\ -at_1\\ \dfrac{z_at_1+z_bt_2}{\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}}\\ \dfrac{z_bt_1-z_at_2}{\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}}\end{bmatrix}\cdot\left(\frac{\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}}{1+3a^2\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}}\right)^{1/2}\quad(\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}>0)$$

其中 $\boldsymbol{t}=(t_1, t_2)^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}=1$. 由此可得

$$\boldsymbol{I\!I}=\begin{bmatrix}-3t_1&-\sqrt{3}t_2&-\sqrt{3}t_2&-\sqrt{3}t_2\\-\sqrt{3}t_2&t_1&t_1&t_1\\-\sqrt{3}t_2&t_1&t_1&t_1\\-\sqrt{3}t_2&t_1&t_1&t_1\end{bmatrix}\cdot\left(\frac{\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}}{1+3a^2\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}}\right)^{1/2}$$

且由

$$I^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1+2a^2\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} & -a^2\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} & -a^2\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\\ 0 & -a^2\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} & 1+2a^2\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} & -a^2\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\\ 0 & -a^2\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} & -a^2\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} & 1+2a^2\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{1+3a^2\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}}$$

得

$$W=\frac{\mathit{II}}{1+3a^2\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}}$$

W 是 Weingarten 映射矩阵.

记

$$h=\frac{(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z})^{1/2}}{(1+3a^2\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z})^{3/2}}$$

则 W 矩阵的特征值是

$$\lambda_1=-3h \quad \lambda_2=\lambda_3=0 \quad \lambda_4=3h$$

所以,例 4.3.1.2 的复函数对应的实曲面是 R^6 空间上一个 4 维曲面. 这一实曲面是一个极小曲面,且是一个法向迷向的曲面. 它具有 2 个线性方向线夹成的 2 维平面,并且还具有另一个渐近方向.

可以注意到复函数曲面与它所对应的实曲面之间存在有一定的关联性质. 比如例 4.3.2.1 中的复函数决定的 W 映射矩阵,不再是自伴映射矩阵(参见引理 4.3.1.2). 故,4 阶的 W 映射矩阵的特征根全为 0,即是说 0 是 W 映射矩阵(即 $-D$ 矩阵)的代数 4 重特征根,但由于 W 映射矩阵的秩为 1,故代数 4 重特征根所能决定的特征向量只能有 3 个. 从而,0 特征根的几何重数仅为 3. 或者说,复函数曲面只有 3 个线性方向(且均为实方向). 这 3 个线性方向在数目上刚好与其对应的实曲面所具有的 3 个线性方向(2 个线性方向线决定的方向、1 个渐近方向线决定的方向)相符合. 其他如极小曲面的性质也都是相一致的. 更一般的分析则可见下一节内容.

续例 4.3.2.2 将例 4.3.2.2 中的 $f(\boldsymbol{x})$ 函数似以上的方式也表示成 R^6 空间中的以下参数曲面函数

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}):\begin{cases}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}\in R^4\\ w_a=f_a(\boldsymbol{u}) & f_a(\boldsymbol{u})=\dfrac{1}{2}\ln(u_1^2+u_2^2)+\dfrac{1}{2}\ln(u_3^2+u_4^2)\\ w_b=f_b(\boldsymbol{u}) & f_b(\boldsymbol{u})=\operatorname{arctg}\dfrac{u_1}{u_2}+\operatorname{arctg}\dfrac{u_3}{u_4}\end{cases}$$

记 $a=u_1^2+u_2^2 \quad b=u_3^2+u_4^2 \quad a,b>0$

类似地,可得到这一 R^6 上的 4 维曲面,有矩阵

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1+\frac{1}{a} & 0 & \frac{y_1}{ab} & \frac{y_2}{ab}\\ 0 & 1+\frac{1}{a} & -\frac{y_2}{ab} & \frac{y_1}{ab}\\ \frac{y_1}{ab} & -\frac{y_2}{ab} & 1+\frac{1}{b} & 0\\ \frac{y_2}{ab} & \frac{y_1}{ab} & 0 & 1+\frac{1}{b}\end{bmatrix}\qquad |\boldsymbol{I}|=\left(\frac{a+ab+b}{ab}\right)^2$$

其中 $y_1=u_1u_3+u_2u_4\quad y_2=u_1u_4-u_2u_3$

$$\boldsymbol{I}^{-1}=\begin{bmatrix}1+\frac{1}{b} & 0 & -\frac{y_1}{ab} & -\frac{y_2}{ab}\\ 0 & 1+\frac{1}{b} & \frac{y_2}{ab} & -\frac{y_1}{ab}\\ -\frac{y_1}{ab} & \frac{y_2}{ab} & 1+\frac{1}{a} & 0\\ -\frac{y_2}{ab} & -\frac{y_1}{ab} & 0 & 1+\frac{1}{a}\end{bmatrix}\Big/|\boldsymbol{I}|^{\frac{1}{2}}$$

以及单位法向量

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{t})=\begin{bmatrix}-t_2\\ t_1\\ \frac{-y_2t_1+y_1t_2}{b}\\ \frac{y_1t_1-y_2t_2}{b}\\ -u_2t_1+u_1t_2\\ u_1t_1+u_2t_2\end{bmatrix}\cdot h$$

其中

$$h=\left(\frac{b}{a+ab+b}\right)^{1/2}\qquad t_1^2+t_2^2=1$$

和矩阵

$$\boldsymbol{I\!I}=\begin{bmatrix}-\frac{p_1}{a} & \frac{p_2}{a} & 0 & 0\\ \frac{p_2}{a} & \frac{p_1}{a} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{c}{b^2} & \frac{d}{b^2}\\ 0 & 0 & \frac{d}{b^2} & \frac{c}{b^2}\end{bmatrix}\cdot h\qquad |\boldsymbol{I\!I}|=\frac{1}{(a+ab+b)^2}$$

其中

$$p_1 = u_2 t_1 + u_1 t_2 \quad p_2 = u_1 t_1 - u_2 t_2$$

$$c = (u_3^2 - u_4^2)(-u_2 t_1 + u_1 t_2) + 2u_3 u_4 (u_1 t_1 + u_2 t_2)$$

$$d = -2u_3 u_4 (-u_2 t_1 + u_1 t_2) + (u_3^2 - u_4^2)(u_1 t_1 + u_2 t_2)$$

有

$$W = \begin{bmatrix} -\frac{p_1}{a}\left(1+\frac{1}{b}\right) & \frac{p_2}{a}\left(1+\frac{1}{b}\right) & \frac{p_1 y_1 + p_2 y_2}{a^2 b} & \frac{-p_2 y_1 + p_1 y_2}{a^2 b} \\ \frac{p_2}{a}\left(1+\frac{1}{b}\right) & \frac{p_1}{a}\left(1+\frac{1}{b}\right) & \frac{-p_2 y_1 + p_1 y_2}{a^2 b} & -\frac{p_1 y_1 + p_2 y_2}{a^2 b} \\ \frac{c y_1 - d y_2}{a b^3} & -\frac{d y_1 + c y_2}{a b^3} & -\frac{c}{b^2}\left(1+\frac{1}{a}\right) & \frac{d}{b^2}\left(1+\frac{1}{a}\right) \\ -\frac{d y_1 + c y_2}{a b^3} & -\frac{c y_1 + d y_2}{a b^3} & \frac{d}{b^2}\left(1+\frac{1}{a}\right) & \frac{c}{b^2}\left(1+\frac{1}{a}\right) \end{bmatrix} \cdot \frac{h}{|I|^{1/2}}$$

$$|W| = \frac{a^2 b^2}{(a + ab + b)^4}$$

可注意到Ⅱ、W 矩阵的行列式与 t_1、t_2 无关，tr$W=0$，W 矩阵的特征多项式是

$$\lambda^4 + A(\boldsymbol{u}) \cdot \lambda^2 + |W| = 0$$

其中 $A(\boldsymbol{u})$是只与 $\boldsymbol{u}$ 有关而与 t_1、t_2 无关的因子. 故可知这一实曲面与续例 4.3.2.2 中的实曲面具有某些相似的几何性质，即它也是极小曲面，也是法向迷向的曲面. 这一曲面每一点上有 4 个主法曲率(非恒为 0)，有 2 个渐近方向. 可予以比较的是，在例 4.3.2.2 中的复曲面上，W 矩阵的 0 特征值的几何重数也是 2，即它也只有 2 个线性方向.

§4.4 真空 Einstein 方程复幂零解曲面对应实曲面的性质

由定理 4.3.1.6 条件决定的 C^m 上的解析函数

$$w = f(\boldsymbol{z}) \quad \boldsymbol{z} \in D_z \subset C^m \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^m$$

是真空 Einstein 方程的复幂零解曲面. 由

$$f(\boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + ih(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

作 $f(\boldsymbol{z})$在 R^{2m}空间上对应的实曲面，

$$r(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}):\begin{cases}x=u\\ y=v\\ z_g=g(u,\ v)\\ z_h=h(u,\ v)\end{cases}\quad u、v\in R^m \qquad —(4.4.1)$$

则 $r(u,\ v)$ 是 R^{2m+2} 空间上的一个 $2m$ 维参数曲面.

由 $f(z)$ 的解析性质以及以上变换关系的可逆性质，(4.4.1)式决定的 $r(u,\ v)$ 总是正则的.

这样的参数变换使得可以在实 Euclid 空间上看到真空 Einstein 方程的复幂零解的属性. 类似这样的方法，在本书上一节中已使用过.

由以上的分析已知道，真空 Einstein 方程幂零解曲面一定是极小曲面. 现再利用上面的规定，可以得到(4.4.1)式决定的实正则参数曲面的性质，即得到以下定理.

定理 4.4.1 设 $f(z)$ 是满足定理 4.3.1.6 条件的解析函数，若 $f(z)$ 还满足

$$\nabla_z f^{\mathrm{T}}(z)\,\nabla_z f(z)=0$$

则 $f(z)$ 对应的由(4.4.1)式决定的实参数曲面，一定是 R^{2m+2} 空间上的($2m$ 维)极小曲面，并且还是法向迷向的曲面. ■

以下的全部论述均只是在证明此定理. 从(4.4.1)式可得到

$$\frac{\partial r(u,\ v)}{\partial(u,\ v)}=\begin{bmatrix}I_m & 0\\ 0 & I_m\\ \nabla_u g^{\mathrm{T}} & \nabla_v g^{\mathrm{T}}\\ \nabla_u h^{\mathrm{T}} & \nabla_v h^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \qquad —(4.4.2)$$

所以

$$I=\frac{\partial r(u,\ v)^{\mathrm{T}}}{\partial(u,\ v)}\frac{\partial r(u,\ v)}{\partial(u,\ v)}=I_{2m}+\nabla g\,\nabla g^{\mathrm{T}}+\nabla h\,\nabla h^{\mathrm{T}} \qquad —(4.4.3)$$

其中

$$\nabla g=\begin{bmatrix}\nabla_u g\\ \nabla_v g\end{bmatrix}\quad \nabla h=\begin{bmatrix}\nabla_u h\\ \nabla_v h\end{bmatrix}$$

I 矩阵在形式上是秩 2 校正矩阵. 由(4.3.1.47～53)诸式以及 $\nabla_z f^{\mathrm{T}}\nabla_z f=0$ 的条件，有

$$\begin{aligned}\nabla_z f^{\mathrm{T}}\nabla_z f&=(\nabla_x g^{\mathrm{T}}+i\,\nabla_x h^{\mathrm{T}})(\nabla_x g+i\,\nabla_x h)\\&=(\nabla_x g^{\mathrm{T}}\,\nabla_x g-\nabla_x h^{\mathrm{T}}\,\nabla_x h)+i2\,\nabla_x h^{\mathrm{T}}\,\nabla_x g\\&=0\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases}\nabla_x g^{\mathrm{T}}\nabla_x g-\nabla_x h^{\mathrm{T}}\nabla_x h=0\\ \nabla_x h^{\mathrm{T}}\nabla_x g=0\end{cases}\qquad -(4.4.4)$$

由变换关系，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{v}$，直接利用(4.4.4)式可得

$$\begin{cases}\nabla_u g^{\mathrm{T}}\nabla_u g=\nabla_u h^{\mathrm{T}}\nabla_u h\\ \nabla_u h^{\mathrm{T}}\nabla_u g=0\end{cases}$$

从而由解析性，

$$\nabla_v g^{\mathrm{T}}\nabla_v h=0$$

由此即知

$$\nabla g^{\mathrm{T}}\nabla h=0\quad \nabla g^{\mathrm{T}}\nabla g=\nabla h^{\mathrm{T}}\nabla h\qquad -(4.4.5)$$

由$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\partial(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}$矩阵列向量的多重矢量积可得其法空间的基向量，表示为

$$N=\begin{bmatrix}-\nabla_u g & -\nabla_u h\\ -\nabla_v g & \nabla_v h\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad -(4.4.6)$$

有 $N^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\partial(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}=0$，且 N 是列正交矩阵.

故由多重矢量积的算法即知

$$|\boldsymbol{I}|=(1+\nabla g^{\mathrm{T}}\nabla g)(1+\nabla h^{\mathrm{T}}\nabla h)=(1+\nabla g^{\mathrm{T}}\nabla g)^2$$

并由此可验证

$$\boldsymbol{I}^{-1}=\frac{|\boldsymbol{I}|\cdot I_{2m}+\boldsymbol{I}-\boldsymbol{I}^2}{|\boldsymbol{I}|}=I_{2m}+\frac{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{I}^2}{|\boldsymbol{I}|}\qquad -(4.4.7)$$

其中

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{I}^2=-(1+\nabla g^{\mathrm{T}}\nabla g)(\nabla g\,\nabla g^{\mathrm{T}}+\nabla h\,\nabla h^{\mathrm{T}})\qquad -(4.4.8)$$

任取不同时为 0 的 t_1，$t_2\in R$，构造 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$的法方向 $\boldsymbol{N}$

$$\boldsymbol{N}=N\boldsymbol{t}\qquad \boldsymbol{t}=(t_1,t_2)^{\mathrm{T}}\qquad -(4.4.9)$$

进一步，可取

$$\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}N\boldsymbol{t}=1$$

可得

$$t^{T} N^{T} N t = (1 + \nabla g^{T} \nabla g)(t_1^2 + t_2^2) = 1$$

所以 $r(u, v)$ 的单位法向量 $n(t)$ 可取 $s_{1,2} = \dfrac{t_{1,2}}{(t_1^2 + t_2^2)^{1/2}}$，并有

$$n(t) = \frac{Nt}{(t^{T} N^{T} N t)^{1/2}} = \frac{Ns}{(1 + \nabla g^{T} \nabla g)^{1/2}} = n(s) \quad s = (s_1, s_2)^{T} \quad s^{T} s = 1 \tag{4.4.10}$$

即有

$$\frac{\partial n(s)}{\partial (u, v)} = \frac{1}{(1 + \nabla g^{T} \nabla g)^{1/2}} \left[\begin{bmatrix} -\nabla_{uu}^2 g, & -\nabla_{uu}^2 h \\ -\nabla_{uv}^2 g, & -\nabla_{uv}^2 h \\ & 0 \end{bmatrix} s, \begin{bmatrix} -\nabla_{vu}^2 g, & -\nabla_{vu}^2 h \\ -\nabla_{vv}^2 g, & -\nabla_{vv}^2 h \\ & 0 \end{bmatrix} s \right] - $$
$$- \frac{n(s)}{1 + \nabla g^{T} \nabla g} \frac{\partial (\nabla g^{T} \nabla g)}{\partial (u, v)} \tag{4.4.11}$$

所以

$$\mathit{II} = -\frac{\partial r(u, v)^{T}}{\partial (u, v)} \frac{\partial n(s)}{\partial (u, v)} = \frac{1}{(1 + \nabla g^{T} \nabla g)^{1/2}} (\nabla^2 g \cdot s_1 + \nabla^2 h \cdot s_2) \tag{4.4.12}$$

其中

$$\nabla^2 g = \begin{bmatrix} \nabla_{uu}^2 g & \nabla_{uv}^2 g \\ \nabla_{vu}^2 g & \nabla_{vv}^2 g \end{bmatrix}$$

$\nabla^2 h$ 类似.

由(4.4.7～12)式，得

$$W = \mathit{II}\, I^{-1} = \mathit{II} + \frac{1}{|I|} \mathit{II} (I - I^2) \tag{4.4.13}$$

由(4.4.13)式可知 $r(u, v)$ 为极小曲面. 事实上，由于 g、h 均是调和函数，故

$$\mathrm{tr}\, \mathit{II} = s_1 \cdot \mathrm{tr}\, \nabla^2 g + s_2 \cdot \mathrm{tr}\, \nabla^2 h$$

而由(4.3.1.53)式，得

$$\mathrm{tr}\, \nabla^2 g = \mathrm{tr}(\nabla_{uu}^2 g + \nabla_{vv}^2 g) = 0$$

同理知 $\mathrm{tr}\, \nabla^2 h = 0$ 故

$$\mathrm{tr}\, \mathit{II} = 0$$

再考虑乘积

$$\mathit{II} (I - I^2) = (1 + \nabla g^{T} \nabla g)[(\nabla^2 g \nabla g \nabla g^{T} + \nabla^2 g \nabla h \nabla h^{T}) \cdot s_1 +$$

$$+(\nabla^2 h\ \nabla g\ \nabla g^{\mathrm{T}} + \nabla^2 h\ \nabla h\ \nabla h^{\mathrm{T}})\cdot s_2] \qquad \text{—(4.4.13a)}$$

其中

$$\nabla^2 g\ \nabla g = \begin{bmatrix} \nabla^2_{uu} g\ \nabla_u g + \nabla^2_{uv} g\ \nabla_v g \\ \nabla^2_{vu} g\ \nabla_u g + \nabla^2_{vv} g\ \nabla_v g \end{bmatrix}$$

另由

$$\begin{aligned} \nabla_{zz} f\ \nabla_z f &= (\nabla^2_{xx} g + i\,\nabla^2_{xx} h)(\nabla_x g + i\,\nabla_x h) \\ &= (\nabla^2_{xx} g\ \nabla_x g - \nabla^2_{xx} h\ \nabla_x h) + i(\nabla^2_{xx} h\ \nabla_x g + \nabla^2_{xx} g\ \nabla_x h) \\ &= 0 \end{aligned}$$

可得

$$\begin{cases} \nabla^2_{xx} g\ \nabla_x g = \nabla^2_{xx} h\ \nabla_x h \\ \nabla^2_{xx} h\ \nabla_x g = -\nabla^2_{xx} g\ \nabla_x h \end{cases} \qquad \text{—(4.4.14)}$$

从(4.3.1.52)和(4.4.14)式第1式中可得

$$\nabla^2_{uu} g\ \nabla_u g = \nabla^2_{uv} g\ \nabla_v g$$

从(4.3.1.51)和(4.4.14)第2式中可得

$$\nabla_{vu} g\ \nabla_u g = \nabla_{vv} g\ \nabla_v g$$

故

$$\nabla^2 g\ \nabla g = 2\begin{bmatrix} \nabla_{uu} g\ \nabla_u g \\ \nabla_{vv} g\ \nabla_v g \end{bmatrix} \qquad \text{—(4.4.15)}$$

类似地，由

$$\nabla^2 g\ \nabla h = \begin{bmatrix} \nabla^2_{uu} g\ \nabla_u h + \nabla^2_{uv} g\ \nabla_v h \\ \nabla^2_{vu} g\ \nabla_u h + \nabla^2_{vv} g\ \nabla_v h \end{bmatrix}$$

中可得

$$\nabla^2 g\ \nabla h = 2\begin{bmatrix} \nabla^2_{uu} g\ \nabla_u h \\ \nabla^2_{vv} g\ \nabla_v h \end{bmatrix} \qquad \text{—(4.4.16)}$$

所以

$$\nabla^2 g\ \nabla g\ \nabla g^{\mathrm{T}} = 2\begin{bmatrix} \nabla^2_{uu} g\ \nabla_u g\ \nabla g_u^{\mathrm{T}} & \nabla^2_{uu} g\ \nabla_u g\ \nabla_v g^{\mathrm{T}} \\ \nabla^2_{vv} g\ \nabla_v g\ \nabla g_u^{\mathrm{T}} & \nabla^2_{vv} g\ \nabla_v g\ \nabla_v g^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 g\ \nabla h\ \nabla h^{\mathrm{T}} = 2\begin{bmatrix} \nabla^2_{uu} g\ \nabla_u h\ \nabla_u h^{\mathrm{T}} & \nabla^2_{uu} g\ \nabla_u h\ \nabla_v h^{\mathrm{T}} \\ \nabla^2_{vv} g\ \nabla_v h\ \nabla_u h^{\mathrm{T}} & \nabla^2_{vv} g\ \nabla_v h\ \nabla_v h^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

由以上两式，即知

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}(\nabla^2 g\,\nabla g\,\nabla g^{\mathrm T}+\nabla^2 g\,\nabla h\,\nabla h^{\mathrm T})\\
&=2\operatorname{tr}(\nabla_{uu}^2 g\,\nabla_u g\,\nabla_u g^{\mathrm T}+\nabla_{vv}^2 g\,\nabla_v g\,\nabla_v g^{\mathrm T}+\nabla_{uu}^2 g\,\nabla_u h\,\nabla_u h^{\mathrm T}+\nabla_{vv}^2 g\,\nabla_v h\,\nabla_v h^{\mathrm T})\\
&=2\operatorname{tr}(\nabla_{uu}^2 g(\nabla_u g\,\nabla_u g^{\mathrm T}+\nabla_u h\,\nabla_u h^{\mathrm T})+\nabla_{vv}^2 g(\nabla_v g\,\nabla_v g^{\mathrm T}+\nabla_v h\,\nabla_v h^{\mathrm T}))
\end{aligned}$$

仍由解析性

$$\nabla_u g\,\nabla_u g^{\mathrm T}+\nabla_u h\,\nabla_u h^{\mathrm T}=\nabla_v g\,\nabla_v g^{\mathrm T}+\nabla_v h\,\nabla_v h^{\mathrm T}$$

故

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\nabla^2 g\,\nabla g\,\nabla g^{\mathrm T}+\nabla^2 g\,\nabla h\,\nabla h^{\mathrm T})&=2\operatorname{tr}((\nabla_{uu}^2 g+\nabla_{vv}^2 g)(\nabla_u g\,\nabla_u g^{\mathrm T}+\nabla_u h\,\nabla_u h^{\mathrm T}))\\
&=0
\end{aligned}$$

同理可证

$$\operatorname{tr}(\nabla^2 h\,\nabla g\,\nabla g^{\mathrm T}+\nabla^2 h\,\nabla h\,\nabla h^{\mathrm T})=0$$

由此易知(4.4.13a)式得

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{I\!I}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{I}^2)=0$$

由(4.4.13)式即知与 $s_{1,2}$ 的取值无关，总有

$$\operatorname{tr}W=0$$

所以，$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$是 R^{2m+2} 空间上的极小曲面.

再考虑乘积

$$(\nabla^2 g\cdot s_1+\nabla^2 h\cdot s_2)^2=(\nabla^2 g)^2 s_1^2+(\nabla^2 h\,\nabla^2 g+\nabla^2 g\,\nabla^2 h)s_1 s_2+(\nabla^2 h)^2 s_2^2$$

其中，记

$$\nabla^2 h\,\nabla^2 g+\nabla^2 g\,\nabla^2 h=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}$$

$$A_{11}=\nabla_{uu}^2 g\,\nabla_{uu}^2 h+\nabla_{vu}^2 g\,\nabla_{uv}^2 h+\nabla_{uu}^2 h\,\nabla_{uu}^2 g+\nabla_{vu}^2 h\,\nabla_{uv}^2 g$$

且因为有

$$\begin{aligned}
(\nabla_{zz}^2 f)^2&=(\nabla_{xx}^2 g+i\nabla_{xx}^2 h)^2=(\nabla_{xx}^2 g)^2-(\nabla_{xx}^2 h)^2+i(\nabla_{xx}^2 h\,\nabla_{xx}^2 g+\nabla_{xx}^2 g\,\nabla_{xx}^2 h)\\
&=[0]
\end{aligned}$$

故

$$\begin{cases}(\nabla_{xx}^2 g)^2-(\nabla_{xx}^2 h)^2=[0]\\ \nabla_{xx}^2 h\,\nabla_{xx}^2 g+\nabla_{xx}^2 g\,\nabla_{xx}^2 h=[0]\end{cases}\qquad\text{—(4.4.17)}$$

由(4.4.17)式直接得 A_{11} 中

$$\nabla_{uu}^2 g\ \nabla_{uu}^2 h + \nabla_{uu}^2 h\ \nabla_{uu}^2 g = [0]$$

再由(4.3.1.51～52)式及(4.4.17)式

$$\nabla_{vu}^2 g\ \nabla_{uv}^2 h + \nabla_{vu}^2 h\ \nabla_{uv}^2 g = -(\nabla_{uu}^2 h\ \nabla_{uu}^2 g + \nabla_{uu}^2 g\ \nabla_{uu}^2 h) = [0]$$

所以

$$A_{11} = [0]$$

再由

$$\begin{aligned} A_{21} &= \nabla_{uv}^2 g\ \nabla_{uu}^2 h + \nabla_{vv}^2 g\ \nabla_{uv}^2 h + \nabla_{uv}^2 h\ \nabla_{uu}^2 g + \nabla_{vv}^2 h\ \nabla_{uv}^2 g \\ &= -((\nabla_{uu}^2 h)^2 + (\nabla_{uu}^2 g)^2) + ((\nabla_{uu}^2 g)^2 + (\nabla_{uu}^2 h)^2) \\ &= [0] \end{aligned}$$

类似地可证 $A_{12} = A_{22} = [0] \Rightarrow \nabla^2 g\, \nabla^2 h + \nabla^2 h\, \nabla^2 g = [0]$.

再由

$$(\nabla^2 g)^2 = \begin{bmatrix} (\nabla_{uu}^2 g)^2 + \nabla_{vu}^2 g\ \nabla_{uv}^2 g & \nabla_{uu}^2 g\ \nabla_{vu}^2 g + \nabla_{vu}^2 g\ \nabla_{vv}^2 g \\ \nabla_{uv}^2 g\ \nabla_{uu}^2 g + \nabla_{vv}^2 g\ \nabla_{uv}^2 g & \nabla_{uv}^2 g\ \nabla_{vu}^2 g + (\nabla_{vv}^2 g)^2 \end{bmatrix}$$

$(\nabla^2 h)^2$ 类似.

比较$(\nabla^2 g)^2$、$(\nabla^2 h)^2$ 的对应项,如

$$(\nabla_{uu}^2 g)^2 + \nabla_{vu}^2 g\ \nabla_{uv}^2 g = \nabla_{uv}^2 h\ \nabla_{vu}^2 h + (\nabla_{uu} h)^2$$

$$\begin{aligned} \nabla_{uv}^2 g\ \nabla_{uu}^2 g + \nabla_{vv}^2 g\ \nabla_{uv}^2 g &= -\nabla_{uu}^2 h\ \nabla_{uu}^2 g + \nabla_{uu}^2 g\ \nabla_{uu}^2 h \\ &= \nabla_{uu}^2 g\ \nabla_{uu}^2 h - \nabla_{uu}^2 h\ \nabla_{uu}^2 g \\ &= \nabla_{uv}^2 h\ \nabla_{uu}^2 h + \nabla_{vv}^2 h\ \nabla_{uv}^2 h \end{aligned}$$

其他两对应项亦可类似地验证,故知

$$(\nabla^2 g)^2 = (\nabla^2 h)^2$$

这样,便有

$$(\nabla^2 g \cdot s_1 + \nabla^2 h \cdot s_2)^2 = (\nabla^2 g)^2 \cdot (s_1^2 + s_2^2) = (\nabla^2 g)^2$$

所以

$$I\!I^2 = \frac{1}{1 + \nabla g^{\mathrm{T}}\, \nabla g}(\nabla^2 g \cdot s_1 + \nabla^2 h \cdot s_2)^2 = \frac{(\nabla^2 g)^2}{1 + \nabla g^{\mathrm{T}}\, \nabla g} \qquad —(4.4.18)$$

此便表明$|I\!I|$的绝对值是

$$||\mathbb{II}|| = (|\mathbb{II}^2|)^{1/2} = \frac{\sqrt{(|\nabla^2 g|)^2}}{(1+\nabla g^{\mathrm{T}}\nabla g)^{1/2}} \qquad -(4.4.19)$$

故$|\mathbb{II}|$与s_1、s_2无关.

所以,$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$曲面在任取的$s_1$、$s_2$下的Gauss曲率是

$$\kappa = \frac{|\mathbb{II}|}{|\mathbb{I}|}$$

也与s_1、s_2的取法无关.

由此即知$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$是法向迷向曲面.

即证定理4.4.1.

在R^m空间上的一个n维曲面$1 \leqslant n < m-1$是法向迷向的曲面,一个最简单的例子就是R^3空间上的直线.如图4.4.1,l是R^3空间中的直线,L_π是过直线l上的a点的法空间平面,r是以a为圆心的L_π上的单位圆,A、B是r上任意的两个不同点.则任取l在a点的单位法向量是

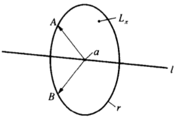


图 4.4.1

$$\overrightarrow{aA} \text{ 或 } \overrightarrow{aB}$$

直线l在a点处的法曲率均是0.故直线l就是R^3空间中法向迷向曲面的一个直观模型.

例 4.4.1 在C^3复空间上的曲面

$$w = f(\boldsymbol{z}) = z_1^2 - z_2^2 + i2z_1z_2 \qquad z_{1,2} \quad w \in C$$

有
$$f(\boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + ih(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$
$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_1^2 - x_2^2 - y_1^2 + y_2^2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1$$
$$h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 2(x_1y_1 - x_2y_2 + x_1x_2 - y_1y_2)$$

易验证$f(\boldsymbol{z})$是解析函数,且

$$\nabla_z f(\boldsymbol{z}) = 2\begin{bmatrix} z_1 + iz_2 \\ -z_2 + iz_1 \end{bmatrix} \quad \nabla_{zz}^2 f(\boldsymbol{z}) = 2\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$$

有
$$(\nabla_{zz}^2 f)^2 = [0] \quad \nabla_z f^{\mathrm{T}} \nabla_z f = 0$$

所以,$f(\boldsymbol{z})$是满足定理4.4.1条件的解析函数.

$f(\boldsymbol{z})$在R^4空间上的实参数曲面是

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) = \begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in R^2 \\ z_g = g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \\ z_h = h(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) \end{cases}$$

对于 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})$曲面，以

$$x_1 = 1 \quad y_1 = 1.5 \quad x_2 = 2 \quad y_2 = 1$$

为例，有

$$\nabla g = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla h = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

由(4.4.2)式，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})}{\partial(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

由(4.4.6)式

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \\ 7 & 0 \\ 0 & 7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

得

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & -49 \\ 0 & 50 & 49 & 0 \\ 0 & 49 & 50 & 0 \\ -49 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{I}^{-1} = \frac{1}{9801}\begin{bmatrix} 4950 & 0 & 0 & 4851 \\ 0 & 4950 & -4851 & 0 \\ 0 & -4851 & 4950 & 0 \\ 4851 & 0 & 0 & 4950 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 g = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \nabla^2 h = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

可以验证 $(\nabla^2 g)^2 = (\nabla^2 h)^2$.

并易验证 W 映射矩阵的特征多项式是

$$\lambda^2(\lambda^2 - a^2) = 0 \quad (a > 0)$$

其中 a 与 s_1、s_2 无关.

这即是定理 4.4.1 的结论.

§4.5 极小曲面(续)

由关于真空 Einstein 方程的幂零解的分析已知,能够构造出满足 Ricci 曲率张量 $R_{ij} = 0 \quad \forall\, i, j$ 的曲面,一定是极小曲面.所以极小曲面与真空 Einstein 方程的解有密切的关系.由于真空 Einstein 方程由 Ricci 曲率张量为 0 来表示,故极小曲面应当与 Ricci 曲率有密切的关系.

在§3.1.3 中已分析了一般 R^m 空间上旋转曲面为极小曲面的条件.那里的极小曲面的充要条件,其一般形式,是由 Monge 形式的曲面函数的拟特征多项式(次)首项 μ^{m-2} 前系数为 0 的形式给出的(见(3.1.3.1)式).对于 R^m 空间上的一般形式的曲面函数来说,由定义 3.1.1.3,直接得到 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ 决定的曲面是极小曲面的充要条件是

$$\sum_{\substack{(i,j)\\ i<j}} \begin{vmatrix} f_{ii} & f_{ij} & f_i \\ f_{ji} & f_{jj} & f_j \\ f_i & f_j & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant m \qquad —(4.5.1)$$

将(4.5.1)式左边的项作展开,有

$$\sum_{\substack{(i,j)\\ i<j}} (2f_i f_j f_{ij} - f_i^2 f_{jj} - f_j^2 f_{ii}) = \sum_{\substack{(i,j)\\ i<j}} 2f_i f_j f_{ij} - \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{m} f_k^2\Big) f_{ii}$$

$$= \sum_{\substack{(i,j)\\ i<j}} 2f_i f_j f_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i^2 f_{ii} - \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{m} f_k^2\Big) f_{ii}$$

所以,(4.5.1)式又可以表示成以下形式

$$\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\,\nabla f - \nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f \cdot \mathrm{tr}\,\nabla^2 f = 0 \qquad —(4.5.2)$$

经整理,可有一般形式曲面函数 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ 决定的曲面为极小曲面的条件,

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\,\nabla^2 f\widetilde{\boldsymbol{N}} = \mathrm{tr}\,\nabla^2 f \qquad —(4.5.3)$$

$\widetilde{\boldsymbol{N}}$—单位法向量.

Monge 形式曲面函数 $z = f(\boldsymbol{x})$ 决定的曲面为极小曲面的条件

$$\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\,\nabla f = (1 + \nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f) \cdot \mathrm{tr}\,\nabla^2 f \qquad —(4.5.4)$$

利用一般的(4.5.2)式条件,可对极小曲面给予一个类的划分,

(1) $\mathrm{tr}\,\nabla^2 f = 0$

(1.1) $\nabla^2 f = [0]$

(1.2) $\nabla^2 f \neq [0]$

(1.2.1) $\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla f = c$　c— 常数　即　$\nabla^2 f\,\nabla f = \boldsymbol{0}$

(1.2.2) $\nabla^2 f\,\nabla f \neq \boldsymbol{0}$ 但$\nabla f^{\mathrm{T}}\nabla^2 f\,\nabla f = 0$

(2) $\mathrm{tr}\,\nabla^2 f \neq 0 \Rightarrow \widetilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}(\nabla^2 f - \mathrm{tr}\,\nabla^2 f \cdot I_m)\widetilde{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{0}$　且 $(\nabla^2 f - \mathrm{tr}\,\nabla^2 f \cdot I_m)\widetilde{\boldsymbol{N}} \neq \boldsymbol{0}$

这样,可知极小曲面总共有 4 种类型

(1.1):平凡解,如平面

(1.2.1):真空 Einstein 方程的解曲面[1]

(1.2.2):如正螺面 $\boldsymbol{r} = (u\cos v,\ u\sin v,\ bv)$

(2):如悬链面 $z = a \cdot \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$　$u^2 = x^2 + y^2$

注意,在以上(2)条件中,不能省略 $(\nabla^2 f - \mathrm{tr}\,\nabla^2 f \cdot I_m)\widetilde{\boldsymbol{N}} \neq \boldsymbol{0}$ 这一条件. 因为可将极小曲面表成 Monge 形式

$$z = f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in D_x \subset R^{m-1}$$

记

$$F(\boldsymbol{x},\ z) = z - f(\boldsymbol{x}) = 0$$

则

$$\nabla F = \begin{bmatrix} -\nabla f(\boldsymbol{x}) \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \nabla^2 F = \begin{bmatrix} -\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

[1] 这是指 $\boldsymbol{x} \in C^m$ 的情形. 在 $\boldsymbol{x} \in R^m$ 时,(1.2.1)类型的极小曲面是存在(或是不存在)尚需进一步论证.

若成立 $(\nabla^2 F - \mathrm{tr}\,\nabla^2 F \cdot I_m) \equiv \mathbf{0}$，则应有

$$(\nabla^2 F - \mathrm{tr}\,\nabla^2 F \cdot I_m) \cdot \nabla F = \begin{bmatrix} (\nabla^2 f - \mathrm{tr}\,\nabla^2 f \cdot I_m) \cdot \nabla f \\ \mathrm{tr}\,\nabla^2 f \end{bmatrix} \equiv \mathbf{0}$$

即知必有 $\mathrm{tr}\,\nabla^2 f = 0 \Rightarrow \mathrm{tr}\,\nabla^2 F = 0$. 从而与(2)条件矛盾.

再由极小曲面的定义，记 λ_i 是 W 映射矩阵的特征值，则平均曲率

$$h = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0 \Rightarrow (\sum_{i=1}^{m} \lambda_i)^2 = 0$$

所以，有

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 = -2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} \lambda_i \lambda_j$$

由 Ricci 曲率标量 R 的定义即知，极小曲面总有

$$R = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 = -\mathrm{tr}\boldsymbol{W}^2 \qquad —(4.5.5)$$

(4.5.5)式给出了 Ricci 曲率标量与极小曲面 W 映射矩阵的相互关系.

§5 闭凸锥的构造——线性不等式方程组的解

§5.1 引论

§5.1.1 线性不等式方程组简述

设 $A=[a_{ij}]_{n\times m}$ 是 $n\times m$ 阶实矩阵，$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{b}$ 是 m、n 维实向量，

$$A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{b} \qquad —(5.1.1.0)$$

就是不等式方程组的基本形式.

当(5.1.1.0)式中的 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 时[1]，称不等式方程组为齐次的，否则称为非齐次的.

规定用 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}$ 表示 A 的第 i 行向量，用 $\boldsymbol{a}^j$ 表示 A 的第 j 列向量. 则

$$A=[\boldsymbol{a}^1,\ \boldsymbol{a}^2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}^m]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

除非 A 是实对称矩阵，一般地，

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\neq(\boldsymbol{a}^i)^{\mathrm{T}}$$

由此，(5.1.1.0)式可写成为

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant b_i\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \qquad —(5.1.1.1)$$

共 n 个不等式组成的方程组.

---

〔1〕这里隐含 $\mathbf{0}$ 也是 m 维向量. 一般地，本书总隐含等号（或其他关系符号）两边的矩阵（向量）是具有相同行维数的，也总隐含两矩阵（或向量）在相乘、相加时，其行、列的维数都是符合运算规则的.

与每个线性等式方程组只代表它自己所表示的那一组方程不同,(5.1.1.1)式应当被理解成对每个下标 i,都有 2 个不同意义的方程(对不同的 $\boldsymbol{x}$)成立,

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i \\ \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > b_i\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant b_i \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

所以,(5.1.1.1)式其实可看成为 2^n 个方程组组成的方程.

将 1, 2, …, n 序列任意划分成 2 个不相交的子列,

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \cup \{j_1, j_2, \cdots, j_p\} = \{1, 2, \cdots, n\} \quad k + p = n$$

可写出(5.1.1.1)式中含有的下列方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_{i_t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_{i_t} & t = 1, 2, \cdots, k \\ \boldsymbol{a}_{j_s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > b_{j_s} & s = 1, 2, \cdots, p\end{cases} \qquad \text{—(5.1.1.2)}$$

如果有 $\boldsymbol{x} \in R^m$ 使(5.1.1.2)式成立,就称其为相容的,否则就称其为矛盾的.由 k 遍取 0, 1, …, n 即知(5.1.1.2)式形式的方程组共计 2^n 个.

显然,(5.1.1.1)式中所含的 2^n 个方程组中只要其中的某一个(如(5.1.1.2)式所示)是相容的,那么,(5.1.1.1)式就是有解的.换句话说,(5.1.1.1)式有解,不排除它所含的 2^n 个方程组中可能含有矛盾方程组.

当 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ 时,(5.1.1.1)式总是有解的.因为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 一定是它的(特)解.当 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ 时,(5.1.1.1)式就有解的存在性问题(见下文).

(5.1.1.2)式表示的方程组中,最重要的是

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_i > b_i \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad \text{—(5.1.1.3)}$$

方程组.以下会说明,若(5.1.1.3)式有解,则对于 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ 时,(5.1.1.1)式表示的齐次不等式组的 2^n 个方程组就都是相容的.

显然,(5.1.1.2)式中也含有等式方程组

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad \text{—(5.1.1.4)}$$

在内.故等式方程组只是不等式方程组的特例.对于 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ 的非齐次方程组(5.1.1.1)式,当(5.1.1.3 ~ 4)式都有解,则其所含的 2^n 个方程组全都是相容的.

(5.1.1.1)式含有的 2^n 个(5.1.1.2)式所表示的方程组都是矛盾的,那么,(5.1.1.1)式就没有解.

如果(5.1.1.0)式所表示的不等式方程组有解,则将其解的全体用集合 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 表示.

$$P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{x} \in R^m\}$$

所谓不等式方程组的解法，就是给出能够构造出 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 集合的算法.

显然 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 是凸的、闭的. 当有 $\boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$，对任意的 $\lambda > 0$，$\lambda\boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$，则称 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 为锥.

在(5.1.1.0)式不等式方程组中，有以下 2 个特殊类型的不等式组，

$$\begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad —(5.1.1.5)$$

这里 C 仍是 $n \times m$ 阶实矩阵. 若记

$$A = \begin{bmatrix} C \\ I_m \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

则以上不等式组仍是

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{B}$$

这一形式的. 其中 I_m 是 $m \times m$ 阶单位矩阵. 但以下会看到，任意形式的线性不等式方程组最终或者都可以归结为(5.1.1.5) 式这类形式的不等式组或者就可以直接被解出来.

约略地说，当(5.1.1.0)式中的矩阵 A 是行满秩时，(5.1.1.0)式可利用线性等式方程组现成的理论成果直接构造出解集合 P. 当 A 矩阵不是行满秩时，则(5.1.1.0)式就可以被归结为(5.1.1.5)式形式的不等式方程组. 而对于(5.1.1.5)式形式的不等式方程组，可以利用多胞形表示定理来构造出它的解集合.

把这两部分解法综合起来就可以构造出任何形式的线性不等式方程组的解集合[1].

§5.1.2 多胞形表示定理

考虑(5.1.1.0)式所表示的不等式方程组，并设其中的矩阵 A 是行满秩的. rank $A = n \leqslant m$.

由线性等式方程组有解的定理，可知，若

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad —(5.1.2.1)$$

方程组有解，则其充要条件是

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A : \boldsymbol{b}]$$

其中 $[A : \boldsymbol{b}]$ 是增广矩阵. 并且，若(5.1.2.1) 式方程组有解，则其全部解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 可表示成

---

〔1〕 与不等式方程组有关的理论背景，如不等量公理、不等式的性质等，可见于其他的文献.

$$\tilde{x} = x' + x^0 \qquad x^0 \in N(A) \qquad —(5.1.2.2)$$

其中 x' 是一个特解，$N(A)$ 是矩阵 A 的零度（空间）集合，即齐次方程组

$$Ax = 0 \qquad —(5.1.2.3)$$

的解集合.

记 $u \in R_+^n$ 表示 n 维 Euclid 空间的正象限上的任一向量，即 $u \geqslant 0$. 当 rank $A = n$ 时，将(5.1.1.0)式不等式方程组看成是以下形式的等式方程组，

$$Ax \geqslant b \Leftrightarrow Ax = b + u \geqslant b \quad u \in R_+^n \qquad —(5.1.2.4)$$

现在，显然地有

$$\text{rank}\, A = \text{rank}[A : b + u]$$

对任一 $u \in R_+^n$ 均成立. 所以对任一给定的 u

$$Ax = b + u$$

是有解的，并且其全部的解记为 $\tilde{x}(u)$ 集合，有

$$\tilde{x}(u) = \{x \mid x = x' + x^0 \quad Ax' = b + u \quad x^0 \in N(A)\} \qquad —(5.1.2.5)$$

那么，显然(5.1.1.0)式的全部的解就是

$$P(Ax \geqslant b) = \{x \mid x \in \bigcup_u \tilde{x}(u) \quad u \in R_+^n\} \qquad —(5.1.2.6)$$

再由(5.1.2.4)式，以及线性等式方程组解的迭加性质，可以将其中的特解 x' 分解为

$$x' = x'_b + x'_u \qquad —(5.1.2.7)$$

并有

$$Ax'_b = b \qquad Ax'_u = u \geqslant 0 \qquad —(5.1.2.8)$$

成立.

从(5.1.2.6)式即知，如果 $x \in P(Ax \geqslant b)$，那么，x 一定能用

$$x = x'_b + x^0 + x'_u \qquad —(5.1.2.9)$$

这样的形式构造出来. 故

$$P(Ax \geqslant b) = \{x \mid x = x'_b + x^0 + x'_u \quad Ax'_b = b \quad Ax^0 = 0 \quad Ax'_u = u \quad u \in R_+^n\} \qquad —(5.1.2.10)$$

由(5.1.2.10)式，已知 $x'_b + x^0$ 其实就是线性等式方程组(5.1.2.1)式的解. 对此人所熟知.

设 rank $A = k$，对 $A \in R^{n \times m}$，以下规定 A 的分块表示是

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}, & A_{12} \\ A_{21}, & A_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} A_1 = [A_{11}, A_{12}] \\ A_2 = [A_{21}, A_{22}] \end{matrix}$$

$A_{11} \in R^{k\times k}$ rank $A_{11} = k$, $A_{12} \in R^{k\times(m-k)}$, $A_{21} \in R^{(n-k)\times k}$, $A_{22} \in R^{(n-k)\times(m-k)}$, $A_1 \in R^{k\times m}$, $A_2 \in R^{(n-k)\times m}$.

当 $k = n \leqslant m$,自然地有

$$A = A_1 = [A_{11}, A_{12}]$$

由这样的记法,在以上讨论的 $A \in R^{n\times m}$ rank $A = n$ 情形下,记

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad —(5.1.2.11)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1}A_{12} \\ I_{(m-n)} \end{bmatrix} \qquad —(5.1.2.12)$$

以及

$$G_0 = A^+ \qquad AA^+ = I_n \qquad —(5.1.2.13)$$

其中 A^+ 是 A 的广义逆矩阵(“+”号逆). A^+ 的计算方法以下会给出.

则(5.1.2.10)式可表成,对任一 $\boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B} + \Lambda t + G_0\boldsymbol{u} \quad t \in R^{m-n} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^n \qquad —(5.1.2.14)$$

或直接表示成

$$P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{B} + \Lambda t + G_0\boldsymbol{u} \quad t \in R^{m-n} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^n\} \qquad —(5.1.2.15)$$

由于 $\boldsymbol{B}$、Λ 的存在显然. 由广义逆矩阵的有关定理,A^+ 也存在,故可得以下定理.

定理 5.1.2.1 线性不等式方程组 $A \in R^{n\times m}$ $\boldsymbol{x} \in R^m$ $\boldsymbol{b} \in R^n$

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}$$

若 rank $A = n$,一定是相容的. ■

再设(5.1.1.0)式不等式方程中的矩阵 A,有

$$\text{rank } A = r < n$$

这里隐含了可以有

$$\text{rank } A = m = r < n$$

仍将 A 及 $\boldsymbol{b}$ 作分块处理

$$A=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1\\\boldsymbol{b}_2\end{bmatrix}\quad A_1\in R^{r\times m}\quad A_2\in R^{(n-r)\times m}\quad \boldsymbol{b}_1\in R^r\quad \boldsymbol{b}_2\in R^{n-r}$$

且设 $\operatorname{rank} A_1=r$. 从而有子不等式方程组

$$A_1\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{b}_1 \qquad —(5.1.2.16)$$

(5.1.2.16)式可以构造出(5.1.2.14)式所表示的解,简化符号仍将其记为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}+\Lambda\boldsymbol{t}+G_0\boldsymbol{u}$$

将这一结果代入子不等式组

$$A_2\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{b}_2 \qquad —(5.1.2.16a)$$

即应有

$$A_2(\boldsymbol{B}+\Lambda\boldsymbol{t}+G_0\boldsymbol{u})\geqslant \boldsymbol{b}_2$$

显然有

$$A_2\Lambda=[0]$$

因此由前一式即得

$$\begin{cases}A_2\cdot G_0\boldsymbol{u}\geqslant \boldsymbol{b}_2-A_2\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{u}\geqslant \boldsymbol{0}\end{cases} \qquad —(5.1.2.17)$$

不等式方程组.

记

$$C=A_2\cdot G_0$$

$$\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{b}_2-A_2\boldsymbol{B}$$

(5.1.2.17)式就是

$$\begin{cases}C\boldsymbol{u}\geqslant \boldsymbol{b}'\\ \boldsymbol{u}\geqslant \boldsymbol{0}\end{cases} \qquad —(5.1.2.18)$$

形式的不等式方程组.

称(5.1.2.17～18)式构造出来的方程组是(5.1.1.0)式的**解约束方程组**.

但现在(5.1.2.18)式存在无解的可能. 例如以下(5.1.2.18)式形式的不等式方程组显然无解. 对任一 $\boldsymbol{a}\in R^m$, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant b\\ -\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant c\\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}\qquad (b>c\geqslant 0)$$

(5.1.2.18)式(即(5.1.1.5)式)有解的条件以下章节会予以分析,这里不再展开.

定义 5.1.2.1 设 $S \subseteq R^m$ 是凸集,$\boldsymbol{x}^0 \in S$,若 $\boldsymbol{x}^0$ 不能表示成 S 中两个不同点的严格凸组合,则称 $\boldsymbol{x}^0$ 是 S 的**极点**. ■

因此,当 $\boldsymbol{x}^0 \in S$ 是极点,则若有 $\boldsymbol{x}^1$、$\boldsymbol{x}^2 \in S$, $0 < a < 1$ 使

$$\boldsymbol{x}^0 = a \cdot \boldsymbol{x}^1 + (1-a) \cdot \boldsymbol{x}^2$$

成立,就必有 $\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}^0$.

定义 5.1.2.2 设 $S \subseteq R^m$ 是非空凸集,$\boldsymbol{d} \in R^m$, $\boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0}$,如果

$$\boldsymbol{x} + t \cdot \boldsymbol{d} \in S, \ \forall \boldsymbol{x} \in S, \ \forall t > 0$$

称 $\boldsymbol{d}$ 是 S 的一个方向. 又设 $\boldsymbol{d}^1$、$\boldsymbol{d}^2$ 是 S 的两个方向,若存在 $a > 0$,使 $\boldsymbol{d}^2 = a \cdot \boldsymbol{d}^1$,则称 $\boldsymbol{d}^1$ 和 $\boldsymbol{d}^2$ 是相同的方向. 如果 S 中的方向 $\boldsymbol{d}$ 不能表示成 S 中的两个不同方向的正线性组合,则称 $\boldsymbol{d}$ 为 S 的**极方向**. ■

定理 5.1.2.1(多胞形表示定理) 设 $P(A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 是

$$\begin{cases} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

等式—不等式方程组的解集合,且 $P(A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) \neq \varnothing$. 则 $\boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 的充要条件是,$\boldsymbol{x}$ 能由 $P(A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 中的极点 $\boldsymbol{x}^i$、极方向 $\boldsymbol{d}^j$ 以正线性组合的方式表出,即[1]

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} s_i \boldsymbol{x}^i + \sum_{j=1}^{v} v_j \boldsymbol{d}^j \quad s_i,\ v_j \geqslant 0 \quad \sum_i s_i = 1 \\ &1 \leqslant k < +\infty \quad 0 \leqslant v < +\infty \end{aligned} \qquad —(5.1.2.19)$$

■

能以(5.1.2.19)式的形式构造出来的集合称为**多胞形**.

由以上定理可知,若 $P(A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 非空,则其中至少存在 1 个极点,且只存在有限个极点、极方向.

若多胞形中不存在极方向 ($v = 0$),则称其为**多面体**. 一个多面体显然是由其全部极点的凸组合构造出来的集合. 多面体总是有界的.

推论 5.1.2.2(多面体表示定理) 若 $P(A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 是非空有界集合,$\boldsymbol{x}^i$, $i = 1, 2, \cdots, k$ 是其全部极点,则 $\boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 的充要条件是,$\boldsymbol{x}$ 能表示为 $\boldsymbol{x}^i$ 的凸组合,即

---

[1] 多胞形表示定理及本节所引述的另外一些定理、推论的证明可见于其他文献,如《非线性最优化》,谢政等编著,国防科技大学出版社,2003 年,第二章,这里不予详述.

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} s_i \boldsymbol{x}^i \quad s_i \geqslant 0 \quad \sum_i s_i = 1 \quad 1 \leqslant k < +\infty \qquad —(5.1.2.20)$$

■

可以将以上定理推广到 $P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 的集合上. 为此先引出以下推论. 对集合 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 中的极点,有以下推论存在.

推论 5.1.2.3 若 $A \in R^{n\times m}$, $\boldsymbol{x} \in R^m$, $\boldsymbol{b} \in R^n$,不等式

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}$$

有解. 记 $i = 1, 2, \cdots, n$ 中的一个子集合 $I(\boldsymbol{x})$,

$$I(\boldsymbol{x}) = \{i \mid \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = b_i \quad i = 1, 2, \cdots, n\} \qquad —(5.1.2.21')$$

作子矩阵

$$A_{I(\boldsymbol{x})} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{i_1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_{i_2}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad i_1, i_2, \cdots \in I(\boldsymbol{x})$$

并设

$$\operatorname{rank}(A) = m \leqslant n$$

则 $\boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 是一个极点,当且仅当[1]

$$\operatorname{rank}(A_{I(\boldsymbol{x})}) = m$$

■

证明: 若 $\operatorname{rank}(A_{I(\boldsymbol{x})}) = r < m$,则

$$A_{I(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

有解 $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$. 且由下标集合 $I(\boldsymbol{x})$ 的作法及 $\boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$,

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = b_i \quad 当\ i \in I(\boldsymbol{x})$$

$$\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} > b_j \quad 当\ j \notin I(\boldsymbol{x})$$

故取充分小的 $\delta > 0$,作

$$\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x} - \delta \boldsymbol{y}$$

则总可以有

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}^1 = b_i \quad 当\ i \in I(\boldsymbol{x})$$

$$\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} > b_j \quad 当\ j \notin I(\boldsymbol{x})$$

故 $\boldsymbol{x}^1 \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$,同理可知 $\boldsymbol{x}^2 \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$,但由此又有

---

〔1〕 见《全局优化引论》, R. Horst 等著,黄红选译,清华大学出版社,2003 年,第 5 页及题 1.1 解.

$$x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$$

故知 x 不是 $P(Ax \geqslant b)$ 的极点.

若 $\text{rank}(A_{I(x)}) = m$. 假设 x 不是 $P(Ax \geqslant b)$ 的极点，则存在 x^1、$x^2 \in P(Ax \geqslant b)$，$x^1 \neq x^2$，$0 < a < 1$，使得

$$x = a \cdot x^1 + (1-a) \cdot x^2$$

于是

$$a_i^{\mathrm{T}} x = a \cdot a_i^{\mathrm{T}} x^1 + (1-a) \cdot a_i^{\mathrm{T}} x^2 = b_i \quad i \in I(x)$$

已知

$$a_i^{\mathrm{T}} x^1,\ a_i^{\mathrm{T}} x^2 \geqslant b_i \quad i \in I(x)$$

故知必有

$$a_i^{\mathrm{T}} x^1 = a_i^{\mathrm{T}} x^2 = b_i \quad i \in I(x)$$

从而

$$I(x) \subset I(x^1) \cap I(x^2)$$

再由 $\text{rank}(A_{I(x)}) = m$，意味着存在 $I \subset I(x)$ 且 I 的势 $|I|$ 为 m，以及非奇异矩阵 A_I，使

$$A_I x^1 = b_I \quad A_I x^2 = b_I$$

其中 $b_I = (b_i)$，$i \in I$，所以一定有 $x^1 = x^2$，可知 x 即是极点. 即证.

这一推论意味着 $P(Ax \geqslant b)$ 的极点数不超过 $\widetilde{M}$，

$$\widetilde{M} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

个. 现已知 $P(Ax \geqslant b)$ 的极点数的上界可以更准确地表示为

$$\mu(n, m) = \begin{pmatrix} n - \left\lfloor \dfrac{m+1}{2} \right\rfloor \\ n-m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n - \left\lfloor \dfrac{m+2}{2} \right\rfloor \\ n-m \end{pmatrix}$$

其中 $\lfloor c \rfloor$ 表示小于或等于 c 的最大整数，$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ 为组合运算符号. 在有些情况下，存在极点数等于 $\mu(n, m)$ 的多胞形. 在这个意义上，$\mu(n, m)$ 是准确的上界估计值〔1〕. 由此可以附带地知道，在未解出不等式组之前，是难以预先知道 $P(Ax \geqslant b)$ 所含有的全部极点数的.

仍设 $n \geqslant m$，$A \in R^{n \times m}$，$\text{rank}\, A = m$，构造函数

---

〔1〕 McMullen，1970 年给出，见前注，第 5 页.

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} - b_i)$$

则在 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 非空时，对任一 $\boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$，

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \geqslant b_i \quad i = 1, 2, \cdots, n \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$$

故 $f(\boldsymbol{x})$ 有下界，$f(\boldsymbol{x})$ 的连续性显然，故 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 上必能取到下确界. 设 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 处取到下确界，则可知 $\operatorname{rank}(A_{I(\boldsymbol{x}^0)}) = m$ 必要成立. 否则，若 $\operatorname{rank}(A_{I(\boldsymbol{x}^0)}) = r < m$，不妨设 $I(\boldsymbol{x}^0) = \{1, 2, \cdots, r\}$，则在以下方程组

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = b_i \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

中可得到通解，

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^0 + \Lambda \boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-r}$$

Λ 是 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = 0,\ i = 1, 2, \cdots, r$ 齐次方程组的基础解系矩阵. 将此通解代入 $f(\boldsymbol{x})$，得

$$f(\tilde{\boldsymbol{x}}) = f(\boldsymbol{x}^0) + \sum_{j=1}^{m-r} \Big(\sum_{i=r+1}^{n} \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}^j \Big) t_j$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}^j$ 是 Λ 矩阵的第 j 列向量. 取 $|t_j|$ 充分小，如对充分小的 $\delta > 0$ 取

$$t_j = -\operatorname{sign}\Big(\sum_{i=r+1}^{n} \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}^j \Big) \cdot \delta$$

其中 $\operatorname{sign}(\cdot)$ 是取符号函数. 则必有

$$f(\tilde{\boldsymbol{x}}) = f(\boldsymbol{x}^0) - \sum_{j=1}^{m-r} \Big| \sum_{i=r+1}^{n} \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}^j \Big| \cdot \delta < f(\boldsymbol{x}^0)$$

且由于 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}^0 = b_i,\ i = 1, 2, \cdots, r$；$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}^0 > b_i,\ i = r+1, \cdots, n$；以及 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}^j = 0,\ i = 1, 2, \cdots, r,\ j = 1, 2, \cdots, m-r$ 的关系即知，对充分小 $\delta > 0$ 总成立 $A\tilde{\boldsymbol{x}} \geqslant \boldsymbol{b}$，故 $\tilde{\boldsymbol{x}} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$，可知 $\boldsymbol{x}^0$ 不可能是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 上的下确界(原像)，这样即知以上结论. 附带即知当 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ 时，$f(\boldsymbol{0})$ 总是 $f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 的下确界. 再由推论 5.1.2.3，可得到以下推论：

推论 5.1.2.3a 设 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 非空，$\operatorname{rank} A = m$，则 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 中至少有 1 个极点，至多有有限个极点. ■

由上即知 $f(\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 的下确界(原像)点 $\boldsymbol{x}^0$ 即为 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 的极点. 附带即知当 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{0}$ 总是 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 的极点.

而对于极方向有以下推论(符号意义同上).

推论 5.1.2.4 若 $A \in R^{n\times m},\ \boldsymbol{x} \in R^m,\ \boldsymbol{b} \in R^n$ 不等式

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}$$

有解,并有 $\operatorname{rank} A = m$,且 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 存在极方向,那么,设 $\boldsymbol{x}^i \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 是 P 的极点,任一 $\boldsymbol{d}$ 若是 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 的方向,必要条件是存在 $\boldsymbol{u} \in R_+^m$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$,使

$$\boldsymbol{d} = A_I^{-1}\boldsymbol{u}$$

且若有 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_j \in R_+^m$,成立

$$\boldsymbol{d} = t \cdot A_I^{-1}\boldsymbol{e}_j \quad t > 0$$

并且 $\boldsymbol{d}$ 是 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 中的一个方向,则 $\boldsymbol{d}$ 一定是极方向. ■

证明: 由于 $\boldsymbol{x}^i$ 是极点,$\boldsymbol{d}$ 是 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 中的任一方向. 则

$$A_{I(\boldsymbol{x}^i)} \cdot (\boldsymbol{x}^i + \boldsymbol{d}) = A_{I(\boldsymbol{x}^i)}\boldsymbol{x}^i + A_{I(\boldsymbol{x}^i)}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}_{I(\boldsymbol{x}^i)} + A_{I(\boldsymbol{x}^i)}\boldsymbol{d} \geqslant \boldsymbol{b}_{I(\boldsymbol{x}^i)}$$

故知必要有

$$A_{I(\boldsymbol{x}^i)}\boldsymbol{d} \geqslant 0$$

从而有 $I \subset I(\boldsymbol{x}^i)$, $|I| = m$ 决定的可逆矩阵 A_I 及 $\boldsymbol{u} \in R_+^m$,成立

$$\boldsymbol{d} = A_I^{-1}\boldsymbol{u}$$

即 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 中的任一方向都能用任一极点 $\boldsymbol{x}^i$ 对应的 $A_{I(\boldsymbol{x}^i)}$ 矩阵中的可逆矩阵的 A_I 逆矩阵 A_I^{-1} 的列向量的正线性组合表出.

若 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 中的一个方向 $\boldsymbol{d}$,比如说可成立

$$\boldsymbol{d} = tA_I^{-1}\boldsymbol{e}_1 = t \cdot \tilde{\boldsymbol{a}}^1 \quad t > 0$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{a}}^1$ 是 A_I^{-1} 的第 1 列向量,设 $\boldsymbol{d}$ 不是极方向,那么,就有 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 中的相异的两个方向 $\boldsymbol{d}^1$、$\boldsymbol{d}^2$, $0 < a < 1$,使

$$\boldsymbol{d} = a \cdot \boldsymbol{d}^1 + (1-a) \cdot \boldsymbol{d}^2$$

但由以上结果,应有 $\boldsymbol{u}^1$、$\boldsymbol{u}^2 \in R_+^m$, $\boldsymbol{u}^1$、$\boldsymbol{u}^2 \neq \boldsymbol{0}$,使

$$\boldsymbol{d}^1 = A_I^{-1}\boldsymbol{u}^1 \quad \boldsymbol{d}^2 = A_I^{-1}\boldsymbol{u}^2$$

故应有

$$A_I\boldsymbol{d} = a \cdot A_I\boldsymbol{d}^1 + (1-a) \cdot A_I\boldsymbol{d}^2 = a \cdot \boldsymbol{u}^1 + (1-a)\boldsymbol{u}^2 = t\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

所以,必只有

$$u^1 = \begin{bmatrix} u_1^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad u^2 = \begin{bmatrix} u_1^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_1^1,\ u_1^2 > 0 \quad au_1^1 + (1-a)u_1^2 = t$$

即 $\boldsymbol{d}^1$、$\boldsymbol{d}^2$ 只能是与 $\boldsymbol{d}$ 相同的方向，即知 $\boldsymbol{d}$ 是极方向. 即证.

以下会指出，$\boldsymbol{d}$ 是 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 中的极方向，并且 $\operatorname{rank} A = m$ 时，当且仅当 $\boldsymbol{d}$ 是矩阵 A 的某一个 $m \times m$ 阶可逆子矩阵

$$A\begin{Bmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_m \\ 1, & 2, & \cdots, & m \end{Bmatrix}$$

的逆矩阵的某个列向量 $\boldsymbol{a}^j$（最多相差一个正数倍），且成立 $A\boldsymbol{a}^j \geqslant \boldsymbol{0}$. 由此可知 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 中的极方向总数肯定小于$\widetilde{M}$个. 类似与极点总数，在不解出不等式组之前，预先难以知道存在多少个极方向.

由以上推论即得到以下定理.

定理 5.1.2.5（广义的多胞形表示定理） 设 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 是

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}$$

方程组的解集合，$A \in R^{n\times m}$，$\boldsymbol{x} \in R^m$，$\boldsymbol{b} \in R^n$，且 $n \geqslant m$，并成立

$$\operatorname{rank} A = m$$

则若 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 非空，对 $\boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$，必可表示成

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} s_i \boldsymbol{x}^i + \sum_{j=1}^{v} v_j \boldsymbol{d}^j \quad s_i,\ v_j \geqslant 0 \quad \sum_i s_i = 1$$
$$1 \leqslant k < \infty \qquad 0 \leqslant v < +\infty \qquad \text{—(5.1.2.21)}$$

其中 $\boldsymbol{x}^i$、$\boldsymbol{d}^j$ 为 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 的极点、极方向[1]. ■

定理 5.1.2.5 中，$\operatorname{rank} A = m$ 的条件不能缺失.

对 $C \in R^{n\times m}$，$\boldsymbol{b} \in R^n$ 构造$\widetilde{A} \in R^{(n+m)\times m}$，$\tilde{\boldsymbol{b}} \in R^{(n+m)}$，

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} C \\ I_m \end{bmatrix} \qquad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \widetilde{A}\boldsymbol{x} \geqslant \tilde{\boldsymbol{b}}$$

---

[1] 参见《全局优化引论》，R. Horst 等著，黄红选译，清华大学出版社，2003 年，第 6 页，定理 1.7.

且 $$\operatorname{rank}\ \widetilde{A} = m$$

故由定理 5.1.2.5，若 $P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 非空，则 $\boldsymbol{x} \in P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 一定可表成(5.1.2.21)式. 因此，若记非负矩阵

$$\Phi_+ = [\boldsymbol{x}^1,\ \boldsymbol{x}^2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}^k] \qquad D_+ = [\boldsymbol{d}^1,\ \boldsymbol{d}^2,\ \cdots,\ \boldsymbol{d}^v]$$

可将(5.1.2.21)式写成为

$$\boldsymbol{x} = \Phi_+ \boldsymbol{s} + D_+ \boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{s},\ \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad \sum_i s_i = 1 \qquad \boldsymbol{x} \in P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) \tag*{—(5.1.2.22)}$$

回到(5.1.1.0)式的解约束方程组(5.1.2.18)式，由以上的结果，若解约束方程组是相容的，则其解便可由(5.1.2.22)式表示，记为

$$\boldsymbol{u} = \Phi_+ \boldsymbol{s} + D_+ \boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{s},\ \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad \sum_i s_i = 1 \qquad \boldsymbol{u} \in P(C\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{b}',\ \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0})$$

将此结果再代回到(5.1.2.14)式，便有

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B} + G_0\Phi_+ \boldsymbol{s} + \Lambda\boldsymbol{t} + G_0 D_+ \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{s},\ \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \sum_i s_i = 1 \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-r}$$

注意到可有

$$\boldsymbol{B} + G_0\Phi_+ \boldsymbol{s} = \Phi\boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \sum_i s_i = 1$$

其中 Φ 矩阵是乘积矩阵 $G_0\Phi_+$ 的各列向量加 $\boldsymbol{B}$ 后的矩阵，再简记 $G_0 D_+ = D$，上式可简记为

$$\boldsymbol{x} = \Phi\boldsymbol{s} + \Lambda\boldsymbol{t} + D\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{s},\ \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \sum_i s_i = 1 \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-r} \quad \boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}) \tag*{—(5.1.2.23)}$$

(5.1.2.23)式就是(5.1.1.0)式表示的不等式方程组的通解形式. 它的意义很清晰，即表示(5.1.1.0)式的解由 3 个部分组成，

$$\boldsymbol{x}_1 = \Phi\boldsymbol{s} \quad \Rightarrow \quad A\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{b}，\text{且}\ \|A\boldsymbol{x}_1\| < +\infty \quad \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \sum_i s_i = 1$$

$$\boldsymbol{x}_2 = \Lambda\boldsymbol{t} \quad \Rightarrow \quad A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-r} \quad \operatorname{rank}(A) = r$$

$$\boldsymbol{x}_3 = D\boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad A\boldsymbol{x}_3 \geqslant \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0}，\text{且}\max\|A\boldsymbol{x}_3\| \to +\infty，\text{当}\ \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0} \quad A\boldsymbol{x}_3 \neq \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 \Rightarrow A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}$$

其中 $\boldsymbol{x}_1$ 代表的是一个由 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 的基点(意义见下文)组成的(有界)凸组合，$\boldsymbol{x}_2$ 是 $N(A)$ 即零度空间，$\boldsymbol{x}_3$ 显然是 A 的正交补空间中的锥. 这可从 G_0 具有的

广义逆矩阵 A^{+} 的性质与 D_{+} 是由 $P(C\boldsymbol{u}\geqslant \boldsymbol{b}',\ \boldsymbol{u}\geqslant \boldsymbol{0})$ 的极方向组成的矩阵即知

$$A\boldsymbol{x}_3\geqslant \boldsymbol{0}\Rightarrow AD\cdot \boldsymbol{v}\geqslant \boldsymbol{0}$$

因为 $\boldsymbol{v}\geqslant \boldsymbol{0}$,故必要有

$$AD\geqslant \boldsymbol{0}$$

成立.故 D 矩阵的任一列向量与超平面

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$$

的法方向向量 $\boldsymbol{a}_i$, $i=1, 2, \cdots, n$ 的夹角或是锐角或为正交,并且不全为正交.故知,D 的任一列向量总在 $N(A)$ 的正交补空间中.

由(5.1.2.23)式,解出(5.1.1.0)式的算法即可归结为分别找出这三个部分的解集合.

由(5.1.1.0)式矩阵 A、向量 $\boldsymbol{b}$ 的具体形式的不同,(5.1.2.23)式的实际形式也会有所不同.

这里需要说明的是,当

$$\operatorname{rank} A=r<m$$

时,由于 $P(A\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{b})$ 的解中必含有 $\Lambda\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t}\in R^{m-r}$ 一项,故其解的构造中的 Φ、D 矩阵的任一列向量均不能视为是极点、极方向.如记 $\boldsymbol{\varphi}^j$ 为 Φ 的第 j 列向量,取任意的 $\boldsymbol{t}\neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{t}\in R^{m-r}$ 作

$$\boldsymbol{\varphi}_1^j=\boldsymbol{\varphi}^j+\Lambda\boldsymbol{t}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2^j=\boldsymbol{\varphi}^j-\Lambda\boldsymbol{t}$$

则 $\boldsymbol{\varphi}_1^j\neq \boldsymbol{\varphi}_2^j$,并且 $\boldsymbol{\varphi}_1^j$, $\boldsymbol{\varphi}_2^j\in P(A\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{b})$,以及成立

$$\boldsymbol{\varphi}^j=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}_1^j+\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}_2^j$$

可知 $\boldsymbol{\varphi}^j$ 不是极点.对 D 矩阵的任一列向量也类似.

由此,当 $\operatorname{rank} A=r<m$ 时,称 $P(A\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{b})$ 的解的构造的(5.1.2.23)中的 Φ 矩阵的列向量 $\boldsymbol{\varphi}^j$ 是 $P(A\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{b})$ 中的**基点**,类似地,称 D 矩阵的列向量(记为 $\boldsymbol{d}^j$)是**基方向**.基点、基方向在 $P(A\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{b})$ 集合中并不是唯一的.但与齐次线性等式方程组的基础解系的情况类似,当确定了 $P(A\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{b})$ 中的一组基点、基方向(假设它们存在),那么,由这组基点、基方向及 $N(A)$ 空间的任一组基础解系向量,按(5.1.2.23)式便能构造出 $P(A\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{b})$ 的任一元素 $\boldsymbol{x}$.

当 $\operatorname{rank} A=m$ 时,$P(A\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{b})$ 的基点、基方向就具有唯一性,从而,就成为极点、极方向.以下以"顶点"作为基点、极点的统称,以"棱线"统称由基方向(极方向)决定的射线.关于基点、基方向的进一步分析,会在以下章节中展开.

推论 5.1.2.6 若 $A \in R^{n\times m}$，$\boldsymbol{x} \in R^m$、$\boldsymbol{b} \in R^n$ 等式 — 不等式方程组

$$\begin{cases} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad —(5.1.2.24)$$

的解集合 $P(A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) \neq \varnothing$，$\tilde{\boldsymbol{x}} \in P(A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 是一个极点，则其充要条件是$\tilde{\boldsymbol{x}}$ 的正数分量$\tilde{x}_j > 0$ 的下标 j 对应的 A 矩阵的列向量组 $\boldsymbol{a}^j$，$j = 1$，2，… 是线性无关的[1]. ■

证明：由推论 5.1.2.3 即可导出以上结果. 因为若 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 的所有分量$\tilde{x}_i > 0$，$i = 1, 2, \cdots, m$，且$\tilde{\boldsymbol{x}}$ 又是 $P(\cdot)$ 的极点，构造

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ I_m \end{bmatrix} \qquad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

知，$\tilde{\boldsymbol{x}}$ 一定是

$$\widetilde{A}\boldsymbol{x} \geqslant \tilde{\boldsymbol{b}}$$

不等式组中，$I(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \{1, 2, \cdots, m\}$ 决定的$\widetilde{A}_{I(\tilde{\boldsymbol{x}})}$ 子矩阵按下式得出的解，

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \widetilde{A}_{I(\tilde{\boldsymbol{x}})}^{-1} \cdot \boldsymbol{b} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

故 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 的正数分量对应的$\boldsymbol{a}^j$，$j = 1, 2, \cdots, m$ 列向量必须是线性无关的. 这里显然隐含了 $n \geqslant m$.

若 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 的分量中含有的正数分量的总数为 k 个，$1 \leqslant k < m$，则不失一般性，假设$\tilde{x}_i > 0$，$i = 1, 2, \cdots, k$，$\tilde{x}_j = 0$，$k < j \leqslant m$，于是

$$I(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \{1, 2, \cdots, n, n+k+1, n+k+2, \cdots, m+n\}$$

故

$$\widetilde{A}_{I(\tilde{\boldsymbol{x}})} = \begin{bmatrix} A\begin{Bmatrix} 1, 2, \cdots, n \\ 1, 2, \cdots, k \end{Bmatrix} & A\begin{Bmatrix} 1, & 2, & \cdots, & n \\ k+1, & k+2, & \cdots, & m \end{Bmatrix} \\ 0 & I_{(m-k)} \end{bmatrix}$$

因此有

$$\widetilde{A}_{I(\tilde{\boldsymbol{x}})} \cdot \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}_{I(\tilde{\boldsymbol{x}})}$$

$$\boldsymbol{b}_{I(\tilde{\boldsymbol{x}})} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0}_{m-k} \end{bmatrix}$$

---

[1] 《非线性最优化》，同前注，第 39 页定理 2.2.2.

$\mathbf{0}_{m-k}$ 是 $m-k$ 维 0 向量.

所以 $\tilde{x}$ 是极点的充要条件是

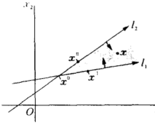
$$\operatorname{rank}(\widetilde{A}_{I(\tilde{x})}) = m \Leftrightarrow \operatorname{rank}\left(A\begin{Bmatrix}1, 2, \cdots, n\\1, 2, \cdots, k\end{Bmatrix}\right) = k$$

从而即有以上结论.

这一推论在线性不等式方程组的解以及非线性规划理论中都有重要应用. 在本书的下一章中,还将从另一角度给出这一推论的一种证明.

在 $m \leqslant 2$ 的情况下,通过图解就能确定线性不等式方程组的解,这是为人熟知的. 在图 5.1.2.1 中给出了两个简单例子. 左图显示的是一个顶点在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的锥体(阴影区域),$l_{1,2}$ 直线是

$$\boldsymbol{a}_{1,2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_{1,2}$$



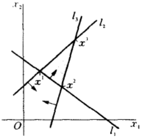


图 5.1.2.1

决定的直线. $\boldsymbol{a}_{1,2}^{\mathrm{T}}$ 是(5.1.1.0)式矩阵 A 的行向量. $\boldsymbol{x}^0$ 是 $l_{1,2}$ 的交点. 指向阴影区域内部的箭头方向是 $l_{1,2}$ 直线的法方向. $l_{1,2}$ 直线也可以表示成以 $\boldsymbol{x}^0$ 点为原点的射线(参数)方程,并规定射线的正方向如 $l_{1,2}$ 直线上的箭头所指的方向(即阴影区开口的方向). 这个参数方程总可以表示成

$$l_{1,2}: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{d}^{1,2}u_{1,2} \qquad u_{1,2} \geqslant 0$$

其中 $\boldsymbol{d}^{1,2}$ 是 $l_{1,2}$ 的方向向量,$u_{1,2}$ 是参数. $\boldsymbol{d}^{1,2}$ 可以任取 $l_{1,2}$ 直线上的如 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{I},\mathrm{II}}$ 这样的点,并由

$$\boldsymbol{d}^{1,2} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{I},\mathrm{II}} - \boldsymbol{x}^0$$

的方式决定. 这样,左图中阴影区域的任一点 $\boldsymbol{x}$ 都可以表示成

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{d}^1u_1 + \boldsymbol{d}^2u_2 \qquad u_1, u_2 \geqslant 0$$

并且这样构造的 $\boldsymbol{x}$ 一定是

$$\boldsymbol{a}_{1,2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant b_{1,2}$$

方程组的解. 因此,在这一场合,(5.1.2.23)式中的 $\Phi = \boldsymbol{x}^0$, Λ 为 0 矩阵, $D = [\boldsymbol{d}^1, \boldsymbol{d}^2]$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}}$.

而在图 5.1.2.1 右图中,解空间则是 $l_{1,2,3}$ 直线围成的三角形区域. 这时解可以直接写出来

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^1 s_1 + \boldsymbol{x}^2 s_2 + \boldsymbol{x}^3 s_3 \quad s_{1,2,3} \geqslant 0 \quad s_1 + s_2 + s_3 = 1$$

其中 $\boldsymbol{x}^{1,2,3}$ 均是 $l_{1,2,3}$ 直线中的两条直线的交点. 这时就有 $\Phi = [\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^3]$, $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)^{\mathrm{T}}$,而 Λ、D 均为 0 矩阵.

以上这两个例子虽然是简单的,但它们关于不等式组解的构造方法也就是本章以下各节所叙述的方法. 这一方法实质就是通过找寻所有满足线性不等式方程组给定条件的交点与方向向量来构造出不等式组的解.

§5.2 逆矩阵的几何构造

设 $A \in R^{m\times m}$ 且 A 可逆. 由定理 5.1.2.1,齐次线性不等式组

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \qquad \text{—(5.1.1.0)}$$

有解. 先考虑 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ 时的齐次线性不等式的解.

由于 A^{-1} 存在,令

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{u} \in R_+^m \qquad \text{—(5.2.1)}$$

则(5.2.1)式决定的 $\boldsymbol{x}$ 就是齐次线性不等式组.

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad (A\text{ 可逆}) \qquad \text{—(5.2.2)}$$

的解. 用

$$P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},\, A^{-1}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^m\} \qquad \text{—(5.2.3)}$$

表示(5.2.2)式的解集合.

由上一节的分析, $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, A^{-1})$ 存在 1 个极点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 这隐含在可令(5.2.3)式中的 $\boldsymbol{u}$ 取 $\boldsymbol{0}$ 的情形中. 通常,$\boldsymbol{0}$ 作为 P 的极点时,可以不写明. 显然,逆矩阵 A^{-1} 的 m 个列向量就是 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, A^{-1})$ 集合的全部极方向向量. 这由推论 5.1.2.4 即知. 易知 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, A^{-1})$ 是一个锥.

以下简记 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, A^{-1})$ 为 P [1].

---

[1] 这样的简记可使各章节中符号 P 的意义是不同的,请阅读时留意.

以 $\mathrm{int}\,P \subset P$ 表示 P 的内点集合

$$\mathrm{int}\,P = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R_{+}^{m} \quad \boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}\} \qquad —(5.2.4)$$

即 $\mathrm{int}\,P$ 是使 $A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ 成立的 $\boldsymbol{x}$ 的全体集合.

一般地,使 $A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ 成立的充要条件有以下定理.

定理 5.2.1(Gordan 定理) 设 $A \in R^{n\times m}$,则 $A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ 有解的充要条件是不存在非零向量 $\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0}$,使 $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ [1]. ■

Gordan 定理给出了 $A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ 有解的条件,其意义等价于说 A 矩阵中不存在任一行向量 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}$ 可由其他行向量的负线性组合表出.

否则,若有某个 i 下标,使

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1} t_j \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}} \qquad t_j \leqslant 0$$

作下标集合

$$\hat{I}^{-}(\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}) = \left\{ j \,\middle|\, \mathbf{a}_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1} t_j \boldsymbol{a}_j,\ t_j < 0,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1; t_j \leqslant 0 \right\}$$

$$—(5.2.5)$$

易知

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0 \\ \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0 \qquad j \in \hat{I}^{-}(\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}) \end{cases}$$

方程组是矛盾的,只有

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 \\ \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 \qquad j \in \hat{I}^{-}(\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}) \end{cases}$$

才是相容的. 所以, $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的解一定是在

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 \\ \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 \qquad j \in \hat{I}^{-}(\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}) \end{cases} \qquad —(5.2.6)$$

决定的超平面上. 若 $\boldsymbol{a}_{j_k}^{\mathrm{T}}$, $j_k \in \hat{I}^{-}(\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}})$ 向量组就是 A 的极大线性无关行向量组 $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ r,\ r = \mathrm{rank}(A)$,那么 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 只有 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 一个解.

显然,当 A 矩阵是行满秩的, $A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ 一定有解, $\mathrm{int}\,P$ 非空.

记 ∂P 是 P 的边界点集合 $\partial P \subseteq P$.

---

[1] 《现代应用数学手册——运筹学与最优化理论卷》,清华大学,1997 年,第 92 页,定理 2.1.18.

$$\partial P = \{x \mid a_{i_t}^{\mathrm{T}} x = 0 \quad t = 1, 2, \cdots, d, a_j^{\mathrm{T}} x \geqslant 0 \\ j \neq i_t \quad j = 1, 2, \cdots, n, 1 \leqslant d \leqslant r\} \qquad —(5.2.7)$$

即 ∂P 是由 $Ax \geqslant \mathbf{0}$ 中至少一个不等式取等号时的解的全体集合.

当 A 矩阵是可逆的，$x \in \partial P$，

$$x = A^{-1} u \quad u \in R_{+}^{n} \text{ 且至少有 } u_i = 0 \qquad —(5.2.8)$$

不妨设 u 的 k 个分量为 0，

$u_{i_j} = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, k;\ u_i > 0 \quad i \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$，有

$$\begin{cases} a_{i_j}^{\mathrm{T}} x = 0 & j = 1, 2, \cdots, k \\ a_i^{\mathrm{T}} x = u_i > 0 & i \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \end{cases} \qquad —(5.2.9)$$

其中 $a_{i_j}^{\mathrm{T}}$，a_i^{T} 为 A 矩阵的对应行向量. 当 $k = 1$，可将(5.2.9)式简写为以下方程组 g_i，

$$g_i: \begin{cases} a_i^{\mathrm{T}} x = 0 & 1 \leqslant i \leqslant m \\ a_j^{\mathrm{T}} x > 0 & j = 1, 2, \cdots, m;\ j \neq i \end{cases} \qquad —(5.2.10)$$

称(5.2.10)式决定的解 x 全体为 P 的边界(超)平面 g_i. 并用

$$\partial P_i = \{x \mid a_i^{\mathrm{T}} x = 0, a_j^{\mathrm{T}} x > 0, j = 1, 2, \cdots, m;\ j \neq i\} \qquad —(5.2.11)$$

表示这样的超平面.

可以这样来构造 ∂P_i，对(5.2.10)式的第一个方程

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{im} x_m = 0 \qquad —(5.2.12)$$

给出其解集合. 设 $a_{i1} \neq 0$，并用以下简写记号

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{i(k-1)}, a_{i(k+1)}, \cdots, a_{im}) = a_i^{\mathrm{T}}(m/k)$$

即 $a_i^{\mathrm{T}}(m/k)$ 是 m 维行向量 a_i^{T} 中划去 a_{ik} 分量元素后的余子向量，同理，用 $A(1, 2, \cdots, m/k)$ 表示矩阵 A 中划去第 k 行元素后的余子矩阵，则(5.2.12)式的基础解系矩阵可记为 $\Lambda\{i\}$，

$$\Lambda\{i\} = \begin{bmatrix} -\dfrac{a_i^{\mathrm{T}}(m/1)}{a_{i1}} \\ I_{(m-1)} \end{bmatrix} \qquad —(5.2.13)$$

$\Lambda\{i\}$ 是 $m \times (m-1)$ 阶矩阵. 则(5.2.12)式的解可表示为

$$x = \Lambda\{i\} z \qquad z \in R^{m-1} \qquad —(5.2.14)$$

其中 z 是 R^{m-1} 的任一向量. 将(5.2.14)式代入(5.2.10)式的后 $m-1$ 个严格不

等式便得到

$$A(1,\ 2,\ \cdots,\ m/i)\Lambda\{i\}\boldsymbol{z} > \boldsymbol{0} \qquad —(5.2.15)$$

注意 $\Lambda\{i\}$ 本质上是一个初等变换矩阵，乘积 $A(1,\ 2,\ \cdots,\ m/i)\Lambda\{i\}$ 矩阵的第 k 列向量是 $A(1,\ 2,\ \cdots,\ m/i)$ 矩阵的第 1 列向量乘以 $(-a_{i(k+1)}/a_{i1})$ 再与 $A(1,\ 2,\ \cdots,\ m/i)$ 矩阵第 $k+1$ 列向量的和. $A(1,\ 2,\ \cdots,\ m/i)$ 与 $\Lambda\{i\}$ 矩阵的秩均为 $m-1$. 乘积 $A(1,\ 2,\ \cdots,\ m/i)\Lambda\{i\}$ 矩阵是 $(m-1)\times(m-1)$ 阶方阵应是可逆的. 记

$$A_i = A(1,\ 2,\ \cdots,\ m/i)\Lambda\{i\}$$

则(5.2.15)式的解集合可用下式表示，

$$\boldsymbol{z} = A_i^{-1}\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} \in R_+^{m-1} \quad \boldsymbol{v} > \boldsymbol{0} \qquad —(5.2.16)$$

所以(5.2.10)式的解是

$$\boldsymbol{x} = \Lambda\{i\} \cdot A_i^{-1}\boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{v} > \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{v} \in R^{m-1} \qquad (5.2.17)$$

解集合即是

$$\partial P_i = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \Lambda\{i\} \cdot A_i^{-1}\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} > \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{v} \in R^{m-1}\} \qquad —(5.2.18)$$

例 5.2.1 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

由
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

得

$$\Lambda\{1\} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A(1,\ 2,\ 3/1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = A(1,\ 2,\ 3/1)\Lambda\{1\} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{15} & -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$x = \Lambda\{1\}A_1^{-1}v = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} v \qquad v \in R_+^2 \quad v > \mathbf{0}$$

就是

$$g_1: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 > 0 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 > 0 \end{cases}$$

方程组的解. 从而

$$\partial P_1 = \{x \mid x = \Lambda\{1\}A_1^{-1}v \quad v > \mathbf{0}\}$$

显然，∂P_i 集合共计有 m 个，每个 ∂P_i 集合对应的是一个平面上的闭锥. 该平面由(5.2.12) 式决定，而平面上的闭锥则由(5.2.15) 式决定. 平面上的这一闭锥平面片，就是(5.2.3) 式 P 集合的一个边界平面. m 个边界面 ∂P_i 就构成了 P 的边界面集合 ∂P.

如本例中另两个边界面集合的构造是，

$$g_2: x = \begin{bmatrix} \frac{8}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} v \qquad g_3: x = \begin{bmatrix} \frac{8}{15} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} v \quad v > \mathbf{0} \quad v \in R_+^2$$

由 ∂P_i 的构造即知 $\partial P_i \cap \partial P_j = \varnothing$ 当 $i \neq j$.

用 $A\begin{Bmatrix} i_h \\ j_k \end{Bmatrix}$, $i_h = i_1, i_2, \cdots, j_k = j_1, j_2, \cdots$，表示由行、列下标子列 i_h、j_k 决定的 A 的对应元素所组成的子矩阵. 将以上方法推广到(5.2.9) 式. 用

$$A\begin{Bmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_k \\ 1, & 2, & \cdots, & m \end{Bmatrix} = \left[A\begin{Bmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_k \\ 1, & 2, & \cdots, & k \end{Bmatrix}, A\begin{Bmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_k \\ k+1, & k+2, & \cdots, & m \end{Bmatrix} \right]$$

表示(5.2.9)式的前 k 个等式方程的系数矩阵，并设

$$A\begin{Bmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_k \\ 1, & 2, & \cdots, & k \end{Bmatrix}$$

矩阵满秩. (5.2.9)式的前 k 个等式的基础解系矩阵可表示为

$$\Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} = \begin{bmatrix} -\left[A\begin{Bmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_k \\ 1, & 2, & \cdots, & k \end{Bmatrix}\right]^{-1} A\begin{Bmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_k \\ k+1, & k+2, & \cdots, & m \end{Bmatrix} \\ I_{(m-k)} \end{bmatrix} \quad —(5.2.19)$$

$\Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 是 $m \times (m-k)$ 阶矩阵. 所以

$$\boldsymbol{x} = \Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}\boldsymbol{z} \qquad \boldsymbol{z} \in R^{m-k} \quad —(5.2.20)$$

是(5.2.9)式前 k 个等式方程组的解.

记 $1, 2, \cdots, m$ 序列中划去 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 子序列后的余子序列是 $j_1, j_2, \cdots, j_{(m-k)}$. 将(5.2.20)式的解代入(5.2.9)式的后 $(m-k)$ 个严格不等式方程组中，可得

$$A\begin{Bmatrix} j_1, & j_2, & \cdots, & j_{(m-k)} \\ 1, & 2, & \cdots, & m \end{Bmatrix} \cdot \Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}\boldsymbol{z} > \boldsymbol{0} \quad —(5.2.21)$$

并记 $A(i_1, i_2, \cdots, i_k) = A\begin{Bmatrix} j_1, & j_2, & \cdots, & j_{(m-k)} \\ 1, & 2, & \cdots, & m \end{Bmatrix} \cdot \Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$

$A(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 是 $(m-k) \times (m-k)$ 阶方阵，且可逆.

则(5.2.21)式的解是

$$\boldsymbol{z} = A^{-1}(i_1, i_2, \cdots, i_k)\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} > 0 \quad \boldsymbol{v} \in R^{m-k} \quad —(5.2.22)$$

其中 $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}$ 都是 $(m-k)$ 维向量. 构造

$$\partial P(i_1, i_2, \cdots, i_k) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}A^{-1}(i_1, i_2, \cdots, i_k)\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{v} \in R^{m-k}\} \quad —(5.2.23)$$

$\partial P(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 就是 $g_{i_j}, j = 1, 2, \cdots, k$ 闭锥边界面的交集.

由以上的构造法，对任一 $\boldsymbol{x} \in \partial P(i_1, i_2, \cdots, i_k)$，有

$$A\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}\boldsymbol{x} = A\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}\Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}A^{-1}(i_1, i_2, \cdots, i_k)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

因为总有

$$A\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}\Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} = \boldsymbol{0}$$

而

$$A\begin{Bmatrix} j_1, j_2, \cdots, j_{(n-k)} \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix} \boldsymbol{x} = A\begin{Bmatrix} j_1, j_2, \cdots, j_{(n-k)} \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix} \Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \cdot$$

$$\cdot \left[A\begin{Bmatrix} j_1, j_2, \cdots, j_{(m-k)} \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix} \Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \right]^{-1} \boldsymbol{v}$$

$$= I_{(m-k)} \cdot \boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}$$

另一方面，以上构造法实质等价于对矩阵 A 作分块求逆运算. 方便起见，设 $i_1, i_2, \cdots, i_k = 1, 2, \cdots, k$，将 A 作以下分块

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

A_{11}、C_{11} 为 $k \times k$ 阶方阵，余类推. 则

$$\Lambda\{1, 2, \cdots, k\} = \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1}A_{12} \\ I_{(m-k)} \end{bmatrix}$$

$$A\begin{Bmatrix} k+1, & k+2, & \cdots, & n \\ 1, & 2, & \cdots, & m \end{Bmatrix} = [A_{21} \quad A_{22}]$$

$$A(1, 2, \cdots, k) = [A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}]$$

与矩阵求逆公式比照即知，

$$A^{-1}(1, 2, \cdots, k) = [A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}]^{-1} = C_{22}$$

由于 A^{-1} 存在，故 C_{22} 存在，即知 $A(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 也是可逆的. 同时，以上构造法亦对矩阵分块求逆给予了一个几何背景上的说明.

显然，(5.2.2)式的解可表示为

$$P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, A^{-1}) = \boldsymbol{0} + \mathrm{int}\, P + \sum_{i=1}^{m} \partial P_i + \sum_{\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}} \partial P(i_1, i_2, \cdots, i_k)$$

—(5.2.24)

其中，$k = 2, 3, \cdots, m-1$，$\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 为遍取 $1, 2, \cdots, m$ 序列中的 k 个下标组成的递增序列.

续例 5.2.1

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 > 0 \end{cases}$$

这里 $i_1, i_2 = 1, 2$，$k = 2$.

$$\Lambda\{1,2\}=\begin{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$A\left\{\begin{matrix} & 3 & \\ 1, & 2, & 3\end{matrix}\right\}=(-1,-3,1)$$

$$A(1,2)=-3 \quad A^{-1}(1,2)=-\frac{1}{3}$$

$$\partial P(1,2)=\left\{x \mid x=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{bmatrix}v_1 \quad v_1>0\right\}$$

同理有

$$\partial P(1,3)=\left\{x \mid x=\begin{bmatrix}\frac{1}{15}\\-\frac{2}{15}\\-\frac{1}{3}\end{bmatrix}v_2 \quad v_2>0\right\}$$

$$\partial P(2,3)=\left\{x \mid x=\begin{bmatrix}\frac{8}{15}\\-\frac{1}{15}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}v_3 \quad v_3>0\right\}$$

所以，例 5.2.1 不等式方程组的解是

$$P=\mathbf{0}+\operatorname{int}P+\sum_{i}^{3}\partial P_i+\sum_{\substack{i,j\\i<j}}^{3}\partial P(i,j)$$

且由于

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{8}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{3}\\-\frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & -\frac{1}{3}\\\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

比较 int P, ∂P_i 及 $\partial P(i, j)$ 的结构即知，

$$P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, A^{-1}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} \in R_+^3\}$$

如果单纯要得到以上结果当然可以用直截了当的方法解决之. 通过以逐步构造的方法，可以更清楚地了解闭锥的(边界)面及各面的交线的结构，从而可得到以下推论：

推论 5.2.2 对任意 $m \times m$ 阶实矩阵 A，且 A 满秩，则 A^{-1} 矩阵的第 i 列向量，是

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0 & 1 \leqslant i \leqslant m \\ \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} & j = 1, 2, \cdots, m, j \neq i \end{cases} \qquad \text{—(5.2.10)}$$

方程组的解空间的方向向量，其中 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}$ 均是 A 的行向量. ■

由以上的符号规定，很容易验证这个推论. 记列向量

$$\widetilde{\boldsymbol{a}}^i = \Lambda\{1, 2, \cdots, m/i\}A^{-1}(1, 2, \cdots, m/i)$$

是(5.2.10)式的解空间的列向量，

$$A(i) = A\begin{Bmatrix} & & i & \\ 1, & 2, & \cdots, & m \end{Bmatrix}\Lambda\{1, 2, \cdots, m/i\} = \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \cdot \Lambda\{1, 2, \cdots, m/i\}$$

其中“1, 2, …, m/i”表示在序列 1, 2, …, m 中划去 i 后的余子序列($1 \leqslant i \leqslant m$). 则显然有

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{a}}^i = 1, \ \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{a}}^i = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, m, j \neq i$$

即知 $\widetilde{\boldsymbol{a}}^i$ 为 A^{-1} 矩阵的第 i 列向量.

续例 5.2.1 由 A^{-1} 知例 5.2.1 的解空间为 R^3 空间上的一个闭锥，如下图所示.

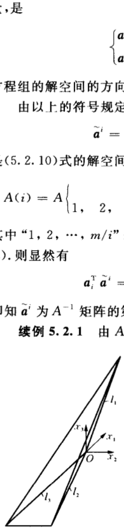


图 5.2.1

其中 $l_{1,2,3}$ 即是由 A^{-1} 矩阵的第 1, 2, 3 列向量为方向向量的射线所构成的锥棱线.

(5.2.2)式不等式方程组在矩阵 A 满秩时，其解空间完全由 A^{-1} 决定. 在几何上其解空间是由 A^{-1} 的列向量$\widetilde{\boldsymbol{a}}^i$ 构成的射线

$$\boldsymbol{x} = \widetilde{\boldsymbol{a}}^i v_i \quad v_i \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

所张成的闭锥. 这个锥体的其他边界面，构造如下

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\boldsymbol{a}}^{i_j} v_{i_j} \quad 2 \leqslant k \leqslant m-1 \quad v_{i_j} \geqslant 0$$

$i_1, i_2, \cdots, i_k$ 是 1, 2, …, m 序列的任一个递增子序列. 由此可知推论 5.2.2 的

另一种表述是，A^{-1} 矩阵的 m 个列向量中的 k 个向量$\tilde{\boldsymbol{a}}^{i_j}$，$j=1, 2, \cdots, k$，$2 \leqslant k \leqslant m-1$，是

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{i_j}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} > 0 & j = 1, 2, \cdots, k \\ \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = 0 & i = 1, 2, \cdots, m;\ i \neq i_1, i_2, \cdots, i_k \end{cases}$$

方程组的解，其中 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_{i_j}^{\mathrm{T}}$ 均是 A 矩阵的行向量.

由以上的分析，从映射的观点来看 A^{-1} 是将 R_+^m 正象限映射成为 R^m 空间的一个闭凸锥 P，而 A 矩阵则是将闭凸锥 P 映射成 R_+^m 正象限.

在(5.2.2)式中，对 $\operatorname{rank} A < m$ 的情形，将在以下给出解的方法.

利用以上结果可以给出非齐次线性不等式方程组

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0} \qquad —(5.2.25)$$

的解. 这里同样先只给出 A 满秩时的解. 若记

$$\boldsymbol{x}^0 = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

对(5.2.25)作

$$A\boldsymbol{x} - A \cdot A^{-1}\boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{b} - A \cdot A^{-1}\boldsymbol{b}$$

就得到

$$A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) \geqslant \boldsymbol{0} \qquad —(5.2.26)$$

故(5.2.26)式的解就是(5.2.25)式的解，而(5.2.26)式的解即是顶点在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的一个闭锥，可记为

$$P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b},\ A^{-1}) = \{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0 \mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0 = A^{-1}\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{x}^0 = A^{-1}\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{v} \in R_+^m\} \qquad —(5.2.27)$$

在几何上，$P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b},\ A^{-1})$ 是将闭锥 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},\ A^{-1})$ 的顶点从原点平移到了 $\boldsymbol{x}^0$ 点. $\boldsymbol{x}^0$ 点即 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b},\ A^{-1})$ 唯一的极点.

本节的最后就 A、A^{-1} 矩阵张成的闭锥之间的相互关系给予一些说明.

如果作

$$A^{-1}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \qquad —(5.2.28)$$

则(5.2.28)式的解空间自然就是

$$P(A^{-1}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},\ (A^{-1})^{-1}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} \in R_+^m\} \qquad —(5.2.29)$$

这一集合就是由 A 的 m 个列向量为方向向量所张成的闭锥. 类似地，我们也可考虑 A 的行向量为方向向量所张成的闭锥.

容易理解，A 矩阵的行向量 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}$ 是逆矩阵 A^{-1} 中的列向量$\tilde{\boldsymbol{a}}^i$ 所张成的闭锥上的第 i 个边界面的法方向向量，其中所谓的第 i 个边界面由(5.2.10)式给出. 因此，若以 $m=3$ 为例，任取 R_+^m 中的3个向量 $\boldsymbol{v}^{1,2,3} > 0$，并由此决定了 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant$

$\mathbf{0}, A^{-1}$) 中的 3 个点 $\boldsymbol{x}^{1,2,3} = A^{-1}\boldsymbol{v}^{1,2,3}$，则由

$$\boldsymbol{x} = s_1\boldsymbol{x}^1 + s_2\boldsymbol{x}^2 + s_3\boldsymbol{x}^3 \qquad s_{1,2,3} \geqslant 0 \quad s_1 + s_2 + s_3 = 1$$

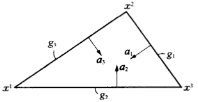


图 5.2.2

相当于在 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}, A^{-1})$ 锥上取了一个截平面. 在这个截平面上 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}, A^{-1})$ 锥是一个以 $x^{1,2,3}$ 为顶点的三角形，见左图.

将 $g_{1,2,3}$ 的法方向向量 $\boldsymbol{a}_{1,2,3}^{\mathrm{T}}$ 平移到原点，并以 $\boldsymbol{a}_{1,2,3}^{\mathrm{T}}$ 决定的射线作闭锥，等价于作了集合

$$P(\widetilde{A}\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}, \widetilde{A}^{-1}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} \in R_m^+\}$$

这表示

$$\widetilde{A} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$$

因为

$$(A^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0$$

方程组的解即为以上集合.

附带地，可以给出 $m = 4$ 时闭锥的一个截超平面(是 R_3 空间) 上的图形，见图 5.2.3. 其图形将是以顶点 $\boldsymbol{x}^{1,2,3,4}$ 组成的单纯形. 它的 4 个面是 $g_{1,2,3,4}$，任取 3 个面总交成某个 $\boldsymbol{x}^i$ 顶点，任取 $g_{i,j}$ 两个面，总交成 l_{ij} 棱线，且图 5.2.3 中的各顶点、棱线与边界面的下标编号规则可由对应的 (5.2.9) 和(5.2.10) 式中得到解释.

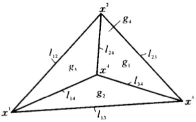


图 5.2.3

由以上关于逆矩阵的几何意义的分析即知，$P(A\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}, A^{-1})$ 集合中的极方向，只可能由 A^{-1} 逆矩阵的全部列向量决定.

§ 5.3 R_+^m 象限中的闭锥 —— $\begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$ 方程组的解

考虑 $C \in R^{n\times m}$，$\boldsymbol{x} \in R^m$ 决定的

$$\begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \qquad \text{—(5.3.0)}$$

式的解.由上文已述及的作法,构造与(5.3.0)式等价的方程组

$$\widetilde{C}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad \widetilde{C} = \begin{bmatrix} C \\ I_m \end{bmatrix} \qquad \text{—(5.3.1)}$$

注意到总有 rank $\widetilde{C} = m$,由推论 5.1.2.3 ~ 4,可知这一方程组只有 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 这一个极点,且其解的极方向则显然可由 $\widetilde{C}$ 矩阵中全部可逆子矩阵的逆矩阵的列向量组中予以选择确定.

当(5.3.0)式的解没有极方向,则它就只有平凡解.当 C 矩阵中含有行向量 $\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}} < \boldsymbol{0}$,则(5.3.0)式只能有平凡解,当含有 $\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}} \geqslant \boldsymbol{0}$ 行向量,则将此行向量划去,不会影响(5.3.0)式的解.故实际只要考虑 C 矩阵每一行向量均有正、负数分量的情形.

记下标序列 $\{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$ 是 $1, 2, \cdots, n+m$ 中的任一递增排列的子列 $(i_{k+1} > i_k)$,设 $\widetilde{C}$ 的子矩阵

$$\widetilde{C}\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_m \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}$$

可逆,$\widetilde{\boldsymbol{c}}^j\{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$ 是其逆矩阵的第 j 列向量.用

$$P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) = \{\boldsymbol{x} \mid C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \in R_+^m\} \qquad \text{—(5.3.2)}$$

表示(5.3.0)式的解集合(以下仍简记为 P).则由 P 中的方向的定义即知,若 $\widetilde{\boldsymbol{c}}^j\{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$ 是 P 中的方向(因而即是极方向),充分条件是

$$\widetilde{C} \cdot \widetilde{\boldsymbol{c}}^j\{i_1, i_2, \cdots, i_m\} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad \text{—(5.3.3)}$$

由 $\widetilde{C}$ 的构造,(5.3.3)式隐含了 $\widetilde{\boldsymbol{c}}^j\{i_1, i_2, \cdots, i_m\} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的非负性条件,也可以将这一非负条件理解为必要条件.

构造矩阵

$$D_+ = [\widetilde{\boldsymbol{c}}^j\{i_1, i_2, \cdots, i_m\}], \ \widetilde{C}\widetilde{\boldsymbol{c}}^j\{i_1, i_2, \cdots, i_m\} \geqslant \boldsymbol{0} \text{ 对所有的 } \{i_1, i_2, \cdots, i_m\}, \ j = 1, 2, \cdots, m \qquad \text{—(5.3.4)}$$

并可将选入 D_+ 中的 $\widetilde{\boldsymbol{c}}^j\{\cdot\}$ 中可能重复的(即相同的) $\widetilde{\boldsymbol{c}}^j\{\cdot\}$ 剔除,便得到

$$P = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = D_+\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}\} \qquad \text{—(5.3.5)}$$

重申一下,$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 极点已隐含在(5.3.5)式中取 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ 的情形下,其次,在未解出(5.3.0)式之前是难以确定 D_+ 矩阵的列的阶数的,即 P 中极方向的多少无法事先即知.

例 5.3.1

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}\qquad 解\begin{cases}Cx\geqslant \mathbf{0}\\ x\geqslant \mathbf{0}\end{cases}$$

用以上方法,可得其解为

$$P=\{x\mid x=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}u\quad u\geqslant \mathbf{0}\}$$

容易验证极方向

$$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow \tilde{c}^2\{1,2,3\}$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\Leftrightarrow \tilde{c}^2\{1,3,4\}$$

$$\vdots$$

这里用等价号“$\Leftrightarrow$”是表示两边的方向向量仅相差一个正数倍.

但以上这样的解法计算量是很大的,因为 $\widetilde{C}$ 矩阵的 $m\times m$ 阶子矩阵共计有

$$\frac{(n+m)!}{m!n!}$$

个(虽然可以不用解出所有这些矩阵的逆).因而,就有必要建立一些更有效率的解法,同时,也可以对(5.3.0)式这样的不等式方程组,给予清晰的几何意义上的解释.

§5.3.1 $c^{\mathrm{T}}x\geqslant 0\quad x\geqslant 0$(单个)方程的解

设 $n=1$,(5.3.0) 式成为

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}c_{1j}x_j\geqslant 0\\ \qquad x_j\geqslant 0\qquad j=1,2,\cdots,m\end{cases}\qquad —(5.3.1.1)$$

设 c_{1j} 中可作下标集合

$$\begin{cases}J^+(1)=\{j\mid c_{1j}>0\quad j=1,2,\cdots,m\}\\ J^-(1)=\{j\mid c_{1j}<0\quad j=1,2,\cdots,m\}\end{cases}\qquad —(5.3.1.2)$$

由上一节所指出的理由，设 $J^+(1)$、$J^-(1)$ 非空. 超平面

$$g_1 = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0\}$$

与 R_+^m 正象限的各坐标平面 Ox_ix_j 有交线

$$l_1: \begin{cases} x_i = -\dfrac{c_{1i}}{c_{1j}}x_j & i \in J^+(1) \quad j \in J^-(1) \quad \text{or} \quad i \in J^-(1) \quad j \in J^+(1) \\ x_i,\ x_j \geqslant 0 \end{cases}$$

$$—(5.3.1.3)$$

这样的交线都可看作是从原点出发且具有正斜率的射线. 记 $|J^+(1)| = n_1^1$，$|J^-(1)| = n_2^1$. 这里对集合$\{\cdot\}$，$|\{\cdot\}|$ 符号是指取集合的势. 则这样的射线在 R_+^m 正象限中共有 $n_1^1 \cdot n_2^1$ 条，并记 $n_0^1 = n_1^1 \cdot n_2^1$.

规定

$$s(i,\ j):(i,\ j) \to s$$

是双下标组合 $(i,\ j)$ 到下标 s 的排序映射.

$$s(i,\ j) \prec s(i',\ j') \quad \text{当 } i < i'$$

$$s(i,\ j) \prec s(i',\ j') \quad \text{当 } i = i',\ j < j'$$

$$1 \leqslant s(i,\ j) \leqslant n_0 \quad i \in J^+,\ j \in J^-$$

将(5.3.1.3)式决定的射线表示成 (R_+^m 空间中) 参数 u 的方程，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{L}_s^1 \cdot u \quad \boldsymbol{L}_s^1 = \Big(0,\ \cdots,\ 0,\ \underset{\text{第 } i \text{ 行}}{\frac{1}{c_{1i}}},\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \underset{\text{第 } j \text{ 行}}{\frac{1}{c_{1j}}},\ 0,\ \cdots,\ 0\Big)^{\mathrm{T}},\ u \geqslant 0$$

$$i \in J^+(1),\ j \in J^-(1) \qquad —(5.3.1.4)$$

其中 $s = s(i,\ j)$.

显然(5.3.1.4)式决定的 $\boldsymbol{x}$ 都是(5.3.1.1) 式的(非平凡) 解. 构造射线方向向量矩阵 L^1，

$$L^1 = [\boldsymbol{L}_1^1,\ \boldsymbol{L}_2^1,\ \cdots,\ \boldsymbol{L}_s^1,\ \cdots,\ \boldsymbol{L}_{n_0}^1]$$

L^1 是 $m \times n_0$ 阶非负矩阵. 则(5.3.1.3) 式也可以等价地表示成

$$l_1: \boldsymbol{x} = L^1 \cdot \boldsymbol{u}^1 \quad \boldsymbol{u}^1 \geqslant \boldsymbol{0} \qquad —(5.3.1.5)$$

例 5.3.1.1

$$g_1: 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$$

$$J^+ = \{1\},\ J^- = \{2,\ 3\},\ n_0 = 1 \cdot 2 = 2,\ s(1,\ 2) = 1,\ s(1,\ 3) = 2$$

$$\boldsymbol{L}_1^1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{L}_2^1 = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$$

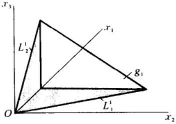


图 5.3.1.1

$$L^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$l_1: \boldsymbol{x} = L^1 \cdot \boldsymbol{u}^1 \quad \boldsymbol{u}^1 \geqslant \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^2$$

在 R_+^3 正象限上 L^1 的图形如图 5.3.1.1.

记 $\boldsymbol{e}_i$ 是标准单位向量，

以及 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i v \quad i \in J^+(1) \quad v \geqslant 0$ —(5.3.1.6)

则这样构造的 $\boldsymbol{x}$ 也是(5.3.1.1)式的解，或者说 R_+^m 正象限的坐标轴 x_i，$i \in J^+$ 都是(5.3.1.1)式解空间闭锥的棱射线(参见上图).

这样，将(5.3.1.5)、(5.3.1.6)式合起来就得到了(5.3.1.1)式的解空间的表示

$$\boldsymbol{x} = L^1\boldsymbol{u}^1 + E^1\boldsymbol{v}^1 \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad \text{—(5.3.1.7)}$$

其中 $\quad E^1 = (\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots)$，当 $i_j \in J^+(1)$，$j = 1, 2, \cdots, n^1$

现在 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 是任取的非负向量，由解的定义，(5.3.1.1) 式可认为即以解出了. (5.3.1.1) 式的解的全体显然就是 R_+^m 正象限上的闭凸锥.

构造(5.3.1.1)式的解集合

$$P(1) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = L^1\boldsymbol{u}^1 + E^1\boldsymbol{v}^1 \quad \boldsymbol{u}^1 \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}^1 \geqslant \boldsymbol{0}\} \qquad \text{—(5.3.1.8)}$$

容易验证(5.3.1.8)式中的 L^1、E^1 矩阵中的列向量，就是

$$\widetilde{C}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}} \\ I_m \end{bmatrix}$$

矩阵按以上的(5.3.4)式所能决定的全部极方向向量.

事实上，

$$\widetilde{C}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

是 $(m+1)\times m$ 阶矩阵. $\widetilde{C}_1$ 含有 $m+1$ 个可逆子矩阵(包括单位矩阵 I_m 在内). 不失一般性,设 $c_{11}>0$,以

$$\widetilde{C}_1\begin{Bmatrix}1,3,4,\cdots,m+1\\1,2,3,\cdots,m\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}&\cdots&c_{1m}\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

为例,其逆阵是

$$\widetilde{C}_1^{-1}\begin{Bmatrix}1,3,4,\cdots,m+1\\1,2,3,\cdots,m\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{c_{11}}{c_{11}}&-\frac{c_{12}}{c_{11}}&-\frac{c_{13}}{c_{11}}&\cdots&-\frac{c_{1m}}{c_{11}}\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

故它含有的对 $j\neq1,-\frac{c_{1j}}{c_{11}}>0$ 即 $c_{1j}<0$ 的列向量都是构造 $P(1)$ 的极方向的方向向量,且都是 L^1 中的列向量,而其第 1 列向量则是 E^1 中的列向量.

同理,再设 $c_{1k}>0$,则构造

$$\widetilde{C}_1\begin{Bmatrix}1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,m+1\\1,2,\cdots,m\end{Bmatrix}$$

子矩阵. 并且,由于在这里仅仅关注的是可逆子矩阵逆阵中各个列向量是否满足(5.3.4)式,所以, $\widetilde{C}_1$ 的可逆子矩阵逆阵中列向量的排列顺序是无关紧要的. 在这个意义上,

$$\widetilde{C}_1\begin{Bmatrix}1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,m+1\\1,2,\cdots,m\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\widetilde{C}_1\begin{Bmatrix}2,3,\cdots,k-1,1,k+1,\cdots,m+1\\1,2,\cdots,m\end{Bmatrix}$$

而

$$\widetilde{C}_1\begin{Bmatrix}2,3,\cdots,k-1,1,k+1,\cdots,m+1\\1,2,\cdots,m\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\c_{11}&c_{12}&c_{13}&\cdots&c_{1k}&\cdots&c_{1m}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\\\\\text{第 }k\text{ 行}\\\\\\\end{matrix}$$

第 k 列

所以,它的逆矩阵是

$$\widetilde{C}_1^{-1}\begin{Bmatrix}2,\ 3,\ \cdots,\ k-1,\ 1,\ k+1,\ \cdots,\ m+1\\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m\end{Bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\frac{c_{11}}{c_{1k}} & -\frac{c_{12}}{c_{1k}} & -\frac{c_{13}}{c_{1k}} & \cdots & \frac{c_{1k}}{c_{1k}} & \cdots & -\frac{c_{1m}}{c_{1k}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix} \quad —(5.3.1.9)$$

同理可知它的逆矩阵中所有 $c_{1j}<0$ 的列向量都是 L^1 矩阵中的列向量($j\neq k$),而第 k 列向量则是 E^1 中的列向量.

对 $\boldsymbol{c}_1=(c_{1j})^{\mathrm{T}}$ 中的全部 $c_{1k}>0$,构造(5.3.1.9)式的逆矩阵,就可得到 L^1、E^1 中的全部列向量,即知,由以上方式直接给出 L^1、E^1 等价于求解数个(5.3.1.9)形式的逆矩阵. 并且,容易知道,对全部的 $c_{1k}>0$ 的下标 k 构造(5.3.1.9)式,就已经可以决定 $P(1)$ 集合的全部极方向向量了. 这可由 L^1、E^1 在以上构造过程中已指明的几何意义即知.

§5.3.2 $\begin{cases}C\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}$ 方程组的解

将(5.3.0)式看成是

$$l_h:\ \sum_{j=1}^{m}c_{hj}x_j\geqslant 0\quad h=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

$$x_j\geqslant 0\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

并由以上的构造方法,对 $h=1,\ 2,\ \cdots,\ n$,作解集合

$$P(h)=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}=L^h\boldsymbol{u}^h+E^h\boldsymbol{v}^h\quad \boldsymbol{u}^h\in R_+^{n_0^h},\ \boldsymbol{v}^h\in R_+^{n_1^h}\}\quad —(5.3.2.1)$$

则(5.3.0)式的解空间,

$$P=\bigcap_{h=1}^{n}P(h)\quad —(5.3.2.2)$$

P 是 n 个 R_m^+ 正象限上的闭锥的交集,P 也是一个闭锥.

以 $m=3$, $n=5$ 为例,若(5.3.0)式中的 n 组不等式能在 R_+^3 空间中形成一个闭锥,则情形相似于下图.

若从 R_+^3 正象限的角平分线为法线的平面取出任意一个为 R_+^3 正象限的截平面，则在这个截平面上就可以有右图所示的图形. 图的最外边是一个等边三角形，它是由坐标平面 Ox_ix_j，i，$j=1, 2, 3$ 与截平面的交线围成的. 这个三角形中的 l_i，$i=1, 2, 3, 4, 5$ 就是

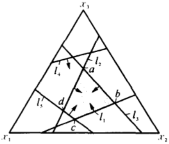


图 5.3.2.1

$$g_i: \sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_j = 0$$

决定的平面与截平面的交线. 图 5.3.2.1 标出了各个 g_i 平面的法方向. 显然以 a、b、c、d 为顶点的阴影区域表示的就是

$$P = \bigcap_{i=1}^{5} P(i)$$

可以形象地称 P 为**闭核锥**.

图 5.3.2.1 中包括 a, b, c, d 在内的各个点，是各平面的交线与截面的交点. 由闭核锥及各个平面的法方向的关系即知，在这些点所表示的射线集合中，只有组成闭核锥的即 a、b、c、d 点所在的 4 条射线的方向向量与矩阵 C 的(右)乘积非负，其他射线的方向向量右乘矩阵 C 则不可能非负. 由此性质，即可得到闭核锥的棱射线的方向向量.

将这一性质推广到更高维的 R_+^m 空间. 由(5.3.2.1)式已构造好的 L^h，$h=1, 2, \cdots, n$ 中，作乘积

$$C \cdot L^h = [\boldsymbol{c}^1(h), \boldsymbol{c}^2(h), \cdots, \boldsymbol{c}^{n_0^h}(h)] \quad —(5.3.2.3)$$

作上标集合

$$J_l^+(h) = \{j \mid \boldsymbol{c}^j(h) \geqslant \boldsymbol{0}, j=1, 2, \cdots, n_0^h\} \quad —(5.3.2.4)$$

其中 $\boldsymbol{c}^j(h)$ 是乘积 $C \cdot L^h$ 矩阵的第 j 个列向量. 并作

$$L_+^h = [\boldsymbol{L}_j^h] \quad j \in J_l^+(h) \quad —(5.3.2.5)$$

即 L_+^h 是 L^h 矩阵中所有与 C 矩阵的乘积为非负向量的那些列向量组成的矩阵，从而

$$C \cdot L_+^h \geqslant \boldsymbol{0} \quad h=1, 2, \cdots, n$$

再用 I 表示 $m \times m$ 阶单位矩阵，记

$$C \cdot I = [\boldsymbol{c}^1, \boldsymbol{c}^2, \cdots, \boldsymbol{c}^m] \quad —(5.3.2.6)$$

作上标集合

$$J_I^+ = \{j \mid \boldsymbol{c}^j \geqslant 0,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m\} \qquad —(5.3.2.7)$$

其中 $\boldsymbol{c}^j$ 是 $C \cdot I = C$ 矩阵的第 j 个列向量，并作集合

$$E_+ = [\boldsymbol{e}_j] \quad j \in J_I^+ \qquad —(5.3.2.8)$$

显然亦有

$$C \cdot E_+ \geqslant \boldsymbol{0}$$

最后对(5.3.0)式中的前 n 个不等式方程组求其成为等式时的交线族. 当然，应说明所谓“交线”在高维的 R_+^m 空间中可以是指的一个 k 维线性流形，这里 $2 \leqslant k \leqslant m-1$.

设 $C\{\cdot\}$ 是 C 的一个子矩阵

$$\text{rank}(C\{\cdot\}) = r\{\cdot\}$$

当 $r\{\cdot\} = m$，这隐含了 $n \geqslant m$，则由线性无关的概念即知，只有 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，使

$$C_{m\times m} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

其中 $C_{m\times m}$ 代表了 C 矩阵中任一个秩为 m 的 $m\times m$ 阶子矩阵. 因此要能构造出 R_+^m 正象限中的低维线性流形，只需遍取 C 矩阵中的全部下列行向量组成的齐次方程组

$$\begin{cases} g_{i_1}: \ \sum\limits_{j=1}^{m} c_{i_1 j} x_j = 0 \\ g_{i_2}: \ \sum\limits_{j=1}^{m} c_{i_2 j} x_j = 0 \\ \ \vdots \qquad\quad \vdots \\ g_{i_k}: \ \sum\limits_{j=1}^{m} c_{i_k j} x_j = 0 \\ \qquad x_j \geqslant 0 \quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m \end{cases} \qquad —(5.3.2.9)$$

(5.3.2.9)式如果有解，则其解就显然是 R_+^m 正象限中从原点出发的射线(半直线). 这里，$2 \leqslant k \leqslant m-1$.

必须把(5.3.2.9)式也看成是一组等式—不等式混合方程组. 记

$$C\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k\} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{i_1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{c}_{i_2}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_{i_k}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

是 C 矩阵中下标为 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 的那些行向量组成的 $k \times m$ 阶矩阵. 应设

$$\mathrm{rank}(C\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}) = r \quad 1 \leqslant r \leqslant k,\ 2 \leqslant k \leqslant m-1$$

由(5.3.2.9)式,可写成以下形式

$$\begin{cases} C\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad —(5.3.2.10)$$

由定理 5.1.2.1 的结论,(5.3.2.10)的解 $P(C\{\cdot\}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 若非空,一定可由 $P(\cdot)$ 中的极点的凸组合与极方向的正线性组合表示出来. 现在由于(5.3.2.10)式是齐次的,故解集合只有 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 这一唯一的极点,所以,$\boldsymbol{x} \in P(C\{\cdot\}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{v} \boldsymbol{d}_c^j u_j \quad u_j \geqslant 0 \qquad —(5.3.2.11)$$

$\boldsymbol{d}_c^j$ 是 $P(\cdot)$ 中的极方向. 易见总要有 $\boldsymbol{d}_c^j \geqslant \boldsymbol{0}$.

由推论 5.1.2.6,$\boldsymbol{d}_c^j$ 向量中的正数分量下标对应的 $C\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 矩阵的列向量组一定要是线性无关的. 不失一般性,设 $\boldsymbol{d}_c^j$ 的前 p 个分量是大于 0 的,$i \leqslant p \leqslant k$. 构造以下矩阵,

$$\widetilde{C}\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} = \begin{bmatrix} C\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \\ I_m \end{bmatrix}_{(m+k)\times m}$$

以及 $\widetilde{C}\{\cdot\}$ 矩阵的行向量下标集合

$$I(\boldsymbol{d}_c^j) = \{1, 2, \cdots, k, k+p+1, k+p+2, \cdots, k+m\}$$

则可将(5.3.2.10)式看成为

$$\widetilde{C}\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad —(5.3.2.10a)$$

从而成立 $\qquad \widetilde{C}\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}_{I(\boldsymbol{d}_c^j)}\, \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$

即在某个 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 处成立(例如取 $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{d}_c^j$)

$$I(\tilde{\boldsymbol{x}}) = I(\boldsymbol{d}_c^j)$$

的情形. 且可知

$$\mathrm{rank}(\widetilde{C}\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}_{I(\tilde{\boldsymbol{x}})} = m$$

因为,注意 $\widetilde{C}\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}_{I(\tilde{\boldsymbol{x}})}$ 是 $(m + (k-p)) \times m$ 阶矩阵,将其写成以下形式,

$$\widetilde{C}\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}_{I(\tilde{x})} = \begin{bmatrix} C\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ 1, 2, \cdots, p \end{Bmatrix}, & C\begin{Bmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_k \\ p+1, & p+2, & \cdots, & m \end{Bmatrix} \\ \mathbf{0} & I_{(m-p)} \end{bmatrix}$$

—(5.3.2.12)

且由于 $C\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ 1, 2, \cdots, p \end{Bmatrix}$的列向量线性无关，故有以上结论，并附带可知 $1 \leqslant p \leqslant k$.

但从(5.3.2.12)式应当有

$$r\{\cdot\} = p = \mathrm{rank}(C\{i_1, i_2, \cdots, i_k\})$$

成立.

不妨设 $C\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 中的前 p 行向量组线性无关，故考虑

$$I = \{1, 2, \cdots, p, k+p+1, k+p+2, \cdots, k+m\} \subset I(\tilde{x})$$

则 $\widetilde{C}\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 中有子矩阵

$$\widetilde{C}\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}_I = \begin{bmatrix} C\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_p \\ 1, 2, \cdots, p \end{Bmatrix}, & C\begin{Bmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_p \\ p+1, & p+2, & \cdots, & m \end{Bmatrix} \\ \mathbf{0}, & I_{(m-p)} \end{bmatrix}$$

—(5.3.2.13)

显然，因为 $C\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_p \\ 1, 2, \cdots, p \end{Bmatrix}$可逆，故$\widetilde{C}\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}_I$ 也可逆.

$$\widetilde{C}^{-1}\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}_I =$$

$$\begin{bmatrix} C^{-1}\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_p \\ 1, 2, \cdots, p \end{Bmatrix}, & -C^{-1}\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_p \\ 1, 2, \cdots, p \end{Bmatrix} \cdot C\begin{Bmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_p \\ p+1, & p+2, & \cdots, & m \end{Bmatrix} \\ \mathbf{0}, & I_{(m-p)} \end{bmatrix}$$

—(5.3.2.14)

则由推论 5.1.2.4 的结论，(5.3.2.14)式表示的逆矩阵中的任一列向量，均可能成为是(5.3.2.10a)式不等式组解集合中的极方向向量. 若记(5.3.2.14)式逆矩阵中的第 1, 2, …, p 列向量构造成方向向量(矩阵)是 D^1,

$$D^1 = \begin{bmatrix} C^{-1}\begin{Bmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_p \\ 1, & 2, & \cdots, & p \end{Bmatrix} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

并且，显然地总成立

$$C\{i_1, i_2, \cdots, i_p\} \cdot D^1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^p$$

故 D^1 不是要考虑的(5.3.2.10)式的解集合中的极方向向量.

若记(5.3.2.14)式逆矩阵中的第 $p+1, p+2, \cdots, m$ 列向量为 D^2 矩阵,

$$D^2 = \begin{bmatrix} -C^{-1}\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_p \\ 1, 2, \cdots, p \end{Bmatrix} \cdot C\begin{Bmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, i_p \\ p+1, & p+2, & \cdots, m \end{Bmatrix} \\ I_{(m-p)} \end{bmatrix} \quad —(5.3.2.15)$$

则显然有

$$C\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \cdot D^2 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^{m-p}$$

成立,故 D^2 就是 $P(C\{\cdot\}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 集合中的可能的极方向向量组成的矩阵.

注意到 D^2 矩阵其实就是以下方程组的基础解系矩阵

$$C\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad —(5.3.2.16)$$

统一符号,以下仍用 $\Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 表示(5.3.2.16)式的基础解系矩阵,即 $\Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} = D^2$ 由(5.3.2.15)式决定.

还容易理解,若取(5.3.2.10)式中的 $C\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 是行满秩的,

$$\operatorname{rank}(C\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}) = k$$

则总要有 $p = k$ 成立;其次,若记

$$\Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} = [\boldsymbol{\alpha}^j\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}] \quad j = 1, 2, \cdots, m-p$$

则若成立 $\boldsymbol{\alpha}^j\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \geqslant \boldsymbol{0} \quad C \cdot \boldsymbol{\alpha}^j\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \geqslant \boldsymbol{0}$ —(5.3.2.17)

则 $\boldsymbol{\alpha}^j\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 自然就是 $P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 集合中的极方向向量,并且,$\boldsymbol{\alpha}^j\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 代表的就是(5.3.2.9)式的 $g_{i_j}, j = 1, 2, \cdots, k$ 个超平面在 R_+^m 正象限中的半直线(射线)的方向向量.

综合以上分析,可得到以下推论

推论 5.3.2.1 设 $C \in R^{n\times m}$, $\boldsymbol{x} \in R^m$ 决定的不等式方程组

$$\begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

的解集合 $P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 非空,且 $C\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 是 C 中 i_j 行向量组成的子矩阵,设 $C\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 是行满秩的,若

$$C\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad —(5.3.2.16)$$

决定的交(超)直线中的某一条 l,能表示为

$$l: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} \cdot u \quad u \geqslant 0$$

且 $\boldsymbol{d}$ 是 $P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 中的极方向，则在 $C\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k\}$ 矩阵中必可取到一个可逆子矩阵

$$C\begin{Bmatrix} i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k \\ j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_k \end{Bmatrix}$$

并以此子矩阵构造(5.3.2.16)式的通解，

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_{j_1} \\ x_{j_2} \\ \vdots \\ x_{j_k} \end{bmatrix} = -C^{-1}\begin{Bmatrix} i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k \\ j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_k \end{Bmatrix} \cdot C\begin{Bmatrix} i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k \\ h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_{m-k} \end{Bmatrix} \cdot \boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-k} \\ x_{h_s} = t_s \quad s = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-k \\ \{j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_k\} \cup \{h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_{m-k}\} = \{1,\ 2,\ \cdots,\ m\} \end{cases}$$

—(5.3.2.18)

或将(5.3.2.18)式用矩阵表示成以下形式，

$$\boldsymbol{x} = \Lambda\begin{Bmatrix} i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k \\ j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_k \end{Bmatrix} \cdot \boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-k}$$

则 $\boldsymbol{d}$ 一定是 $\Lambda\begin{Bmatrix} i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k \\ j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_k \end{Bmatrix}$ 中的某个列向量. ■

这里 $\Lambda\begin{Bmatrix} i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k \\ j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_k \end{Bmatrix}$ 是由 $C\begin{Bmatrix} i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k \\ j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_k \end{Bmatrix}$ 可逆子矩阵构造出来的(5.3.2.16)式的基础解系矩阵.

推论 5.3.2.1 的意思是说，若(5.3.2.16)式决定的交(超)直线集合中，存在有位于 R_+^m 正象限中的半直线，则其方向向量 $\boldsymbol{d}$ 一定可在 $C\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k\}$ 矩阵中，通过适当选择 $j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_k$ 下标所构造的

$$C\begin{Bmatrix} i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k \\ j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_k \end{Bmatrix}$$

子矩阵，以(5.3.2.16)式的基础解系矩阵的列向量的形式构造出来.

之所以说要“适当选择 $j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_k$ 下标”，这是因为基础解系矩阵 $\Lambda\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k\}$ 的形式不是唯一的，所以，若任选一个下标子列，如 $1,\ 2,\ \cdots,\ k$，以子矩阵

$$C\begin{Bmatrix} i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k \\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k \end{Bmatrix}$$

(设其可逆)来构造基础解系矩阵

$$\Lambda\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ 1, 2, \cdots, k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -C^{-1}\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ 1, 2, \cdots, k \end{Bmatrix}\cdot C\begin{Bmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, i_k \\ k+1, & k+2, & \cdots, m \end{Bmatrix} \\ I_{(m-k)} \end{bmatrix}$$

—(5.3.2.19)

则即便 g_{i_j} $j=1, 2, \cdots, k$ 超平面的交(超)直线集合中含有位于 R_+^m 正象限中的半直线(射线),但对于任选的这个下标子列 1, 2, …, k 按(5.3.2.19)式决定的基础解系矩阵 $\Lambda\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ 1, 2, \cdots, k \end{Bmatrix}$的列向量中也不一定含有能成为 $P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 集合极方向 $\boldsymbol{d}$ 的列向量. 比如,(5.3.2.19)式构造出来的基础解系矩阵的列向量均不满足 $\boldsymbol{d}$ 作为 $P(\cdot)$ 的极方向的非负要求.

要找到(5.3.2.16)式中的那一个下标子列 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 可以按(5.3.2.18)式构造出的

$$\Lambda\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{Bmatrix}$$

矩阵的列向量中含有 $P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 集合的极方向向量,最直接的方法当然是对 1, 2, …, m 中的所有 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 子列尝试构造出 $\Lambda\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{Bmatrix}$矩阵,然后再去检验其各列向量是否满足(5.3.2.17)式的要求. 这样,只要(5.3.2.16)式的解中包含有极方向 $\boldsymbol{d}$,就一定可以将它找到,但这种枚举法的计算量仍然很大.

如果注意到(5.3.2.17)式的要求,可以更简便一些地确定 $\Lambda\{\cdot\}$ 中可能含有的极方向向量. 由于极方向向量 $\boldsymbol{d} \geqslant \boldsymbol{0}$,故可任取一个下标子列,比如 1, 2, …, k,构造出 $\Lambda\{\cdot\}$ 矩阵,然后求解以下不等式方程组

$$\Lambda\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ 1, 2, \cdots, k \end{Bmatrix}\boldsymbol{t} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-k}$$

这个不等式方程组等价于以下不等式方程组

$$\begin{cases} -C^{-1}\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ 1, 2, \cdots, k \end{Bmatrix}C\begin{Bmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, i_k \\ k+1, & k+2, & \cdots, m \end{Bmatrix}\boldsymbol{t} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-k} \\ \boldsymbol{t} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

—(5.3.2.20)

这一不等式方程组仍是类似于(5.3.0)式的,但它比(5.3.0)式要更简化一

些了，(5.3.2.20)式中的未知数个数及不等式方程的个数都比(5.3.0)式来得少.这样，就可形成迭代的解法，从而，最终解出(5.3.2.20)式——如果它有解，或判断出它无解.

如果(5.3.2.20)无解，则已可知(5.3.2.16)式决定的 g_{i_j} 超平面的交(超)直线与 R_+^m 正象限是不相交的.如果(5.3.2.20)有解，不妨设其解是

$$t = D_t\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \quad D_t \geqslant 0 \qquad —(5.3.2.21)$$

则可将(5.3.2.16)式的解表示成

$$\boldsymbol{x} = \Lambda\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ 1, 2, \cdots, k \end{Bmatrix} \cdot D_t \cdot \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^{m-k}$$

则若记

$$\Lambda^+ \{i_1, i_2, \cdots, i_k\} = \Lambda\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ 1, 2, \cdots, k \end{Bmatrix} \cdot D_t \qquad —(5.3.2.22)$$

一定有 $\Lambda^+ \{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \geqslant \boldsymbol{0}$. 故对 $\Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 的各列向量 $\boldsymbol{\alpha}^j$ 只要满足

$$C \cdot \boldsymbol{\alpha}^j \{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \geqslant \boldsymbol{0}$$

它就是 $P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 中的极方向向量.这后一种方法所需的计算量往往要少很多.

对 $k = 2, 3, \cdots, m-1$ 分别按以上方式确定(5.3.2.16)式的(非负)基础解系矩阵(5.3.2.22)式构造的 $\Lambda\{\cdot\}$，然后检验其各列向量与 C 矩阵的(右)乘积是否非负，就找到了 $P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 集合中全部的由 g_{i_j} 超平面的交线形成的位于 R_+^m 正象限中的射线的方向向量决定的 $P(\cdot)$ 的极方向向量.

由 $P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 的几何意义、逆矩阵的几何构造以及以上关于(5.3.2.16)式基础解系的分析，可知，$P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 中的极方向，只有这样两大类，第1类就是上一节所分析的各个超平面 g_i 与各坐标平面 Ox_ix_j (在 R_+^m 正象限)的交线所决定的方向向量；第2类就是由(5.3.2.16)式决定的 k 个超平面 g_{i_j}，$j = 1, 2, \cdots, k$ 的交直线，且交直线又刚好位于 R_+^m 正象限中，即可表示成 R_+^m 正象限中的射线的方向向量所决定的极方向.由(5.3.1.9)式、(5.3.2.15)式，可知这些极方向都只能是(5.3.2.10a)式中的 $\widetilde{C}\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 矩阵 $k = 1, 2, \cdots, m$ 中某个 $m \times m$ 阶可逆子矩阵的逆阵的列向量.由此即知在关于推论5.1.2.4的说明中所断言的，$\boldsymbol{d}$ 成为 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 集合中的极方向，充要条件是 $\boldsymbol{d}$ 是 A 矩阵中的某个 $m \times m$ 阶可逆子矩阵的逆阵的列向量(最多相差一个正数倍)，且 $A\boldsymbol{d} \geqslant \boldsymbol{0}$，这一结论是正确的.

遍取

$$2 \leqslant k \leqslant \min(\operatorname{rank} C,\ m-1) = k_0 \qquad —(5.3.2.22a)$$

仍记(5.3.2.22)式的

$$\Lambda^{+}\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} = [\boldsymbol{\alpha}^1, \boldsymbol{\alpha}^2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}^{m-k}]$$

并再作下标集合，

$$J^{+}\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} = \{j \mid \boldsymbol{\alpha}^j \geqslant \mathbf{0},\ C\boldsymbol{\alpha}^j \geqslant \mathbf{0},\ \Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} = = [\boldsymbol{\alpha}^1, \boldsymbol{\alpha}^2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}^{(m-k)}]\} \qquad —(5.3.2.23)$$

再作

$$\Lambda_{+} = [\boldsymbol{\alpha}^j], \text{如有 } j \in J^{+}\{i_1, i_2, \cdots, i_k\},\ 2 \leqslant k \leqslant k_0 \qquad —(5.3.2.24)$$

即 Λ_+ 是所有 $\Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$，$2 \leqslant k \leqslant k_0$ 基础解系矩阵中的那些满足

$$\boldsymbol{\alpha}^j \geqslant \mathbf{0},\ C\boldsymbol{\alpha}^j \geqslant \mathbf{0}$$

的列向量组成的矩阵.

则(5.3.0)式的最终解可表示成

$$\boldsymbol{x} = L_{+}\boldsymbol{u} + E_{+}\boldsymbol{v} + \Lambda_{+}\boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \geqslant \mathbf{0} \qquad —(5.3.2.25)$$

其中 E_+ 由(5.3.2.8)式给出，L_+ 由(5.3.2.5)式的 L_+^h 按下式给出，

$$L_{+} = [L_{+}^{h}] \quad \text{如 } J_l^{+}(h) \neq \varnothing \quad h = 1, 2, \cdots, n \qquad —(5.3.2.26)$$

L_+、E_+ 和 Λ_+ 矩阵的行维数均为 m，列维数分别由 $J_l^+(h)$，J_l^+ 以及 $J^+\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 集合(全体)决定. 从而得到 R_+^m 空间上的闭核锥的构造：

$$P(C\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0},\ \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = L_{+}\boldsymbol{u} + E_{+}\boldsymbol{v} + \Lambda_{+}\boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \geqslant \mathbf{0}\} \qquad —(5.3.2.27)$$

由于以上的构造性解法中，并没有对矩阵 C 的阶数 n、m 和秩作任何假设，故以上解法对任意的 $n \times m$ 阶矩阵 C 决定的(5.3.0)式均是适用的.

上面的叙述导致了很繁琐的下标符号，但其方法并不复杂，可以结合下例予以理解.

例 5.3.2.1 解出以下不等式方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \geqslant 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \geqslant 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 \geqslant 0 \\ x_i \geqslant 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

由上文的符号

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad (\text{rank}\, C = 3)$$

$$L^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad L^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$C \cdot L^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & - \\ + & - & - & - \end{bmatrix}$$

这里为简约仅写出 $C \cdot L^1$ 的符号. 可知 $J_l^+(1) = \{1\}$，即只有 L^1 的第 1 个列向量符合构造闭锥的要求，同理可知 $J_l^+(2) = \varnothing$，即 L^2 中的列向量均不符合构造闭锥的要求，$J_l^+(3) = \{1\}$. 故

$$L_+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

再由

$$C \cdot I_4 = C$$

且 C 中没有非负的列向量，知 $E_+ = [0]$.

再求交线. 现在 $k_0 = \min(\text{rank}\, C,\ m-1) = 3$，故可取 $k = 2,\ 3$.

$k = 2$

(a) 由

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C\{1,\ 2\}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

取 $\{j_1,\ j_2\} = \{1,\ 2\}$，$C\begin{Bmatrix} 1,\ 2 \\ 1,\ 2 \end{Bmatrix}$ 可逆，并得到基础解系矩阵

$$\Lambda\begin{Bmatrix}1, 2\\1, 2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\qquad C\cdot\Lambda\begin{Bmatrix}1, 2\\1, 2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\- & -\end{bmatrix}$$

现 $\Lambda\begin{Bmatrix}1, 2\\1, 2\end{Bmatrix}\geqslant\mathbf{0}$，但由于 $C\cdot\Lambda\begin{Bmatrix}1, 2\\1, 2\end{Bmatrix}$ 不满足非负条件，故 $\Lambda\{1, 2\}$ 中没有可构造解的列向量.

(b) 由

$$\begin{cases}3x_1-2x_2-3x_3+x_4=0\\-2x_1+2x_2+x_3-3x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow C\{1, 3\}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$

类似，可得基础解系矩阵

$$\Lambda\begin{Bmatrix}1, 3\\1, 2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\\frac{3}{2} & \frac{7}{2}\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$\Lambda\begin{Bmatrix}1, 3\\1, 2\end{Bmatrix}\geqslant\mathbf{0}$，再由

$$C\cdot\Lambda\begin{Bmatrix}1, 3\\1, 2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\+ & +\\0 & 0\end{bmatrix}$$

即知 $\Lambda\begin{Bmatrix}1, 3\\1, 2\end{Bmatrix}$ 的 2 个列向量均是 P 中的极方向向量.

现在，如果取 $\{j_1, j_2\}\neq\{1, 2\}$，如取 $\{j_1, j_2\}=\{1, 3\}$，可得

$$C\begin{Bmatrix}1, 3\\1, 3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3\\-2 & 1\end{bmatrix}\quad C^{-1}\begin{Bmatrix}1, 3\\1, 3\end{Bmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 3\end{bmatrix}\quad C\begin{Bmatrix}1, 3\\2, 4\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}$$

由(5.3.2.18)式

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}x_1\\x_3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & -8\\2 & -7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}t_1\\t_2\end{bmatrix}\\x_2=t_1\\x_4=t_2\end{cases}$$

得

$$\Lambda\begin{Bmatrix}1, 3\\1, 3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & -\frac{8}{3}\\ 1 & 0\\ \frac{2}{3} & -\frac{7}{3}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

现 $\Lambda\begin{Bmatrix}1, 3\\1, 3\end{Bmatrix}$不是非负的，故再由(5.3.2.20)式，应有

$$\begin{cases}\frac{4}{3}t_1-\frac{8}{3}t_2\geqslant 0\\ \frac{2}{3}t_1-\frac{7}{3}t_2\geqslant 0\\ t_1\geqslant 0\\ t_2\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1-2t_2\geqslant 0\\ 2t_1-7t_2\geqslant 0\\ t_1, t_2\geqslant 0\end{cases}$$

这是易解的方程组．可得解是

$$\boldsymbol{t}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{7} & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}$$

即由(5.3.2.21)式得

$$D_t=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{7} & 0\end{bmatrix}$$

再由(5.3.2.22)式，

$$\Lambda^+\{1, 3\}=\Lambda\begin{Bmatrix}1, 3\\1, 3\end{Bmatrix}\cdot D_t=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{4}{3}\\ \frac{1}{2} & 1\\ 0 & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{7} & 0\end{bmatrix}$$

比较 $\Lambda^+\{1, 3\}$ 与 $\Lambda\begin{Bmatrix}1, 3\\1, 2\end{Bmatrix}$的列向量可知，在将列向量看成是 R_+^m 空间上从原点

出发的方向向量这一意义上讲，二者是等价的(除了排列次序不同外[1]，仅相差一个正数倍). 因此，将 $\Lambda^+\{1, 3\}$ 中的列向量确定为 P 中的极方向向量也是可以的. 反之，此例即说明了若 $\Lambda^+\{1, 3\}$ 的列向量中含有可作 P 中的极方向的列向量，那么，也就存在一个子列 $\{j_1, j_2\} = \{1, 2\}$，可构造出 $\Lambda\begin{Bmatrix}1, 3\\1, 2\end{Bmatrix} \geqslant 0$，且 $\Lambda^+\{1, 3\}$ 中可作为极方向的列向量与 $\Lambda\begin{Bmatrix}1, 3\\1, 2\end{Bmatrix}$ 的某个列向量等价.

(c) 由

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C\{2, 3\}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

可得

$$\Lambda\begin{Bmatrix}2, 3\\1, 2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由于 $\Lambda\begin{Bmatrix}2, 3\\1, 2\end{Bmatrix}$ 不是非负的，仍由(5.3.2.20)式，应解

$$\begin{cases} \frac{2}{3}t_1 - \frac{2}{3}t_2 \geqslant 0 \\ \frac{1}{6}t_1 + \frac{5}{6}t_2 \geqslant 0 \\ t_1 \geqslant 0 \\ t_2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - t_2 \geqslant 0 \\ t_1, t_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

因为以上不等式组中的第 2 个不等式 t_1, t_2 前的系数均非负，故此不等式是冗余的，可以省略.

得

$$\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$$

即

$$D_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

[1] $\Lambda^+\{1, 3\}$ 中列向量的排列次序完全是人为指定的，如取 D_t 矩阵的两列向量位置互换，则 $\Lambda^+\{1, 3\}$ 矩阵的列向量的位置也可以互换.

$$\Lambda^{+}\{2,3\}=\begin{bmatrix}0 & \frac{2}{3}\\ 1 & \frac{1}{6}\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\geqslant 0$$

但现在

$$C\cdot\Lambda^{+}\{2,3\}=\begin{bmatrix}- & -\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

可知 $\Lambda^{+}\{2,3\}$ 中没有 P 的极方向.

再取 $k=3$

$$C\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

得

$$\Lambda\begin{Bmatrix}1,2,3\\1,2,3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ \frac{1}{2}\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$$

现 $\Lambda\begin{Bmatrix}1,2,3\\1,2,3\end{Bmatrix}$不是非负的，但按(5.3.2.20)式，要有

$$\begin{cases}-2t\geqslant 0\\ \frac{1}{2}t\geqslant 0\\ -2t\geqslant 0\\ t\geqslant 0\end{cases}$$

不等式组成立，只有 $t=0$. 故没有 $\Lambda^{+}\{1,2,3\}$ 非 0 的解.

最终，得到按(5.3.2.27)式构造的解集合

$$P(C\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})=\left\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{bmatrix}2 & 2\\ \frac{3}{2} & \frac{7}{2}\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{t}\quad \boldsymbol{u},\boldsymbol{t}\geqslant\boldsymbol{0}\right\}$$

容易理解，上式可简化为 $x \in P(\cdot)$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u \quad u \in R_+^4$$

例 5.3.2.2

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} Cx \geqslant \mathbf{0} \\ x \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

解之（不详细写出求解过程），有

$$L_+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Lambda_+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{14} \\ 1 & \frac{3}{7} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad E_+ \text{ 不存在}$$

可得其解是

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{14} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} u \quad u \geqslant \mathbf{0}$$

注意本例中的 C 是满秩矩阵. 由本章以上内容可知，若 A 是 $m \times m$ 阶可逆矩阵，则

$$Ax \geqslant \mathbf{0}$$

不等式组解是

$$x = A^{-1}u \quad u \in R_+^m$$

但如果简单地利用逆矩阵方法求解本例是不行的. 如，令

$$x = C^{-1}u \quad u \in R_+^3$$

是 $Cx \geqslant \mathbf{0}$ 的解，再由 $x_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$ 的要求（以及 $u \in R_+^3$ 的条件），应得到

的是另一组不等式组

$$\begin{cases} C^{-1}\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \\ u_i \geqslant 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

但这仅仅只是对原不等式组作了一个变换，对于求解没有什么帮助，除非 $C^{-1} \geqslant 0$，此时可利用逆矩阵法直接得到解(见下文).

同时还应注意到，虽然解变量 $\boldsymbol{x} \in R_+^3$，但将它用变量 $\boldsymbol{u}$ 的正线性组合的方式表出却只能在 $\boldsymbol{u} \in R_+^4$ 空间才能做到. 换句话说，这里不存在维数上的任何可供预先能予判定的对应关系. 即如果不通过具体的求解过程，解集合中含有的极方向的数目预先无法知道.

如以上两例所示，在(5.3.2.25)式、(5.3.2.27)式给出的解 $\boldsymbol{x}$ 的构造中，可简记

$$D_+ = [L_+,\ E_+,\ \Lambda_+]$$

仍记

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$$

则 $\boldsymbol{x} \in P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 可简化地表示成

$$\boldsymbol{x} = D_+ \boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad \text{—(5.3.2.28)}$$

例 5.3.2.3 确定解集合 $P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 的极方向的方法，可以简化. 如本例所示. 求

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

的解.

解：仍用以上符号和求解步骤，直接写出以下结果

$$L_+ = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

再由

$$C\{1,\ 2\}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

方程组中，知设有解集合极方向. 由

$$C\{1,3\}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\quad \boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0}$$

可得到极方向 $\boldsymbol{d}_{13}$

$$\boldsymbol{d}_{13}=\left(\frac{6}{77},0,\frac{1}{11},\frac{1}{7}\right)^{\mathrm{T}}$$

由

$$C\{2,3\}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\quad \boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0}$$

可得到极方向 $\boldsymbol{d}_{23}$

$$\boldsymbol{d}_{23}=\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3},0,1\right)^{\mathrm{T}}$$

最后，从方程组

$$C\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\quad \boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0}$$

中得到极方向 $\boldsymbol{d}$

$$\boldsymbol{d}=\left(\frac{3}{13},\frac{9}{13},\frac{14}{13},1\right)^{\mathrm{T}}$$

故解 $\boldsymbol{x}\in P(C\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0},\ \boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0})$ 可表成

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{6}{77}&\frac{5}{3}&\frac{3}{13}\\0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{9}{13}\\0&0&\frac{1}{11}&0&\frac{14}{13}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{7}&1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{u}\in R_+^5$$

注意到蕴涵关系

$$P(C\boldsymbol{x}=\mathbf{0},\ \boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0})\subseteq P(C\{i,j\}\boldsymbol{x}=\mathbf{0},\ C\{k\}\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0},\ \boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0})$$

其中 i,j,k 是 1，2，3 的一个排列，上式对于 1，2，3 的全部排列 i,j,k 中的至少一个排列必成立．故极方向 $\boldsymbol{d}$，一定总是这个排列决定的 $P(C\{i,j\}\boldsymbol{x}=\mathbf{0},\ C\{k\}\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0},\ \boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0})$ 集合的极方向．

所以，记 $\{i,j\}$ 是 1，2，3 中任取 2 个数的组合，$k=\{1,2,3\}-\{i,j\}$ 则求取

$$P(C\{i,j\}\boldsymbol{x}=\mathbf{0},\ C\{k\}\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0},\ \boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0})\quad \forall\{i,j\}\qquad -(5.3.2.29)$$

中的全部极方向，就可以得到 $\boldsymbol{d}_{13}$、$\boldsymbol{d}_{23}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 极方向. 从而不需要另外再去求取

$$C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

的解集合中的极方向 $\boldsymbol{d}$ 了.

由这一方法，对于本例，可知

$$\begin{cases} C\{1,\ 2\}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ C\{3\}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

的解中没有极方向. 再由

$$\begin{cases} C\{1,\ 3\}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ C\{2\}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \geqslant 0 \\ x_{1,2,3,4} \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{—(a)}$$

从前 2 个等式方程中可解得

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & 1 \\ \frac{11}{7} & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \in R^2$$

由 $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$，得方程组

$$\begin{cases} -5t_1 + 7t_2 \geqslant 0 \\ 11t_1 - 7t_2 \geqslant 0 \\ t_{1,2} \geqslant 0 \end{cases}$$

从而有解，

$$\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^2$$

所以

$$\begin{cases} C\{1,\ 2\}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

的解是

$$x=\begin{bmatrix}-\frac{5}{7} & 1\\ \frac{11}{7} & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{11}\\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7}\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}0 & \frac{6}{77}\\ \frac{6}{35} & 0\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{11}\\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7}\end{bmatrix}u \quad u\geqslant \mathbf{0}$$

将此解代入 $C\{3\}x\geqslant 0$,得

$$\begin{cases}-\frac{3}{35}u_1+\frac{9}{77}u_2\geqslant 0\\ u_{1,2}\geqslant 0\end{cases}$$

可得解

$$u=\begin{bmatrix}\frac{35}{3} & 0\\ \frac{77}{9} & 1\end{bmatrix}h \quad h\in R_+^2$$

于是最终得到(a)式的解

$$x=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{6}{77}\\ 2 & 0\\ \frac{28}{9} & \frac{1}{11}\\ \frac{26}{9} & \frac{1}{7}\end{bmatrix}h \quad h\geqslant \mathbf{0} \qquad \text{—(b)}$$

注意上式 h 前矩阵的第 1 列向量就是极方向 d.

类似地,再从

$$\begin{cases}C\{2,3\}x=\mathbf{0}\\ C\{1\}x\geqslant 0\\ x\geqslant \mathbf{0}\end{cases}$$

亦可得到其解为

$$x=\begin{bmatrix}\frac{5}{14} & \frac{5}{3}\\ \frac{15}{14} & \frac{1}{3}\\ \frac{5}{3} & 0\\ \frac{65}{42} & 1\end{bmatrix}h \quad h\geqslant \mathbf{0} \qquad \text{—(c)}$$

这里 $\boldsymbol{h}$ 前矩阵的第 1 列向量也就是 $\boldsymbol{d}$ 极方向.

所以,从(b~c)两式已得到了极方向 $\boldsymbol{d}_{13}$, $\boldsymbol{d}_{23}$ 和 $\boldsymbol{d}$. 这是更简便的求解方法. 这一方法可应用任意阶的 $C \in R^{n\times m}$,

$$\begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

不等式方程组的场合. 即按前述方法得到 L_+、E_+ 矩阵后,直接求解

$$\begin{cases} C\{i,\ j\}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} & 1 \leqslant i < j \leqslant n \quad \forall \{i,\ j\} \\ C\{k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{n-2}\}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} & k_h \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} & k_h \neq i,\ j;\ h = 1,\ \cdots,\ n-2 \end{cases} \tag{5.3.2.30}$$

便得到 $P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 中其余的全部极方向.

§5.3.3 解的存在性条件

由以上的分析已知,(5.3.0) 式是否存在非平凡解,不能够利用矩阵 C 的秩就能够予以判断. 当矩阵 C 是 $m \times m$ 阶矩阵且可逆,(5.3.0) 式可以有非 0 解存在也可能没有非 0 解存在,同样,当矩阵 C 不是满秩的,(5.3.0) 式同样也可能存在非 0 解,也可能不存在非 0 解. 在 $m = 2$ 时可以利用以下图形说明这一点. 对于线性方程 $g_i(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$, $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$,且 $g_i(\boldsymbol{x}) = \sum_j c_{ij}x_j$,图 5.3.3.1 表示在 R_+^2 正象限上有不等式 $g_i(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 取等号时表示的直线及由箭头所指方向表示的法方向. (a)图中,g_1、$g_2 = 0$ 的系数矩阵 C 是满秩的,但相应的(5.3.0)式没有非平凡解. 这由 g_1、g_2 的法方向相反即可判定. 可以理解,当将(5.3.0)式中的 $x_i \geqslant 0$ 限制条件取掉,那么,(a)图中所表示的 $g_{1,2} \geqslant 0$ 在 R^2 全平面上有非平凡解,其解空间为坐标系第Ⅲ象限的阴影区域. 而(b)图中 $g_{1,2}$ 的法方向决定了此时(5.3.0)式存在非平凡解,且矩阵 C 也是满秩的. 类似的,(c)图中 $g_{1,2,3} = 0$ 的系数矩阵 C 是行线性相关的,相应的(5.3.0)式没有非平凡解,而(d)图系数矩阵 C 也是行

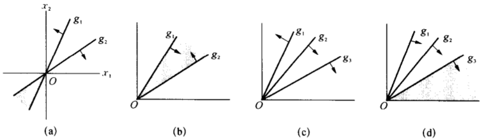


图 5.3.3.1

线性相关的，但相应的(5.3.0)式是有非0解的.

取 $\boldsymbol{x}^1 = (1, 1, \cdots, 1)^T \in R_+^m$，则

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^1 \cdot t \quad t \geqslant 0$$

是 R_+^m 正象限的角平分线. 由

$$(\boldsymbol{x}^1)^T \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0$$

即

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = 0$$

决定的解

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} -1, -1, \cdots, -1 \\ I_{(m-1)} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{z} \quad \boldsymbol{z} \in R^{m-1} \qquad \text{—(5.3.3.1)}$$

是与角平分线正交的方向向量的通解.

作

$$l_1: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^1 + \boldsymbol{\alpha}$$

则 l_1 是过 $\boldsymbol{x}^1$ 点且与角平分线正交的 R_+^m 正象限的截超平面. 因此，如果(5.3.0)式有非平凡解，则其解必是 R_+^m 正象限上的闭锥，类似图 5.3.2.1，此闭锥必与 l_1 相交. 所以，若 $P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ 非空，应当有(5.3.3.1)式给出的 $\boldsymbol{\alpha}$，使

$$\begin{cases} C(\boldsymbol{x}^1 + \boldsymbol{\alpha}) \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x}^1 + \boldsymbol{\alpha} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad \text{—(5.3.3.2)}$$

成立.

从 $\boldsymbol{x}^1 + \boldsymbol{\alpha} \geqslant \boldsymbol{0}$ 可得

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{m-1} z_i \geqslant -1 \\ z_i \geqslant -1 \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 \end{cases}$$

将 z_i 表成

$$z_i = -1 + u_i \quad u_i \geqslant 0$$

并代入以上不等式组的第一式，经整理有

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{m-1} u_i \geqslant -m \\ u_i \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 \end{cases}$$

这一不等式组的解(见本章以下内容)是

$$\boldsymbol{u} = mI_{(m-1)} \cdot \boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \quad 0 \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} s_i \leqslant 1$$

这里,$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{s}$ 都是 $m-1$ 维向量,所以有

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} + mI_{(m-1)} \cdot \boldsymbol{s}$$

将此式代入(5.3.3.1)式,得

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} -1, -1, \cdots, -1 \\ I_{(m-1)} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} + mI_{(m-1)} \cdot \boldsymbol{s} \right)$$

得

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} m-1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} -1, -1, \cdots, -1 \\ I_{(m-1)} \end{bmatrix} \boldsymbol{s} \qquad \text{—(5.3.3.3)}$$

再将(5.3.3.3)式代入(5.3.3.2)式的前 n 个不等式组

$$C \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m-1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} -1, -1, \cdots, -1 \\ I_{(m-1)} \end{bmatrix} \boldsymbol{s} \right) \geqslant \boldsymbol{0}$$

即

$$\boldsymbol{c}^1 + C \cdot \begin{bmatrix} -1, -1, \cdots, -1 \\ I_{(m-1)} \end{bmatrix} \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \quad 0 \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} s_i \leqslant 1 \quad \text{—(5.3.3.4)}$$

这里 $\boldsymbol{c}^1$ 是指的矩阵 C 的第 1 列向量. 记

$$t_1 = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} s_i \geqslant 0$$

$$t_{i+1} = s_i \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m-1$$

$$\sum_{i=1}^{m} t_i = 1$$

(5.3.3.4)可写成为

$$\sum_{j=1}^{m} t_j \boldsymbol{c}^j \geqslant \boldsymbol{0} \quad t_j \geqslant 0 \quad \sum_{j=1}^{m} t_j = 1 \qquad \text{—(5.3.3.5)}$$

$\boldsymbol{c}^j$是C矩阵的第j列向量. 由此得以下推论.

推论 5.3.3.1 (5.3.0)式有非平凡解的充要条件是(5.3.3.5)式成立,即矩阵C的列向量可以凸组合的方式构造出非负向量. ■

此推论的必要性、充分性由(5.3.3.5)式的推导即见. 由此推论可得以下结果.

系 5.3.3.2 设$i_1, i_2, \cdots, i_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$是$1, 2, \cdots, m$序列的一个子列. 若矩阵$C$的列向量中存在子列$\boldsymbol{c}^{i_j}$, $j = 1, 2, \cdots, k$, 且有k个正数$t_j > 0$, $\sum_{j=1}^{k} t_j = 1$,并使

$$\sum_{j=1}^{k} t_j \boldsymbol{c}^{i_j} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad \text{—(5.3.3.6)}$$

则(5.3.0)式存在非平凡解. 特别地, $k = 1$, $t_1 = 1$,即有上标i使

$$\boldsymbol{c}^i \geqslant \boldsymbol{0}$$

即C矩阵存在非负列向量时,(5.3.0)式存在非平凡解. ■

例 5.3.3.1 以例 5.3.2.1 中的C矩阵为例,验证以上结论.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

取C矩阵的第1、2、3列向量,并取$t_1 = .45$, $t_2 = .35$, $t_3 = .2$有

$$.45 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + .35 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + .2 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .05 \\ .95 \\ 0 \end{bmatrix} \geqslant \boldsymbol{0}$$

由以上的系,由此C矩阵决定的(5.3.0)式存在非平凡解.

在(5.3.3.6)式中取$t_j = \dfrac{1}{k}$,可得以下结论.

系 5.3.3.3 若C矩阵中的一个列向量子列$\boldsymbol{c}^{i_j}$的和

$$\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{c}^{i_j} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad \text{—(5.3.3.7)}$$

则(5.3.0)存在非平凡解. ■

例 5.3.3.2 有以下矩阵C

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

验证

$$\begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

是否存在非平凡解.

由(5.3.3.5)式,现在应有 $t_{1,2,3} > 0$, $t_1 + t_2 + t_3 = 1$,要求

$$t_1 - t_2 - t_3 \geqslant 0$$
$$-t_1 + t_2 - t_3 \geqslant 0$$
$$-t_1 - t_2 + t_3 \geqslant 0$$

易知此不等式组不能成立.因为若第 1 个不等式成立

$$t_1 - t_2 - t_3 \geqslant 0 \Rightarrow t_1 - t_2 \geqslant t_3 > 0$$

则第 2 个不等式就会有

$$-t_1 + t_2 - t_3 = -(t_1 - t_2) - t_3 < 0$$

等等.故本例 C 矩阵决定的(5.3.0)式只有平凡解.

定理 5.3.3.4 $C \in R^{n\times m}$,则或者有非 0 的 $\boldsymbol{x}$ 使

$$\begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

成立,或者有非 0 的 $\boldsymbol{t}$,使

$$\begin{cases} -C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{t} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

成立,但二者不能同时成立. ■

这一定理的推导以后会有叙述.

如例 5.3.3.2,已知

$$\begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

无非 0 解,则

$$\begin{cases} -C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{t} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

一定有非 0 解.实际上由 $-C^{\mathrm{T}} = -C$,且 $-C$ 的列向量和 > 0,由系 5.3.3.2 即知此结论,而对于例 5.3.3.1 中的矩阵 C,亦可验证

$$\begin{cases} -C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{t} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

一定无非 0 解.

附带地可以指出，在(5.3.0)式中，当 C 矩阵可逆，且 $C^{-1} \geqslant 0$ 即其逆矩阵非负，那么，(5.3.0)的解可以直接用逆矩阵表示为

$$\boldsymbol{x} = C^{-1}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^m \qquad —(5.3.3.8)$$

并应说明，若按上文的解法所得结果实质上与此是一致的.

对任一 $m \times m$ 阶矩阵 A，若 A 可逆，且 $A^{-1} \geqslant 0$，则称 A 为(广义)M—矩阵. 那么，由以上系 5.3.3.2 直接可得以下结论，若 A 是实对称矩阵，且

$$a_{ii} > 0 \quad a_{ij} \leqslant 0 (i \neq j)$$

并且 A 是行对角强优势的，即

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} |a_{ij}|$$

则 A 是 M—矩阵.

一般意义讲，如果任一矩阵 C 是 M—矩阵，那么，由 C 决定的(5.3.0)式一定有非平凡解，但反之，使(5.3.0)式有非平凡解的矩阵 C 不一定是 M—矩阵[1]. 并且容易理解，更宽松的条件是 $C \in R^{m\times m}$ 且可逆，则若 C^{-1} 中含有非负列向量，则(5.3.0)式有非平凡解.

利用解集合 $P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 中的极方向向量所具有的唯一性，可知，以(5.3.2.28)式表示的解的形式也应当具有唯一性. 然而，由于以上给出的解法本身已具有构造性，故不利用极方向的概念，也可以推出有以下结论.

推论 5.3.3.5 设(5.3.0)式的解表示为(5.3.2.28)式

$$\boldsymbol{x} = D_+ \boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \geqslant \boldsymbol{0}$$

且 D_+ 矩阵是非负的、最简的[2]，那么解集合

$$P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = D_+ \boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \in R_m\}$$

在表示形式上是唯一的. ■

证明：首先易知 $P(\cdot)$ 是锥，对任一 $\boldsymbol{x} \in P(\cdot)$，$\lambda > 0$，$\lambda\boldsymbol{x} \in P(\cdot)$. 取

$$\boldsymbol{t}^1 = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$$

---

[1] 任一 $m \times m$ 阶矩阵 A 成为 M—矩阵的判别条件，有许多个等价的形式，可见《特殊矩阵》，同前注，第 280 页，定理 4.6.5.

[2] "最简的"含义是指构造 D_+ 的 L_+、E_+ 和 A_+ 矩阵中剔除可能存在的全部相重复的列向量.

有 $$\tilde{\boldsymbol{x}}^1 = D_+ \boldsymbol{t}^1 \in P(\cdot)$$

类似以上的方法再作 $\tilde{\boldsymbol{x}}^1$ 的正交向量 $\boldsymbol{\beta}$

$$(\tilde{\boldsymbol{x}}^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0 \Rightarrow (\boldsymbol{t}^1)^{\mathrm{T}} D_+^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta} = 0$$

记以上方程的解是

$$\boldsymbol{\beta} = \Lambda_d^+ \boldsymbol{z} \quad \boldsymbol{z} \in R^{m-1}$$

其中 Λ_d^+ 是 $m \times (m-1)$ 阶矩阵即基础解系矩阵.

作

$$L: \boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}}^1 + \Lambda_d^+ \boldsymbol{z} \quad \boldsymbol{z} \in R^{m-1}$$

则这样的 $\boldsymbol{x}$ 全体为过 $\tilde{\boldsymbol{x}}^1$ 点的一个 $m-1$ 维线性流形(超平面),且 L 与 $P(\cdot)$ 相交.

记 $\boldsymbol{d}_+^j$ 是 D_+ 矩阵的第 j 列向量,且设 D_+ 是 $m \times v$ 阶矩阵,

记 $$l_j: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}_+^j \cdot t_j \quad j = 1, 2, \cdots, v$$

则这样的 l_j 是以 $\boldsymbol{d}_+^j$ 为方向向量的从 R^m 原点出发的射线. 可以求出 l_j 与 L 的交点坐标,即解以下方程

$$\boldsymbol{d}_+^j \cdot t_j = \tilde{\boldsymbol{x}}^1 + \Lambda_d^+ \boldsymbol{z}^j$$

或写成等价形式

$$[\boldsymbol{d}_+^j : -\Lambda_d^+]\begin{bmatrix} t_j \\ \boldsymbol{z}^j \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{x}}^1$$

可知矩阵 $[\boldsymbol{d}_+^j : -\Lambda_d^+]$ 是 $m \times m$ 阶满秩矩阵. 因为 $\boldsymbol{d}_+^j$ 是 D_+ 的列向量,而 Λ_d^+ 又是与 D_+ 正交的矩阵,且 Λ_d^+ 是列向量线性无关的. 由此可解得 l_j 与 L 超平面的交点 $\tilde{\boldsymbol{x}}_j$,

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_j = (z_1^j, z_2^j, \cdots, z_m^j)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{d}_+^j \, t_j \geqslant \boldsymbol{0}$$

其中应有 $t_j > 0$. 因为

$$\boldsymbol{d}_+^j \, t_j - \tilde{\boldsymbol{x}}^1 = \Lambda_d^+ \boldsymbol{z}^j \Rightarrow (\boldsymbol{t}^1)^{\mathrm{T}} D_+^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{d}_+^j \, t_j - \tilde{\boldsymbol{x}}^1) = 0$$

由此可得

$$t_j = \frac{(\boldsymbol{t}^1)^{\mathrm{T}} D_+^{\mathrm{T}} D_+ \boldsymbol{t}^1}{(\boldsymbol{t}^1)^{\mathrm{T}} D_+^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d}_+^j} > 0 \quad \begin{pmatrix} \because \boldsymbol{t}^1, D_+, \boldsymbol{d}_+^j \text{ 均非负,且} \\ (\boldsymbol{t}^1)^{\mathrm{T}} D_+^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d}_+^j \geqslant (\boldsymbol{d}_+^j)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d}_+^j > 0 \end{pmatrix}$$

作 $\tilde{\boldsymbol{x}}_j$ 为顶点的凸组合

$$\boldsymbol{x} = \sum_j s_j \tilde{\boldsymbol{x}}_j \quad s_j \geqslant 0 \quad \sum_j s_j = 1 \qquad \text{—(a)}$$

则显然这样的 x 都可使

$$Cx = \sum_j s_j C\tilde{x}_j = \sum_j s_j d_+^j t_j \geqslant 0 \quad x \geqslant 0$$

现在说明在 L 超平面上除了以上(a)式决定的 x，不再有其他的 x' 点，使(5.3.0)式成立

$$\begin{cases} Cx' \geqslant 0 \\ x' \geqslant 0 \end{cases}$$

若否，设 x' 是使(5.3.0)式成立的 L 超平面上的点，且 x' 不能用以上(a)式表出. 则任取一组

$$\tilde{s}_j > 0, \ \sum_j \tilde{s}_j = 1$$

并作

$$\tilde{x} = \sum_j \tilde{s}_j \tilde{x}_j$$

则 $\tilde{x} \in P(\cdot)$，且是 $P(\cdot)$ 的内点. 再作

$$l: x = t_1 x' + t_2 \tilde{x} \quad t_1, t_2 \geqslant 0 \quad t_1 + t_2 = 1$$

则 l 是 x'、$\tilde{x}$ 点间的连线. 但由于 $P(\cdot)$ 是闭的，且 $x' \notin P(\cdot)$，故从 $P(\cdot)$ 的内点 $\tilde{x}$ 到 x' 的连线必要穿过 $P(\cdot)$ 的边界，而 $P(\cdot)$ 的边界显然就是形如

$$d_+^i x = 0$$

决定的超平面. 这即是说，必有某个下标 i'，使 l 线段与

$$d_+^{i'} x = 0$$

相交，故

$$d_+^{i'} (t_1 x' + t_2 \tilde{x}) = 0 \quad t_1, t_2 > 0$$

有解. 此即是说 $d_+^{i'} x'$ 与 $d_+^{i'} \tilde{x}$ 的符号必是相反的. 现已知 $d_+^{i'} \tilde{x} \geqslant 0$，故必有 $d_+^{i'} x' < 0$，故 x' 不可能使(5.3.0)式成立.

从而(a)式决定的 x 全体是 L 超平面上使(5.3.0)式成立的点的全体集合，并由本章 §5.1.2 节的论述，当 D_+ 矩阵为最简形式时，(a)式的形式也是唯一的，故最简的 D_+ 矩阵也是唯一的.

将 t^1 向量替换为

$$t' = (t_1', t_1', \cdots, t_v') \quad t_i' > 0$$

并作以上的分析即知，在 $x \geqslant 0$ 即 R_+^m 正象限上任取的与 $P(\cdot)$ 子空间相交的超平面 L 上，以上结论均可成立.

由此即知推论 5.3.3.5 成立.

§5.4 R^m_+ 象限中的闭集——$\begin{cases}Cx \geqslant b \\ x \geqslant 0\end{cases}$方程组的解

§5.4.1 $\begin{cases}Cx\geqslant b \\ x\geqslant 0\end{cases}$方程组的解

考虑 $C \in R^{n\times m}$，$x \in R^m$，$b \in R^n$

$$\begin{cases}Cx \geqslant b \\ x \geqslant 0\end{cases} \qquad —(5.4.0)$$

式的解. 当 $b = 0$ 时，(5.4.0) 式就是(5.3.0). 已知(5.3.0) 式的解是 R^m_+ 正象限上的闭锥. 而当 $b \neq 0$ 时，(5.4.0) 式的解不一定是 R^m_+ 正象限上的闭锥，所以称其为 R^m_+ 上的闭集. 以下均假设 $b \neq 0$.

当(5.4.0)式有解时，其解的构造可以从(5.3.0)式的解的构造中拓展而来. 类似(5.3.2.25)式，(5.4.0)式的解可以表示成以下形式：

$$x = \Phi_+ s + L_+ u + E_+ v + \Lambda_+ t \quad t,\ v,\ u \geqslant 0 \qquad —(5.4.1.1)$$

与(5.3.2.25)式相比较，多了第一项 $\Phi_+ s$，对此稍后有具体说明. 对于 L_+、E_+ 的意义完全等同于(5.3.2.25) 式. Λ_+ 矩阵在意义上也类似于(5.3.2.25) 式，但导出 Λ_+ 矩阵时是与 Φ_+ 矩阵一并完成的.

s 是权数向量. 当 $x = 0$ 不是(5.4.0) 式的解时，

$$s \geqslant 0 \quad \sum_i s_i = 1$$

当 $x = 0$ 也是(5.4.0) 式的解，即 $b \leqslant 0$ 时，应当将 s 向量理解为

$$s \geqslant 0 \quad 0 \leqslant \sum_i s_i \leqslant 1$$

Φ_+ 矩阵中的任一个列向量 φ^j 都是(5.4.0) 式中的若干个不等式方程取等号时的解(集合) 与 R^m_+ 正象限的边界坐标超平面的交点，具体说明如下.

在 R^3_+ 空间中，习惯于称 Ox_1x_2 这样的平面为“坐标平面”. 显然 Ox_1x_2，x_1、$x_2 \geqslant 0$ 即表示是 R^3_+ 正象限的一个“边界坐标平面”. 推广至 R^m_+ 空间，称

$Ox_i = \forall(0, \cdots, 0, x_i, 0, \cdots, 0) \quad x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, m$

$Ox_ix_j = \forall(0, \cdots, 0, x_i, 0, \cdots, 0, x_j, 0, \cdots, 0),\ x_i,\ x_j \geqslant 0,\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant m$

⋮

一般地，$Ox_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}=\{\boldsymbol{x}\mid x_i\geqslant 0\quad 当\ i=i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k;\ x_i=0,当\ i\neq i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k\}\quad 1\leqslant k\leqslant m-1$ 为 R_+^m 正象限的边界超平面.

将(5.4.0)式表示成以下形式

$$\begin{cases}\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant b_i & i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\\ x_j\geqslant 0 & j=1,\ 2,\ \cdots,\ m\end{cases}\qquad —(5.4.1.2)$$

其中 $\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}$ 为矩阵 C 的第 i 行向量.

对每一个下标 i，

$$g_i:\ \boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=b_i\qquad \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\qquad —(5.4.1.3)$$

是 R_+^m 空间的超平面. g_i 在 R_+^m 正象限的各坐标轴上的非负截距不难求出，用 D_i 矩阵表示 g_i 的全部非负的截距向量所组成的矩阵

$$D_i=[\boldsymbol{x}_1^i,\ \boldsymbol{x}_2^i,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_t^i]\qquad —(5.4.1.4)$$

其中 $\boldsymbol{x}_j^i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ t,\ t\leqslant m$，都是 g_i 的非负的截距，j 下标的编号可以是随意的. 当 $t=0$，即 g_i 与 R_+^m 没有非负的截距，这即表示或者是

$$\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\leqslant\boldsymbol{0}\quad b_i>0$$

此时(5.4.0)式就是矛盾的；再或者是

$$\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\geqslant\boldsymbol{0}\quad b_i\leqslant 0$$

则(5.4.0)式中的第 i 个不等式就是冗余的可省略掉.

以下设(5.4.0)式中不包含这两种情形. 对已得到的 D_i 矩阵，作乘积

$$C\cdot D_i=[\boldsymbol{D}_i^1,\ \boldsymbol{D}_i^2,\ \cdots,\ \boldsymbol{D}_i^t]\qquad —(5.4.1.5)$$

其中 $\boldsymbol{D}_i^j$ 是列向量.

取 D_i 中的所有使 $\boldsymbol{D}_i^j\geqslant\boldsymbol{b}$ 成立的(5.4.1.4)式 D_i 中的且非负的列向量 $\boldsymbol{x}_j^i$，构造矩阵

$$D_i^+=[\boldsymbol{x}_j^i]\quad \boldsymbol{x}_j^i\geqslant\boldsymbol{0}\quad 当\ D_i^j\geqslant\boldsymbol{b}\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ h\quad —(5.4.1.6)$$

规定

$$\boldsymbol{\Phi}_+^1=[D_1^+,\ D_2^+,\ \cdots,\ D_n^+]\qquad —(5.4.1.7)$$

$\boldsymbol{\Phi}_+^1$ 矩阵是 $\boldsymbol{\Phi}_+$ 矩阵的一个子矩阵.

$\boldsymbol{\Phi}_+$ 矩阵的另一个子矩阵记为 $\boldsymbol{\Phi}_+^2$. $\boldsymbol{\Phi}_+^2$ 由以下方式给出. 设 $\boldsymbol{c}_{i_t}^{\mathrm{T}},\ t=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ 是 C 矩阵行向量中的任一组线性无关向量组，$2\leqslant k\leqslant \mathrm{rank}\,C$. 作

$$\boldsymbol{c}_{i_t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=b_{i_t}\quad t=1,\ 2,\ \cdots,\ k\qquad —(5.4.1.8)$$

有解. 设 C 矩阵的子矩阵

$$\operatorname{rank}\left[C\begin{Bmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_k \\ 1, & 2, & \cdots, & k \end{Bmatrix}\right] = k$$

则(5.4.1.8)式的解可表示为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}(i_1, i_2, \cdots, i_k) + \Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}\boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-k} \qquad —(5.4.1.9)$$

其中

$$\boldsymbol{B}(i_1, i_2, \cdots, i_k) = \begin{bmatrix} C^{-1}\begin{Bmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_k \\ 1, & 2, & \cdots, & k \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{i_1} \\ b_{i_2} \\ \vdots \\ b_{i_k} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{0}_{(m-k)} \end{bmatrix} \qquad —(5.4.1.10)$$

$\boldsymbol{0}_{(m-k)}$ 是$(m-k)$ 维 0 向量,$\boldsymbol{B}(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 是 m 维向量. 而 $\Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 是 $m\times(m-k)$ 阶矩阵,其构造等价于(5.2.19)式,只是用矩阵(符号)C 替代原式中的 A.

(5.4.1.9)式中的 $\boldsymbol{B}(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 和 $\Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 矩阵如果都是非负的,则令 $\boldsymbol{t}\geqslant\boldsymbol{0}$,由(5.4.1.9)式决定的 $\boldsymbol{x}$ 就均是 R_+^m 正象限中的向量(元素). 如果 $\boldsymbol{B}(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 和 $\Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 不是非负的,则由 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 的条件,从(5.4.1.9)式中得不等式方程组

$$\begin{cases} -C^{-1}\begin{Bmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_k \\ 1, & 2, & \cdots, & k \end{Bmatrix} C\begin{Bmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_k \\ k+1, & k+2, & \cdots, & m \end{Bmatrix}\boldsymbol{t} \geqslant -C^{-1}\begin{Bmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_k \\ 1, & 2, & \cdots, & k \end{Bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_{i_1} \\ b_{i_2} \\ \vdots \\ b_{i_k} \end{bmatrix} \\ t_i \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m-k \end{cases}$$

$$—(5.4.1.11)$$

继续解(5.4.1.11)式. 注意与(5.4.0)式相比较,(5.4.1.11)式中的变量 t_i 的数目已经减少了,即不等式方程组得到了简化. 且(5.4.1.11) 式在形式仍旧属于(5.4.0) 式所表示的同一类型. 因此按照这里给出的方法可以继续解下去,在解的过程中(5.4.1.11) 式可以得到逐步地化简而被最终解出(或判断出无解).

设(5.4.1.11)式的解表示为

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\Phi}_1^t\, \boldsymbol{s} + D_+^t\, \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0} \qquad —(5.4.1.12)$$

其中 $D_+^t = [L_+^t, E_+^t, \Lambda_+^t]$,$\boldsymbol{s}$ 仍为权数向量. 不计上标“t”,(5.4.1.12) 式中的各

矩阵的符号类于(5.4.1.1)式的意义.将(5.4.1.12)式代入(5.4.1.9)式,得

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}(i_1, i_2, \cdots, i_k) + \Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \cdot \boldsymbol{\Phi}_+^t \boldsymbol{s} + \Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} D_+^t \boldsymbol{v} \quad —(5.4.1.13)$$

则记

$$\boldsymbol{x}^j(i_1, i_2, \cdots, i_k) = \boldsymbol{B}(i_1, i_2, \cdots, i_k) + \Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \cdot \boldsymbol{\Phi}_+^t \boldsymbol{s}^j \quad —(5.4.1.14)$$

则 $\boldsymbol{x}^j(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 是(5.4.1.9)式决定的 $\boldsymbol{x}$ 在 R_+^m 边界超平面上的交点,这里

$$\boldsymbol{s}^j = (0, \cdots, 0, \underset{\text{第}j\text{个分量}}{1}, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}} \quad j = 1, 2, \cdots, v$$

$\boldsymbol{s}$ 向量的维数是在求解(5.4.1.11)式时决定的,设其为 v.

规定

$$X(i_1, i_2, \cdots, i_k) = [\boldsymbol{x}^j(i_1, i_2, \cdots, i_k)] \quad j = 1, 2, \cdots, v \quad —(5.4.1.15)$$

则 $X(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 就是这样的交点(向量)组成的矩阵.类似地,作乘积

$$C \cdot X(i_1, i_2, \cdots, i_k) = [\boldsymbol{d}_x^1, \boldsymbol{d}_x^2, \cdots, \boldsymbol{d}_x^v] \quad —(5.4.1.16)$$

其中 $\boldsymbol{d}_x^i$ 是列向量.并取 $X(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 中所有使 $\boldsymbol{d}_x^i \geqslant \boldsymbol{b}$ 的(5.4.1.15)式中的且非负的向量 $\boldsymbol{x}^j(i_1, i_2, \cdots, i_k)$,构造矩阵

$$X^+(i_1, i_2, \cdots, i_k) = [\boldsymbol{x}^j(i_1, i_2, \cdots, i_k)], \boldsymbol{x}^j(i_1, i_2, \cdots, i_k) \geqslant \boldsymbol{0}.$$

$$\text{当 } \boldsymbol{d}_x^j \geqslant \boldsymbol{b} \quad j = 1, 2, \cdots, v \quad —(5.4.1.17)$$

则

$$\boldsymbol{\Phi}_+^2 = [X^+(i_1, i_2, \cdots, i_k)] \quad —(5.4.1.18)$$

其中 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 遍取 $\boldsymbol{d}_{i_t}$, $t = 1, 2, \cdots, k$, $2 \leqslant k \leqslant \operatorname{rank} C$ 的全部线性无关向量组合.并作

$$\boldsymbol{\Phi}_+ = [\boldsymbol{\Phi}_+^1, \boldsymbol{\Phi}_+^2] \quad —(5.4.1.19)$$

即决定了 Φ_+ 矩阵.

类似地对(5.4.1.13)式中的 $\boldsymbol{v}$ 向量前的矩阵作乘积

$$C \cdot \Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} D_+^t = [\boldsymbol{d}_\Lambda^1, \boldsymbol{d}_\Lambda^2, \cdots, \boldsymbol{d}_\Lambda^s] \quad —(5.4.1.20)$$

其中 $\boldsymbol{d}_\Lambda^j$ 也是列向量.维数 s 也是在求解(5.4.1.11)式时决定的.并记

$$\Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}D_+^t = [\boldsymbol{\Lambda}^1, \boldsymbol{\Lambda}^2, \cdots, \boldsymbol{\Lambda}^s] \qquad —(5.4.1.21)$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}^j$ 也都是指列向量. 取(5.4.1.21)式中所有使 $\boldsymbol{d}_\Lambda^j \geqslant \boldsymbol{0}$ 的 $\boldsymbol{\Lambda}^j$ 构造矩阵

$$\Lambda^+\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} = [\boldsymbol{\Lambda}^j] \quad 当\ \boldsymbol{d}_\Lambda^j \geqslant \boldsymbol{0},\ j = 1, 2, \cdots, s \qquad —(5.4.1.22)$$

则(5.4.1.1)式中的 Λ_+ 由下式决定

$$\Lambda_+ = [\Lambda^+\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}] \qquad —(5.4.1.23)$$

其中 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 遍取 $\boldsymbol{d}_{i_t}$，$t = 1, 2, \cdots, k$，$2 \leqslant k \leqslant \operatorname{rank} C$ 的全部线性无关向量组合.

类似规定

$$D_+ = [L_+, E_+, \Lambda_+]$$

则(5.4.1.1)式可简化为

$$\boldsymbol{x} = \Phi_+ \boldsymbol{s} + D_+ \boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad —(5.4.1.24)$$

当 $D_+ = [0]$ 时，即表示(5.4.0)式的解是一个由若干 R_+^m 正象限中的点为顶点的凸组合(凸集).

最终可以把(5.4.0)式的解集合表示为

$$P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \Phi_+ \boldsymbol{s} + D_+ \boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \sum_i s_i = 1\} \qquad —(5.4.1.25)$$

由于以上的解法中亦设有对 C 矩阵的阶数 n、m 和秩作任何假设，故对 C 矩阵为任意的 $n \times m$ 阶实矩阵，以上解法均是可行的.

与上文所指出的一样，在解出 Φ_+、D_+ 矩阵时，可能会有重复的(相同的)列向量出现. 剔除这些重复的列向量，可得到 Φ_+、D_+ 的最简形式.

(5.4.1.25)式在形式上就是(5.1.2.22)式. 故知以上方式得到的 Φ_+ 矩阵就是 $P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 集合中的全部极点组成的矩阵，而 D_+ 矩阵由上一节的分析已知就是 P 中的全部极方向所组成的矩阵.

实际上，由(5.3.2.12～14)式、(5.3.2.20)式的分析，完全可用于这里的(5.4.1.10)式、(5.4.1.11)式. 由此即知 Φ_+ 中的任一列向量，都是

$$\widetilde{C} = \begin{bmatrix} C \\ I_m \end{bmatrix} \qquad \widetilde{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{C}\boldsymbol{x} \geqslant \widetilde{\boldsymbol{b}} \qquad —(5.4.1.7a)$$

不等式组中，某个 $m \times m$ 阶可逆子矩阵 $\widetilde{C}_I$ 决定的 $\widetilde{C}_I^{-1}\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_I$ 乘积(I 是下标子集，$|I| = m$).

因此类似地有以下推论.

推论 5.4.1.1 $C \in R^{n\times m}$, $\boldsymbol{x} \in R^m$, $\boldsymbol{b} \in R^n$ 决定的不等式组

$$\begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

的解集合 $P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 非空,且 $C\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 和 $\boldsymbol{b}\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 是 C 和 $\boldsymbol{b}$ 中 i_j 行向量(分量)组成的子矩阵、子向量. 设 $C\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 是行满秩的,若方程组

$$C\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \qquad —(5.4.1.8)$$

决定的解 $\boldsymbol{x}\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 中有某一个解 $\tilde{\boldsymbol{x}}\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 是 $P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 中的极点,则在 $C\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 矩阵中必可取到一个可逆子矩阵

$$C\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{Bmatrix}$$

并以此矩阵构造(5.4.1.8)式的解就是 $\tilde{\boldsymbol{x}}(i_1, i_2, \cdots, i_k)$,即

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{j_1} \\ \tilde{x}_{j_2} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{j_k} \end{bmatrix} = C^{-1}\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{Bmatrix} \cdot \boldsymbol{b}\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \\ \tilde{x}_{h_s} = 0 \quad s = 1, 2, \cdots, m-k \end{cases} \qquad —(5.4.1.26)$$

其中 $\{j_1, j_2, \cdots, j_k\} \cup \{h_1, h_2, \cdots, h_{m-k}\} = \{1, 2, \cdots, m\}$ ■

例 5.4.1.1

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

解

$$\begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

由单个的

$$\boldsymbol{c}_{1,2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_{1,2}$$

方程中可得

$$D_1=\begin{bmatrix}2&0\\0&\frac{2}{3}\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\qquad D_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

正截距矩阵.

由

$$C\cdot D_1=\begin{bmatrix}2&2\\-2&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\qquad C\cdot D_2=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-1&-1\end{bmatrix}$$

可知

$$\Phi_+^1=\begin{bmatrix}0\\\frac{2}{3}\\0\\0\end{bmatrix}$$

射线方向向量矩阵

$$L^1=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\qquad L^2=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\\frac{1}{3}&0&0&\frac{1}{3}\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

由

$$C\cdot L^1=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\+&-&+&-\end{bmatrix}\qquad C\cdot L^2=\begin{bmatrix}+&+&+&-\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

得

$$L_+=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\0&\frac{1}{3}&0&1&1\\1&1&\frac{1}{3}&0&0\\0&0&0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

再由 C 矩阵第 2 列向量非负知

$$E_+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

求交线，由

$$Cx = b$$

可得通解

$$x = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \qquad \text{—(a)}$$

上式等号右边的向量、矩阵不全是非负的，故由 $x \geqslant 0$ 的条件，应有

$$\begin{cases} \frac{5}{4} + \frac{5}{2}t_1 - \frac{5}{4}t_2 \geqslant 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t_1 + \frac{3}{4}t_2 \geqslant 0 \\ t_1 \geqslant 0 \\ t_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

这可表示成

$$\begin{cases} \frac{5}{2}t_1 - \frac{5}{4}t_2 \geqslant -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2}t_1 + \frac{3}{4}t_2 \geqslant -\frac{1}{4} \\ t_1,\ t_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{—(b)}$$

再解这一组已化简了的不等式方程组. 并记

$$D' = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \qquad b' = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

类似以上的过程，

$$D'_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad D'_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

且

$$D^t \cdot D_1^t = \begin{bmatrix} -\dfrac{5}{4} \\ \dfrac{3}{4} \end{bmatrix} \geqslant \boldsymbol{b}^t \quad D^t \cdot D_2^t = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{4} \\ -\dfrac{1}{4} \end{bmatrix} \geqslant \boldsymbol{b}^t$$

可得

$$\boldsymbol{\Phi}_+^{t_1} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

射线方向向量矩阵

$$L^{t_1} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{4}{5} \end{bmatrix} \qquad L^{t_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ \dfrac{4}{3} \end{bmatrix}$$

由

$$D \cdot L^{t_1} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad D \cdot L^{t_2} \geqslant \boldsymbol{0}$$

得

$$L_+^t = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{5} & 2 \\ \dfrac{4}{5} & \dfrac{4}{3} \end{bmatrix}$$

由于 D^t 没有非负列向量故 E_+^t 不用考虑. 而由

$$D^t \boldsymbol{t} = \boldsymbol{b}^t$$

得到的交点是

$$\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

也不是非负的，故亦不考虑. 这样最终得到(b)式的解

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\Phi}_+^{t_1} \boldsymbol{s} + L_+^t \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{s} + \begin{bmatrix} \dfrac{2}{5} & 2 \\ \dfrac{4}{5} & \dfrac{4}{3} \end{bmatrix} \boldsymbol{v} \qquad \text{—(c)}$$

其中 $\boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0}$. 但现在由于 $t_1 = t_2 = 0$ 也是 (b)的一个解，故，$\boldsymbol{s}$ 应取为

$$s \geqslant \mathbf{0} \quad 0 \leqslant s_1 + s_2 \leqslant 1$$

将(c)式代入(a)式，得

$$x = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{3} \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} v \qquad \text{—(d)}$$

显然地也可以简化表示

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} s'$$

这里 $s' \geqslant \mathbf{0}$, $s_1' + s_2' + s_3' = 1$.

由此即得

$$\Phi_+^2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

再作以上(d)式 v 前矩阵右乘以 C 的乘积，

$$C \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{3} \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = [0]$$

是非负的，即得

$$\Lambda_+ = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{3} \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

最终得到 $\boldsymbol{x} \in P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{4} & 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{s} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \boldsymbol{t}$$

$$\boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \sum_{i}^{4} s_i = 1 \quad \boldsymbol{t} \geqslant \boldsymbol{0}$$

易知 $\boldsymbol{s}$ 前矩阵中的各列向量均是(5.4.1.8) 式表示的不等式组的解向量. 如

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这即是推论 5.1.2.3 的结论. 同时，亦可知如对于极点 $\left(0,\ \frac{2}{3},\ 0,\ 0\right)^{\mathrm{T}}$ 可取到 $i = 1$，使这一极点是

由

$$C\{1\}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\{1\}$$

方程令

$$x_2 = C^{-1}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \cdot \boldsymbol{b}\{1\} = \frac{2}{3}$$

$$x_j = 0 \quad j = 1, 3, 4$$

的解.

同理对于极点 $\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$ 显然就是

$$C\{1, 2\}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\{1, 2\}$$

方程令

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C^{-1}\begin{Bmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{Bmatrix} \cdot \boldsymbol{b}\{1, 2\} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$x_{3,4} = 0$$

的解.

此即推论 5.4.1.1 的结论.

例 5.4.1.2

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解

$$\begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

注意这里的

$$C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

是不相容方程组.

有

$$D_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad D_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

易知

$$\boldsymbol{\Phi}_+^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

非负的射线方向向量上有

$$L^2=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}\qquad C\cdot L^2=\begin{bmatrix}+\\ 0\\ +\end{bmatrix}$$

故

$$L_+=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

现 C 矩阵的第 1 列向量非负，故

$$E_+=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

两两不等式取等号时的交点可写成以下矩阵，

$$\begin{bmatrix}\frac{7}{20} & \frac{4}{11} & \frac{2}{7}\\ \frac{9}{20} & \frac{9}{22} & \frac{3}{7}\end{bmatrix}$$

且

$$C\cdot\begin{bmatrix}\frac{7}{20} & \frac{4}{11} & \frac{2}{7}\\ \frac{9}{20} & \frac{9}{22} & \frac{3}{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{7}\\ -1 & -\frac{19}{22} & -1\\ 1.075 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

与 $\boldsymbol{b}$ 向量比较知，由大于(等于)$\boldsymbol{b}$ 向量的以上矩阵的列向量作

$$\Phi_+^2=\begin{bmatrix}\frac{7}{20} & \frac{4}{11}\\ \frac{9}{20} & \frac{9}{22}\end{bmatrix}$$

最终得解

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2 & \frac{7}{20} & \frac{4}{11}\\ 0 & \frac{9}{20} & \frac{9}{22}\end{bmatrix}\boldsymbol{s}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

这里

$$\boldsymbol{s}\geqslant\boldsymbol{0}\quad s_1+s_2=1\quad \boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}$$

解的几何意义可以由下图给出.

图 5.4.1.1 中 $l_{1,2,3}$ 是本例中前 3 个不等式取等号时所决定的直线. $l_{1,2,3}$ 直线上的箭头是各自的法方向,由此即知满足本例不等式方程组的解空间即为图中阴影区域. 显然这个阴影区域由 3 个交点 a、b、c 及 2 条射线 $L_{1,2}$ 组成. 以上给出的解的形式即是

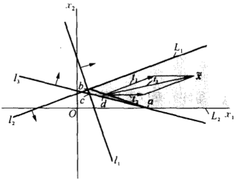


图 5.4.1.1

$$x = \tilde{a} \cdot s_1 + \tilde{b} \cdot s_2 + \tilde{c} \cdot s_3 + \\ l_a^1 \cdot u_1 + l_a^2 \cdot u_2$$

其中$\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ 分别是交点 a、b、c 的坐标向量,l_a^1、l_a^2 则是射线 $L_{1,2}$ 的方向向量,s_i 是权数, u_1, $u_2 \geqslant 0$. 且若记

$$\tilde{x}^1 = \tilde{a} \cdot s_1 + \tilde{b} \cdot s_2 + \tilde{c} \cdot s_3$$

$$\tilde{x}^2 = l_a^1 \cdot u_1 + l_a^2 \cdot u_2$$

则$\tilde{x}^1$ 是以 a、b、c 为顶点所组成的(凸组合)单纯形中的点,如图中的 $\triangle abc$. $\tilde{x}^2$ 则是以射线 $L_{1,2}$ 的方向向量为方向的 2 个向量的正线性组合. 阴影区域中的任一点,如图中$\tilde{x}$ 都可以分解成 $\triangle abc$ 中的一个点,如 $d = \tilde{x}^1$ 再加上由 d 点出发且分别与 $L_{1,2}$ 平行的 2 个向量 t_1、t_2 的和 t_3,显然,这等价于有 $u_{1,2} \geqslant 0$,使

$$t_3 = t_1 + t_2 \Leftrightarrow \tilde{x}^2 = l_a^1 u_1 + l_a^2 u_2$$

且
$$\tilde{x} = \tilde{x}^1 + \tilde{x}^2$$

这即是(5.4.1.24)式给出的解的形式的几何意义所在. 因此,以上给出的(5.4.0)式的解的构造方法,本质就是单纯形—射线构造法.

例 5.4.1.3 $n = m = 3$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

解

$$\begin{cases} Cx \geqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

直接写出总的正截距矩阵(剔除重复),

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

用这一矩阵右乘以 C 矩阵，得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 4 & -2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -2 & -2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

拿这个结果与 $\boldsymbol{b}$ 向量比较，可知

$$\boldsymbol{\Phi}_+^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

交点：由

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

得解为

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

再由 $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 得

$$\begin{cases} t \geqslant 3 \\ t \geqslant 0 \end{cases}$$

故有 $$t = 3 + u \quad u \geqslant 0$$

可得满足 $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的解是

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad u \geqslant 0 \qquad \text{—(a)}$$

再由

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-3x_3=1\\-x_1-x_2-3x_3=-2\end{cases}$$

得解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-3\\5\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9\\-12\\1\end{bmatrix}t$$

再解

$$\begin{cases}9t\geqslant 3\\-12t\geqslant -5\\t\geqslant 0\end{cases}\qquad D'=\begin{bmatrix}9\\-12\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{b}'=\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}$$

有截距矩阵

$$\left[\frac{1}{3},\ \frac{5}{12}\right]$$

由

$$\begin{bmatrix}9\\-12\end{bmatrix}\times\left[\frac{1}{3},\ \frac{5}{12}\right]=\begin{bmatrix}3 & \frac{15}{4}\\-4 & -5\end{bmatrix}$$

两列向量均大于(等于) $\boldsymbol{b}'$.

故得

$$t=\frac{1}{3}s_1+\frac{5}{12}s_2\quad s_{1,2}\geqslant 0\quad s_1+s_2=1$$

代入以上 $\boldsymbol{x}$ 的解,得

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-3\\5\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9\\-12\\1\end{bmatrix}\left(\frac{1}{3}s_1+\frac{5}{12}s_2\right)$$

化简可得

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0 & \frac{3}{4}\\1 & 0\\\frac{1}{3} & \frac{5}{12}\end{bmatrix}\boldsymbol{s}\quad s_{1,2}\geqslant 0\quad s_1+s_2=1 \qquad \text{—(b)}$$

再由

$$\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=-2\\-x_1-x_2-3x_3=-2\end{cases}$$

得解

$$x=\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}t$$

再解

$$\begin{cases}t\geqslant 0\\-t\geqslant -2\end{cases}$$

得 $$t=2s\quad 0\leqslant s\leqslant 1$$

所以

$$x=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\\0&0\end{bmatrix}s\quad s_{1,2}\geqslant 0\quad s_1+s_2=1 \qquad \text{—(c)}$$

最后从

$$Cx=b$$

中得到的交点是

$$\begin{bmatrix}-3\\5\\0\end{bmatrix}$$

并非是非负的.

故得到交点矩阵,是(a)~(c)式中等号右边的常数(向量)项或 s 权向量前的矩阵.但注意(c)式的矩阵的列向量已包含在 Φ_+^1 矩阵中,剔除这一重复的向量,得到

$$\begin{bmatrix}0&0&\frac{3}{4}\\5&1&0\\3&\frac{1}{3}&\frac{5}{12}\end{bmatrix}$$

用这个矩阵右乘 C 矩阵,得

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\-2&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-14&-2&-2\end{bmatrix}$$

与 $\boldsymbol{b}$ 向量比较知

$$\boldsymbol{\Phi}_+^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}$$

现在射线方向向量只有(a)式 u 参量前的向量

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

右乘 C 矩阵,得

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \ngeqslant \mathbf{0}$$

故不用. C 矩阵也没有非负列向量,E_+ 不予考虑. 最终得到解是

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 2 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{bmatrix} \boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{s} \geqslant \mathbf{0} \quad \sum_i^6 s_i = 1$$

解空间是一个由 6 个顶点组成的凸组合而不是一个锥. 但应说明本例的结果不表示当 $n = m$ 时不等式(5.4.0)式的解空间就一定是凸多面体. 很容易构造出 $n = m$ 时不等式方程组的解是闭锥的例子.

如

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

容易得到

$$\begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

的解是

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{s} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{8}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

这里

$$s \geqslant \mathbf{0} \quad s_1 + s_2 = 1 \quad \boldsymbol{u} \geqslant \mathbf{0}$$

其解空间即为 R_+^3 正象限上的闭锥.

§5.4.2 解的存在性条件

对于

$$\begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

形式的不等式组解的存在性条件,类似于关于推论 5.3.3.2 的推导,取

$$\boldsymbol{x}^1 = (1,\ 1,\ \cdots,\ 1)^{\mathrm{T}}$$

作与 $\boldsymbol{x}^1$ 正交的方向向量 $\boldsymbol{\alpha}$

$$(\boldsymbol{x}^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0$$

有

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ & I_{(m-1)} & & \end{bmatrix} \boldsymbol{z} \quad \boldsymbol{z} \in R_{m-1}$$

作 R_+^m 角平分线上过 $\boldsymbol{x}^1 M$ 点的截(超)平面 l_M,M 是某一正实数

$$l_M:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^1 M + \boldsymbol{\alpha} \quad M > 0$$

并令

$$\begin{cases} C \cdot (\boldsymbol{x}^1 M + \boldsymbol{\alpha}) \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x}^1 M + \boldsymbol{\alpha} \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

则由

$$\boldsymbol{x}^1 M + \boldsymbol{\alpha} \geqslant \mathbf{0}$$

可得

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{m-1} z_i \geqslant -M \\ z_i \geqslant -M \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1 \end{cases}$$

作变换 $$z_i = u_i - M$$

则以上 z_i 的不等式可取以下形式

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{m-1} u_i \geqslant -m \cdot M \\ u_i \geqslant 0 \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1 \end{cases}$$

有解

$$\boldsymbol{u} = mM \cdot I_{(m-1)} \cdot \boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \quad 0 \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} s_i \leqslant 1$$

得到

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} -M \\ -M \\ \vdots \\ -M \end{bmatrix} + mMI_{(m-1)} \cdot \boldsymbol{s}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} (m-1)M \\ -M \\ -M \\ \vdots \\ -M \end{bmatrix} + mM \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ & I_{(m-1)} & & \end{bmatrix} \boldsymbol{s}$$

将此 $\boldsymbol{\alpha}$ 代入

$$C \cdot (\boldsymbol{x}^1 M + \boldsymbol{\alpha}) = C \cdot \left(\begin{bmatrix} M \\ M \\ \vdots \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m-1)M \\ -M \\ -M \\ \vdots \\ -M \end{bmatrix} + mM \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ & I_{(m-1)} & & \end{bmatrix} \boldsymbol{s} \right)$$

$$\geqslant \boldsymbol{b}$$

可得到

$$\boldsymbol{c}^1 + C \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ & I_{(m-1)} & & \end{bmatrix} \boldsymbol{s} \geqslant \frac{\boldsymbol{b}}{mM}$$

其中 $\boldsymbol{c}^1$ 是 C 的第 1 列向量. 仍设

$$t_1 = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} s_i \geqslant 0$$

$$t_{i+1} = s_i \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m-1$$

$$\sum_{i=1}^{m} t_i = 1$$

并仍记 mM 为 M,

便有

$$\sum_{j=1}^{m} t_j \boldsymbol{c}^j \geqslant \frac{\boldsymbol{b}}{M} \quad t_j \geqslant 0 \quad \sum_{j=1}^{m} t_j = 1 \qquad \text{—(5.4.2.1)}$$

其中 $\boldsymbol{c}^j$ 为 C 的第 j 列向量.

故有以下结论.

推论 5.4.2.1 (5.4.0)式有解的充要条件是存在正数 $M > 0$ 及 $t_j \geqslant 0$ $\sum_{j=1}^{m} t_j = 1$，使(5.4.2.1) 式成立. ■

系 5.4.2.2 若存在 $t_j \geqslant 0$ $\sum_{j=1}^{m} t_j = 1$，使

$$\sum_{j=1}^{m} t_j \boldsymbol{c}^j > \boldsymbol{0}$$

则(5.4.0)式有解. 特别地，当存在 $\boldsymbol{c}^k > \boldsymbol{0}$ 则(5.4.0) 式有解. ■

系 5.4.2.3 若 $\boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{0}$，则(5.4.0) 式有解. ■

推论 5.4.2.1 的意义类似于推论 5.3.2.2. 由于 M 是可以任取的，所以，令 $M \to +\infty$，则(5.4.2.1) 式即为(5.3.3.5) 式. 但因为 $\boldsymbol{b}$ 向量是可以严格大于 0 的，故可知，(5.4.0) 式有解的**必要条件**是其对应的齐次不等式方程组

$$\begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

有非 0 解. 但可得以下推论：

推论 5.4.2.4 如果(5.4.0)式对应的齐次不等式方程组

$$\begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

有非 0 解，且 $\boldsymbol{x} \in P(C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 可表示成

$$\boldsymbol{x} = D_+^0 \boldsymbol{u} \quad D_+^0 \geqslant 0 \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$$

若 $C \cdot D_+^0$ 乘积矩阵的行向量中，不含 $\boldsymbol{0}$ 向量，则对任意的 $\boldsymbol{b} \in R^n$

$$\begin{cases} C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

恒有解. ■

这只要取 $\boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x} = D_+^0 \boldsymbol{u}$，令 $\boldsymbol{u} \to +\infty$ 并注意到总有 $C \cdot D_+^0 \geqslant 0$ 就可知以上推论成立. 由此推论可知，在满足以上条件时，由于对任意的 $\boldsymbol{b} \in R^n$，(5.4.0) 式都可以有解，故隐含了当

$$C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

为不相容方程组时,(5.4.0)式依然有解的情形(如例5.4.1.2).但这里的 $C\cdot D_+^0$ 乘积矩阵的行向量中不含 $\mathbf{0}$ 向量这一条件,对(5.4.0)式有解并非必要.

类似地也有唯一性的推论.

推论 5.4.2.5 若 $P(Cx\geqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqslant \mathbf{0})$ 非空,且 $P(\cdot)$ 集合由(5.4.1.25)式表示,则其中的矩阵 D_+ 若是最简的,则其表示形式是唯一的. ■

在上文中已指出,若(5.4.0)式有解,则对 $\boldsymbol{x}\in P(C\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqslant \mathbf{0})$

$$\boldsymbol{x}=\Phi_+\boldsymbol{s}+D_+\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{s},\ \boldsymbol{u}\geqslant \mathbf{0}\quad \sum_i s_i=1$$

当 D_+ 不存在时,$P(C\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqslant \mathbf{0})$ 为有界凸组合,否则,$P(C\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqslant \mathbf{0})$ 便是无界的.当 $P(C\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqslant \mathbf{0})$ 为无界时,它可能是一个闭锥(如 $\boldsymbol{b}\geqslant \mathbf{0}$),也可能不是.设 $P(C\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqslant \mathbf{0})$ 非空,以下考虑 $P(\cdot)$ 成为有界凸组合的条件.

$P(C\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqslant \mathbf{0})$ 为有界的条件,很显然就是在 $\boldsymbol{x}\in P(\cdot)$ 的表示形式中 $D_+\boldsymbol{u}$ 项不存在.由 D_+ 矩阵的构造,这又表示 L_+、E_+ 与 Λ_+ 三项(矩阵)均不存在.可将这一条件表示成以下形式

推论 5.4.2.6(有界性)若 $P(C\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqslant \mathbf{0})$ 非空,则对任一 $\boldsymbol{x}\in P(C\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqslant \mathbf{0})$ $\|\boldsymbol{x}\|<+\infty$ 的充要条件是

$$P(C\boldsymbol{x}\geqslant \mathbf{0},\ \boldsymbol{x}\geqslant \mathbf{0})=\{\mathbf{0}\}$$ ■

这一推论可从 D_+ 矩阵的各列向量均为 $P(C\boldsymbol{x}\geqslant \mathbf{0},\ \boldsymbol{x}\geqslant \mathbf{0})$ 集合的极方向这一性质推知.

作为一个特例,可知,若 $P(C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqslant \mathbf{0})$ 非空,则 $P(\cdot)$ 有界的充要条件是 $P(C\boldsymbol{x}=\mathbf{0},\ \boldsymbol{x}\geqslant \mathbf{0})=\{\mathbf{0}\}$ [1].

§5.5 $A\boldsymbol{x}\geqslant \mathbf{0}$ 齐次线性不等式方程组的解

§5.5.1 $A\boldsymbol{x}\geqslant \mathbf{0}$ 方程组的解

设 $A\in R^{n\times m}$, $n\neq m$,考虑由

$$A\boldsymbol{x}\geqslant \mathbf{0}\qquad —(5.5.0)$$

决定的齐次线性方程组的解.用 $P(A\boldsymbol{x}\geqslant \mathbf{0})$ 表示上述方程组的解集合.

先设 $\operatorname{rank} A=k\leqslant n<m$.仍将 A 作分块处理

[1] 见《非线性最优化》,前注,第42页,推论2.2.5.

$$A=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\quad A_{11}\in R^{k\times k}$$

且设 $\operatorname{rank} A_{11}=k$. 并记 $A_1=[A_{11},A_{12}]\quad A_2=[A_{21},A_{22}]$

则从

$$A_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\qquad —(5.5.1.1)$$

等式方程组中可得到基础解系矩阵

$$\Lambda=\begin{bmatrix}-A_{11}^{-1}A_{12}\\I_{(m-k)}\end{bmatrix}\quad \Lambda\in R^{m\times(m-k)}\qquad —(5.5.1.2)$$

因此 A 的零度空间是

$$N(A)=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}=\Lambda\boldsymbol{t}\quad \boldsymbol{t}\in R^{m-k}\}\qquad —(5.5.1.3)$$

作 $N(A)$ 的正交补空间. 构造

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0\quad \boldsymbol{x}\in N(A)$$

利用(5.5.1.3)式,上式等价于

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$$

由于 $\boldsymbol{t}\in R^{m-k}$ 是任取的,故必应有

$$\Lambda^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}\qquad —(5.5.1.4)$$

由 Λ 的构造,作

$$\Pi=\begin{bmatrix}I_k\\A_{21}^{\mathrm{T}}(A_{11}^{-1})^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\quad \Pi\in R^{m\times k}\qquad —(5.5.1.5)$$

可知有

$$\Lambda^{\mathrm{T}}\Pi=[0]$$

这里即是利用逆矩阵方法直接构造出 $N(A)$ 的正交补空间中的一组基向量 Π 而没有必要去利用 Λ 矩阵的列向量组的多重矢量积算法来构造 Π 矩阵. 故(5.5.1.4)式的 $\boldsymbol{\beta}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\beta}=\Pi\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{v}\in R^{k}\qquad —(5.5.1.6)$$

因此,作

$$\boldsymbol{x}=\Lambda\boldsymbol{t}+\Pi\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{t}\in R^{m-k}\quad \boldsymbol{v}\in R^{k}\qquad —(5.5.1.7)$$

并将其代入(5.5.1.1)式,应要求有

$$A_1(\Lambda t + \Pi v) \geqslant \mathbf{0}$$

成立. 且因为

$$A_1\Lambda = \mathbf{0}$$

故上式等价于

$$A_1\Pi v \geqslant \mathbf{0}$$

若记

$$B = A_1\Pi \quad B \in R^{k\times k} \qquad —(5.5.1.8)$$

应有

$$Bv \geqslant \mathbf{0} \quad v \in R^k \qquad —(5.5.1.9)$$

由于这样得到 B 矩阵一定可逆(详见以下分析),故从(5.5.1.9)式中能解出(由§5.2 节),

$$P(Bv \geqslant \mathbf{0}) = \{v \mid v = B^{-1}u \quad u \in R_+^k\} \qquad —(5.5.1.10)$$

如果 rank $A = k = n$, 将(5.5.1.10) 式关于 v 的解 $v = B^{-1}u$ 代回到(5.5.1.7) 式,得

$$x = \Lambda t + \Pi B^{-1}u \quad t \in R^{m-k} \quad u \in R_+^k \qquad —(5.5.1.10a)$$

就是(5.5.0)式的最终解.

如果 $n > k$,则将(5.5.1.7) 式代入(5.5.0) 式的后 $n-k$ 个不等式,应要求成立

$$A_2(\Lambda t + \Pi v) \geqslant \mathbf{0}$$

且由于 A_2 与 A_1 是行向量线性相关的,所以总有

$$A_2 \cdot \Lambda = \mathbf{0}$$

所以应要求有

$$A_2\Pi v \geqslant \mathbf{0} \qquad —(5.5.1.11)$$

综合考虑(5.5.1.9) 式及其解,可知,(5.5.1.11) 式中的 v 应取为 $v \in P(Bv \geqslant \mathbf{0})$,故将

$$v = B^{-1}u \quad u \in R_+^k$$

的关系代入(5.5.1.11)式,并记

$$G_0 = \Pi B^{-1} \qquad —(5.5.1.12)$$

G_0 是 $m \times k$ 阶矩阵，以及

$$C = A_2 G_0 \qquad —(5.5.1.13)$$

经整理可得到解约束方程组

$$\begin{cases} C\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad —(5.5.1.14)$$

其中 C 为 $(n-k)\times k$ 阶矩阵，$\boldsymbol{u}$ 为 k 维向量，而(5.5.1.14) 式就是已在以上章节中详细分析过了的不等式方程组，利用那里的方法可以顺利解出(5.5.1.14) 式(或判断出无非 0 解)，从而最终得到(5.5.0) 式的解. 更具体的分析也可见下文.

(5.5.1.14)式即是(5.5.0)式中 A 矩阵含有行向量线性相关时对于参变量 $\boldsymbol{u}$ 的取值空间 R_+^k 施加的限制条件. 所以，称它为**"解约束方程"**. 这里所谓的"解"即指由 A 中的极大线性无关行向量组 $\boldsymbol{a}_{i_j}$ 组成的不等式组 $\boldsymbol{a}_{i_j}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \cdots, k$ 的解.

在不考虑(5.5.1.11)～(5.5.1.14)式时，(5.5.1.9)式的解集合中，$\boldsymbol{u}$ 的取值空间是整个 R_+^k 正象限. 在考虑了行向量之间的线性相关不等式方程组的约束条件后，$\boldsymbol{u}$ 的取值空间便需满足解约束方程组(5.5.1.14) 式的限制条件，除非(5.5.1.14) 式中的矩阵 $C \geqslant 0$，否则，$\boldsymbol{u}$ 的取值空间就只能是 R_+^k 上的某个闭锥(子集合)，即(5.5.1.14) 式的解集合 $\boldsymbol{u} \in P(C\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0})$.

若记(由(5.3.2.28)式)，

$$P(C\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}) = \{\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} = D_+ \boldsymbol{z} \quad \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0}\}$$

则(5.5.1.9)式的解，就是

$$P(B\boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0}) = \{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} = B^{-1} D_+ \boldsymbol{z} \quad \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0}\} \qquad —(5.5.1.15)$$

这样，(5.5.0)式的解可表示成为

$$P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \Lambda \boldsymbol{t} + G_0 D_+ \boldsymbol{z} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-k} \quad \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0}\} \qquad —(5.5.1.16)$$

以下为了便于推导分析，也使用

$$P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \Lambda \boldsymbol{t} + \Pi \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-k} \quad \boldsymbol{v} \in P(B\boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0})\} \qquad —(5.5.1.16a)$$

的形式.

并可注意到，当 $\operatorname{rank} A = n$，总可以有

$$P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \Lambda \boldsymbol{t} + G_0 \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-n} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^n\} \qquad —(5.5.1.16b)$$

由上文已指出的，在 A 矩阵不可逆时，(5.5.1.16) 式中，一定含有 $\Lambda\{\cdot\}\boldsymbol{t}$ $\boldsymbol{t} \in R^{m-k}$ 一项，这时，$\Lambda\{\cdot\}$ 基础解系矩阵以及 $G_0 D_+$ 矩阵的形式都不是唯一的(可见下一节分析). 这样，$\Lambda\{\cdot\}$、$G_0 D_+$ 矩阵的列向量就都不是 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 的极方向向

量，而只是构造 $P(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})$ 集合的一组基方向向量. 并且，其中 $\Lambda\{\cdot\}$ 的列向量之间是线性无关的，而 G_0D_+ 乘积矩阵的列向量之间甚至也是线性相关的，但是，G_0D_+ 的最简形式是其任一列向量都不能由其他列向量的非负线性组合表出.

例 5.5.1.1

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&-3&1&1\\2&0&1&-3&-2\\-4&-4&-9&11&8\end{bmatrix}\qquad \text{解 } A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$$

这里 rank $A=2$. 由于 $A\begin{Bmatrix}1,2\\1,2\end{Bmatrix}$ 子矩阵可逆，构造

$$\Lambda=\begin{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-2\\2&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-3&1&1\\1&-3&-2\end{bmatrix}\\ I_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&1\\-\frac{7}{4}&\frac{5}{4}&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\Lambda^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{7}{4}&1&0&0\\\frac{3}{2}&\frac{5}{4}&0&1&0\\1&1&0&0&1\end{bmatrix}\qquad \Pi=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\\frac{1}{2}&\frac{7}{4}\\-\frac{3}{2}&-\frac{5}{4}\\-1&-1\end{bmatrix}$$

$$B=A\begin{Bmatrix}1,2\\1,2,3,4,5\end{Bmatrix}\Pi=\begin{bmatrix}1&-2&-3&1&1\\2&0&1&-3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\\frac{1}{2}&\frac{7}{4}\\-\frac{3}{2}&-\frac{5}{4}\\-1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3&-9.5\\9&7.5\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{63}\begin{bmatrix}7.5&9.5\\-9&-3\end{bmatrix}$$

$$G_0 = \Pi B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{4} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{4} \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{63}\begin{bmatrix} 7.5 & 9.5 \\ -9 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{63}\begin{bmatrix} 7.5 & 9.5 \\ -9 & -3 \\ -12 & -0.5 \\ 0 & -10.5 \\ 1.5 & -6.5 \end{bmatrix}$$

$$C = A\left\{\begin{matrix} & & 3 & & \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \end{matrix}\right\} \cdot G_0 = [-4, -4, -9, 11, 8] \cdot \frac{1}{63}\begin{bmatrix} 7.5 & 9.5 \\ -9 & -3 \\ -12 & -0.5 \\ 0 & -10.5 \\ 1.5 & -6.5 \end{bmatrix}$$

$$= [2, -3]$$

所以，可得到解约束方程组

$$\begin{cases} 2u_1 - 3u_2 \geqslant 0 \\ u_1, u_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

上式的解显然是

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{z} \quad \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0}$$

由

$$\Pi B^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{63}\begin{bmatrix} 7.5 & 9.5 \\ -9 & -3 \\ -12 & -0.5 \\ 0 & -10.5 \\ 1.5 & -6.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{63}\begin{bmatrix} \frac{83}{12} & 7.5 \\ -5.5 & -9 \\ -\frac{37}{6} & -12 \\ -3.5 & 0 \\ -\frac{17}{12} & 1.5 \end{bmatrix}$$

最终得到的解是

$$
\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1\\ -\frac{7}{4} & \frac{5}{4} & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{t}+\frac{1}{63}\begin{bmatrix}\frac{83}{12} & 7.5\\ -5.5 & -9\\ -\frac{37}{6} & -12\\ -3.5 & 0\\ -\frac{17}{12} & 1.5\end{bmatrix}\boldsymbol{z}\quad \boldsymbol{t}\in R^3\quad \boldsymbol{z}\in R_+^2 \qquad \text{—(a)}
$$

可以验证由上式决定的 $\boldsymbol{x}$ 代入不等式方程组得

$$
A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}\geqslant \boldsymbol{0}\quad (z_1, z_2\geqslant 0) \qquad \text{—(b)}
$$

注意到因为 A 矩阵存在行向量间的线性相关关系，所以，$A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 一定含有矛盾(子)方程组. 由以上关系可知，在本例

$$
\begin{aligned}
g_1:&\quad x_1-2x_2-3x_3+x_4+x_5\geqslant 0\\
g_2:&\quad 2x_1+x_3-3x_4-2x_5\geqslant 0\\
g_3:&\quad -4x_1-4x_2-9x_3+11x_4+8x_5\geqslant 0
\end{aligned}
$$

的不等式方程组中

$$
(1)\begin{cases}g_1>0\\ g_2>0\\ g_3=0\end{cases}\qquad (2)\begin{cases}g_1>0\\ g_2=0\\ g_3>0\end{cases}\qquad (3)\begin{cases}g_1=0\\ g_2=0\\ g_3=0\end{cases}
$$

都是可实现的，而不论对 $z_1, z_2\geqslant 0$ 如何取值，

$$
(4)\begin{cases}g_1=0\\ g_2>0\\ g_3>0\end{cases}
$$

都是不可能的. 因而不能冒然说

$$
g_1=0,\ g_2=0,\ g_3=0
$$

这三个单独的方程所决定的超平面总是不等式解集合的边界超平面.

造成这个情形的原因是 $g_i(\boldsymbol{x})$ 之间存在线性相关. 任取 $z_1, z_2\geqslant 0$，如 $z_1=$

$z_2 = 1$ 由本例(a)式,可得零度空间的一个法方向是

$$\boldsymbol{\beta}^0 = \frac{1}{63}\begin{bmatrix} \frac{83}{12} & \frac{15}{2} \\ -\frac{11}{2} & -9 \\ -\frac{37}{6} & -12 \\ -\frac{7}{2} & 0 \\ -\frac{17}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{63}\begin{bmatrix} \frac{173}{12} \\ -\frac{29}{2} \\ -\frac{109}{6} \\ -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

并作

$$(\boldsymbol{\beta}^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}^0 = 0$$

的解,可得

$$\boldsymbol{\alpha}^0 = \begin{bmatrix} \frac{174}{173} & \frac{218}{173} & \frac{42}{173} & -\frac{1}{173} \\ & I_4 & & \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R^4$$

任取 $\boldsymbol{u} \in R^4$,作

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}^0 \cdot t + \boldsymbol{\beta}^0 \cdot s \quad t,\ s \in R \tag{c}$$

是在 R^5 空间中由(a)式决定的闭锥子空间上取了一个过原点的截平面,并且在这个截平面上已规定了一个坐标系 Ots.

将(c)式代入原不等式组

$$A \cdot (\boldsymbol{\alpha}^0 \cdot t + \boldsymbol{\beta}^0 \cdot s) = \frac{1}{173}\begin{bmatrix} -172 & -301 & 215 & 172 \\ 348 & 609 & -435 & -348 \\ -1\,388 & -2\,429 & 1\,735 & 1\,388 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \cdot t + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{27}{14} \end{bmatrix} \cdot s$$

$$\geqslant \mathbf{0}$$

记

$$k = 4u_1 + 7u_2 - 5u_3 - 4u_4$$

则上式可化简为

$$g_1: -\frac{43}{173}k \cdot t + \frac{3}{2}s \geqslant 0$$

$$g_2: \quad \frac{87}{173}k \cdot t + \frac{1}{3}s \geqslant 0$$

$$g_3: -\frac{347}{173}k \cdot t + \frac{27}{14}s \geqslant 0$$

现在在 Ots 坐标平面上 $g_{1,2,3}=0$ 是交于原点的三条直线. 设 $k>0$,则其图形如图 5.5.1.1.

由 g_2、$g_3=0$ 直线按其法方向所夹成的阴影区域为原不等式组在 Ots 平面上的解空间. 由图可见 $g_1=0$, $g_{2,3}>0$ 不属于解空间.

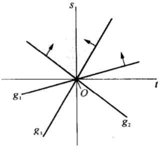


图 5.5.1.1

对于 $n>m$ 的情形可分为二类,其一是 $\operatorname{rank} A<m$, $n>m$. 这一情况还可包括 $n=m$, $\operatorname{rank} A<m$ 在内,在解法上与本节前面的方法完全一致;其二是 $\operatorname{rank} A=m$, $n>m$ 的情形,本质上仍与以上方法相似,区别在于现零度空间 $N(A)$ 仅包含 R^m 坐标系的原点一个点,因此可以直接运用(5.5.1.9)式$\left(\text{设 } A\begin{Bmatrix}1,\ 2,\ \cdots,\ m\\1,\ 2,\ \cdots,\ m\end{Bmatrix}\text{满秩}\right)$,并令

$$B=A\begin{Bmatrix}1,\ 2,\ \cdots,\ m\\1,\ 2,\ \cdots,\ m\end{Bmatrix}\quad \text{及}\quad B\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{x}=B^{-1}\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{u}\in R_+^m$$

$$G_0=B^{-1}$$

$$C=A\begin{Bmatrix}m+1,\ m+2,\ \cdots,\ n\\1,\ 2,\ \cdots,\ m\end{Bmatrix}\cdot G_0\quad \text{及}\begin{cases}C\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}$$

从而再解出(5.5.1.14)式,可得到 $\operatorname{rank} A=m$, $n>m$ 情形下的解

$$P(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=B^{-1}\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{u}\in P(C\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0})\}\qquad \text{—(5.5.1.17)}$$

这里还可以有另一种解法,即对矩阵 A 中的所有的极大线性无关向量组 $\boldsymbol{a}_{i_t}^{\mathrm{T}}$, $t=1, 2, \cdots, m$,求解方程组

$$\boldsymbol{a}_{i_t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant 0\quad t=1,\ 2,\ \cdots,\ m\qquad \text{—(5.5.1.18)}$$

其中 $\boldsymbol{a}_{i_t}^{\mathrm{T}}$ 是 A 的行向量.

记(5.5.1.18)式的解是

$$\boldsymbol{x}=A^{-1}\begin{Bmatrix}i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_m\\1,\ 2,\ \cdots,\ m\end{Bmatrix}\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{v}\in R_+^m\qquad \text{—(5.5.1.19)}$$

并记 $\boldsymbol{a}^j\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_m\}$ 为

$$A^{-1}\begin{Bmatrix}i_1, & i_2, & \cdots, & i_m\\1, & 2, & \cdots, & m\end{Bmatrix}$$

矩阵的第 j 行向量. 则记

$$\boldsymbol{a}^j\{i_1, i_2, \cdots, i_m\}^+ = \boldsymbol{a}^j\{i_1, i_2, \cdots, m\}$$

$$\text{当 } A\begin{Bmatrix} j_1, & j_2, & \cdots, & j_{n-m} \\ 1, & 2, & \cdots, & m \end{Bmatrix} \cdot \boldsymbol{a}^j\{i_1, i_2, \cdots, i_m\} \geqslant \boldsymbol{0}$$

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_m\} \cup \{j_1, j_2, \cdots, j_{n-m}\} = \{1, 2, \cdots, n\}$$

构造

$$B^+ = [\boldsymbol{a}^j\{i_1, i_2, \cdots, i_m\}^+] \qquad —(5.5.1.20)$$

即 B^+ 是所有的$\{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$下标序列决定的全部$\boldsymbol{a}^j\{i_1, i_2, \cdots, i_m\}^+$列向量组成的最简形式的矩阵，则可得

$$P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = B^+ \cdot \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R_m^+\} \qquad —(5.5.1.21)$$

例 5.5.1.2 $n > m$ 的例子.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 7 & 3 & -2 \\ 10 & 5 & 2 \\ 6 & -9 & -7 \end{bmatrix} \qquad \textbf{解} \quad A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

这里 $\operatorname{rank} A = m$, $m = 3$. 现在极大线性无关行向量组的下标序列是$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$和$\{2, 3, 4\}$. 如对于$\{1, 2, 3\}$，可得

$$A^{-1}\begin{Bmatrix} 1, 2, 3 \\ 1, 2, 3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{45}\begin{bmatrix} 16 & -3 & 5 \\ -34 & 12 & -5 \\ 5 & -15 & 10 \end{bmatrix}$$

且

$$(6, -9, -7) \cdot A^{-1}\begin{Bmatrix} 1, 2, 3 \\ 1, 2, 3 \end{Bmatrix} = \left(\frac{367}{45}, -\frac{21}{45}, \frac{5}{45}\right)$$

因此保留其中的第 1,第 3 列向量. 对其余下标序列作类似检验，并作最简化处理，可得

$$B^+ = \begin{bmatrix} \frac{16}{45} & \frac{1}{9} & \frac{2}{5} & -\frac{17}{21} \\ -\frac{34}{45} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{5} & \frac{82}{21} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{5} & -\frac{120}{21} \end{bmatrix} \qquad \text{得解 } \boldsymbol{x} = B^+\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u} \in R_+^4$$

若利用(5.5.1.18)式的解法,应解出

$$\begin{cases}\frac{367}{45}u_1-\frac{21}{45}u_2+\frac{5}{45}u_3\geqslant 0\\ u_1,\ u_2,\ u_3\geqslant 0\end{cases}$$

此不等式组的解是

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}\frac{45}{367} & 0 & 1 & 0\\ \frac{45}{21} & \frac{45}{21} & 0 & 0\\ 0 & \frac{45}{5} & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{v}\in R_+^4$$

从而得到最终解的形式是

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{45}\begin{bmatrix}16 & -3 & 5\\ -34 & 12 & -5\\ 5 & -15 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{45}{367} & 0 & 1 & 0\\ \frac{45}{21} & \frac{45}{21} & 0 & 0\\ 0 & \frac{45}{5} & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{v}\in R_+^4$$

得

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-\frac{255}{2\,569} & \frac{6}{7} & \frac{16}{45} & \frac{1}{9}\\ \frac{1\,230}{2\,569} & -\frac{3}{7} & -\frac{34}{45} & -\frac{1}{9}\\ -\frac{1\,800}{2\,569} & \frac{9}{7} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9}\end{bmatrix}\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{v}\in R_+^4$$

两种解法完全等价.其解空间是 R^3 空间上由 4 条棱线组成的顶点在原点的锥.

但由(5.5.1.18~21)式的解法,从几何意义上讲,是给出了一个将 $A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 的解作为单纯复形,并将此单纯复形分解为若干个单纯形(集合)的并集合的求解过程.对此内容,以下还会有所涉及但不再作详细分析.

§5.5.2 A^+广义逆矩阵的几何构造及算法简化

先说明(5.5.1.8)式决定的矩阵 B 是可逆的.记 $R(A)$为矩阵 A 的值域空间,$N(A)$为矩阵 A 的零度空间.

$$R(A)=\{A\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}\in R^m\}\qquad N(A)=\{\boldsymbol{x}\mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{x}\in R^m\}$$

则对于任意两个可乘矩阵 U、V 的乘积 UV 矩阵的秩，有[1]

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(UV) &= \operatorname{rank}(V) - \dim(R(V) \cap N(U)) \\ &= \operatorname{rank}(U) - \dim(R(U^{\mathrm{T}}) \cap N(V^{\mathrm{T}})) \quad \text{—(5.5.2.1)}\end{aligned}$$

利用这一关系，考虑

$$U = A\begin{Bmatrix}1,\ 2,\ \cdots,\ k \\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m\end{Bmatrix} \quad V = \Pi$$

则由(5.5.1.8)式，

$$B = UV$$

再由(5.5.1.1)～(5.5.1.6)式关于 Π 的意义与构造，可知，Π 矩阵刚好就是 $A\begin{Bmatrix}1,\ 2,\ \cdots,\ k \\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m\end{Bmatrix}$ 矩阵的零度空间的法方向向量所构造的，所以，

$$R(\Pi) \cap N\left(A\begin{Bmatrix}1,\ 2,\ \cdots,\ k \\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m\end{Bmatrix}\right) = \varnothing$$

即由(5.5.2.1)式知

$$\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} \Pi$$

而 Π 矩阵是 $m \times k$ 阶矩阵，且其前 $k \times k$ 阶顺序主子矩阵是 $k \times k$ 阶单位矩阵，故 Π 矩阵的秩为 k，而 B 矩阵是 $k \times k$ 阶矩阵，故 B 矩阵可逆.

由此可知(5.5.1.12)式决定的矩阵 G_0 是存在的. 以下说明 G_0 即是广义逆矩阵 A^+.

对于任意的 $A \in R^{n\times m}$，称 G 是广义逆矩阵 A^+，是指 $G \in R^{m\times n}$，且满足 **Moore-Penrose 方程**：

$$\begin{aligned}&(1)\ AGA = A \\ &(2)\ GAG = G \\ &(3)\ (AG)^{\mathrm{T}} = AG \\ &(4)\ (GA)^{\mathrm{T}} = GA\end{aligned}$$

而如果 G 只满足以上 M-P 方程中的 i，j… 个时，则称 G 为广义逆矩阵 $A^{(i,j,\cdots)}$.

现考虑(5.5.0)式中的矩阵 $A \in R^{n\times m}$，且设

$$\operatorname{rank} A = n \leqslant m$$

不失一般性，设 A 的前 $n \times n$ 阶顺序主子矩阵满秩，并用 A_n 表示这个顺序主子

[1] 引自《常用的矩阵理论和方法》，倪国熙著，上海科技出版社，1984 年，第 20 页，定理 2.3.

矩阵.

记

$$\widetilde{W}^{\mathrm{T}} = A_n^{-1} \cdot A\begin{Bmatrix} 1, & 2, & \cdots, & n \\ n+1, & n+2, & \cdots, & m \end{Bmatrix} \qquad —(5.5.2.2)$$

$\widetilde{W}^{\mathrm{T}} \in R^{n\times(m-n)}$，称$\widetilde{W}^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 A 的列线性相关系数矩阵.

则对于矩阵 A 可得到以下满秩分解

$$A = A_n \cdot [I_n, \widetilde{W}^{\mathrm{T}}] = FG \qquad —(5.5.2.3)$$

这里

$$F = A_n \quad F \in R^{n\times n}$$

$$G = [I_n, \widetilde{W}^{\mathrm{T}}] \quad G \in R^{n\times m}$$

则满足 $M-P$ 方程(1) ～ (4) 的广义逆矩阵 A^+ 可由下式构造

$$A^+ = G^{\mathrm{T}} \cdot (GG^{\mathrm{T}})^{-1}(F^{\mathrm{T}}F)^{-1} \cdot F^{\mathrm{T}} \qquad —(5.5.2.4)$$

对于具体的矩阵 A，A^+ 一定存在，且是唯一的[1].

现在由于 $F = A_n$ 可逆，故

$$(F^{\mathrm{T}}F)^{-1} \cdot F^{\mathrm{T}} = F^{-1} \cdot (F^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot F^{\mathrm{T}} = F^{-1}$$

所以，

$$A^+ = \begin{bmatrix} I_n \\ \widetilde{W} \end{bmatrix} \cdot (I_n + \widetilde{W}^{\mathrm{T}}\widetilde{W})^{-1} \cdot A_n^{-1} = \begin{bmatrix} (I_n + \widetilde{W}^{\mathrm{T}}\widetilde{W})^{-1}A_n^{-1} \\ \widetilde{W}(I_n + \widetilde{W}^{\mathrm{T}}\widetilde{W})^{-1}A_n^{-1} \end{bmatrix} \qquad —(5.5.2.5)$$

易证(在 $\operatorname{rank} A = n$ 时)，

$$A \cdot A^+ = I_n \qquad —(5.5.2.6)$$

在广义逆矩阵的理论中，已知，A^+ 是任取的 $\boldsymbol{b} \in R^n$，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

方程组的极小范数最小二乘解就是

$$\boldsymbol{x} = A^+ \boldsymbol{b}$$

现在证明，由以上(5.5.1.12)式决定的 G_0 矩阵就是(5.5.2.5)式决定的

---

〔1〕 见前注第 78～79 页，定理 3.1.

A^+ 矩阵.

首先，易知由(5.5.1.1)式，

$$Ax = \mathbf{0}$$

方程组的基础解系矩阵

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\widetilde{W}^{\mathrm{T}} \\ I_{(m-n)} \end{bmatrix} \qquad —(5.5.2.6a)$$

由(5.5.1.5)式决定的 Π 矩阵是

$$\Pi = \begin{bmatrix} I_n \\ \widetilde{W} \end{bmatrix} \qquad —(5.5.2.7)$$

则由(5.5.1.8)式

$$B = A_n \cdot [I_n, \widetilde{W}^{\mathrm{T}}] \cdot \begin{bmatrix} I_n \\ \widetilde{W} \end{bmatrix} = A_n(I_n + \widetilde{W}^{\mathrm{T}} \cdot \widetilde{W}) \qquad —(5.5.2.8)$$

故

$$B^{-1} = (I_n + \widetilde{W}^{\mathrm{T}}\widetilde{W})^{-1}A_n^{-1} \qquad —(5.5.2.9)$$

所以，由(5.5.1.12)式并比较(5.5.2.5)式

$$G_0 = \begin{bmatrix} I_n \\ \widetilde{W} \end{bmatrix}(I_n + \widetilde{W}^{\mathrm{T}}\widetilde{W})^{-1}A_n^{-1} = A^+ \qquad —(5.5.2.10)$$

也可以将 G_0 写成以下形式，

$$A^+ = G_0 = \Pi(\Pi^{\mathrm{T}}\Pi)^{-1}A_n^{-1} \qquad —(5.5.2.11)$$

由 Λ、Π 矩阵的几何意义，显然有

$$\Pi^{\mathrm{T}} \cdot \Lambda = [0]$$

由导出(5.5.2.6a)～(5.5.2.11)式的(5.5.1.1)～(5.5.1.12)式的几何意义，即知广义逆矩阵 A^+ 是 $N(A)$零度空间的正交补空间中的方向向量作为列向量所构造的矩阵. 由(5.5.2.6a)式，A^+ 的第 j 个列向量是与 $N(A)$正交即刚好与

$$g_i:\ \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

决定的超平面正交的并与 g_i 超平面($i \neq j$)正交的方向向量.

下例对此给予具体说明

例 5.5.2.1

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \operatorname{rank} A=2=n$$

解出 A^{+}.

$$A_n=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\qquad A_n^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\widetilde{W}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{7}{4}\end{bmatrix}$$

$$\Pi=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{7}{4}\end{bmatrix}\qquad \Pi^{\mathrm{T}}\Pi=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}5 & \frac{7}{2}\\ \frac{7}{2} & \frac{65}{4}\end{bmatrix}$$

$$(\Pi^{\mathrm{T}}\Pi)^{-1}=\frac{4}{69}\begin{bmatrix}\frac{65}{4} & -\frac{7}{2}\\ -\frac{7}{2} & 5\end{bmatrix}$$

$$G_0=A^{+}=\Pi(\Pi^{\mathrm{T}}\Pi)^{-1}A_n^{-1}=\frac{1}{69}\begin{bmatrix}7 & 29\\ -10 & -2\\ -14 & 11\end{bmatrix}$$

由于此例中

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

的基础解系矩阵是

$$\Lambda=\begin{bmatrix}-\widetilde{W}^{\mathrm{T}}\\ I_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{7}{4}\\ 1\end{bmatrix}$$

因此,此例中,不等式方程组

$$A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$$

的解是 $\boldsymbol{x}=\Lambda t+A^{+}\boldsymbol{u}\quad t\in R\quad \boldsymbol{u}\in R_{+}^{2}$,即

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{7}{4}\\1\end{bmatrix}t+\frac{1}{69}\begin{bmatrix}7&29\\-10&-2\\-14&11\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\quad t\in R\quad \boldsymbol{u}\in R_+^2$$

下图给出了解的构造.

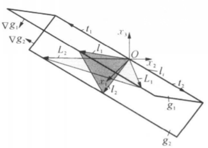


图 5.5.2.1

图 5.5.2.1 中的 $g_{1,2}$ 是本例中 $\boldsymbol{a}_{1,2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 决定的平面,$\nabla g_{1,2}$ 是它们的法方向. $g_{1,2}$ 按其法方向所围成的锥就是 $A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 的解空间. l_t 直线是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 决定的交直线($N(A)$ 空间).

$$l_t: \boldsymbol{x}=\Lambda t\quad t\in R$$

l_1、l_2 分别是位于 g_1、g_2 平面上与 l_t 正交的射线. 可知 l_1、l_2 即是由 A^+ 的列向量作为方向向量决定的射线.

$$l_{1,2}: \boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_+^{1,2}\cdot u_{1,2}\quad u_{1,2}\geqslant 0$$

其中 $\boldsymbol{a}_+^{1,2}$ 是 A^+ 的对应列向量. $A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 解

$$\boldsymbol{x}=\Lambda t+A^+\boldsymbol{u}\quad t\in R\quad \boldsymbol{u}\in R_+^2$$

的几何含义就是由 l_1、l_2 射线夹成的锥(如图 5.5.2.1 中用深色阴影区域表示的锥),其交点沿 l_t 交直线的平移就是 $P(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})$ 集合.

图中 g_1 平面与 Ox_1x_2 坐标平面在 L_1 射线处相交,g_2 平面则在 L_2 射线处相交. 其中

$$L_1: \boldsymbol{x}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}v_1\quad v_1\geqslant 0$$

$$L_2: \boldsymbol{x}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}v_2\quad v_2\geqslant 0$$

那么,由矢量相加规则,可以取到 l_t 交直线上的矢量 t_1、t_2,使

$$\vec{l}_1=\vec{L}_1+\vec{t}_1$$
$$\vec{l}_2=\vec{L}_2+\vec{t}_2$$

注意到 L_1、L_2 的方向向量可由 A_n^{-1} 构造,即若令 G' 为以下矩阵

$$G' = \begin{bmatrix} A_n^{-1} \\ 0_{1\times 2} \end{bmatrix}$$

其中 $0_{1\times 2}$ 是 1×2 阶 0 矩阵. 这表明 A_n^{-1} 的列向量(作为方向向量)恒在 Ox_1x_2 坐标平面上,且刚好就是 Ox_1x_2 与 g_1、g_2 平面的交线决定的方向向量. 则以上关系是说,

$$A^+ = G' + \Lambda \cdot T \quad T \in R^{1\times 2} \qquad —(\text{a})$$

容易验证,取 $T = (-14,\ 11)\dfrac{1}{69}$,

$$G' + \Lambda \cdot T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{4} \\ 1 \end{bmatrix} (-14,\ 11)\frac{1}{69} = A^+$$

但这即意味着,在本例中

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

的解可简化为

$$\boldsymbol{x} = \Lambda t + G'\boldsymbol{u} \quad t \in R \quad \boldsymbol{u} \in R_+^2$$

显然,求得 G' 矩阵仅须解出 A_n^{-1},从而比解出 A^+ 矩阵要方便许多. 从几何意义上讲,这表示,$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的解空间也可以看成是由射线 L_1、L_2 夹成的锥如图 5.5.2.1 中浅色阴影区域表示的锥的交点,沿 l_t 直线的平移构造出来的.

以上给出的关系(a)式是具有一般性的. 设 $A \in R^{n\times m}$,且 $\operatorname{rank} A = n$. 为简化符号,仍设 A 的前 $n\times n$ 阶顺序主子矩阵 A_n 可逆.

令

$$G' = \begin{bmatrix} A_n^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad —(5.5.2.12)$$

其中 0 是 $(m-n)\times n$ 阶 0 矩阵.

容易理解,G' 是 A 的广义逆矩阵 $A^{(1,2,3)}$. 事实上,因为

$$AG' = A_n \cdot [I_n,\ \widetilde{W}^{\mathrm{T}}] \cdot \begin{bmatrix} A_n^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = I_n$$

故 M-P 方程中的

(1) $AG'A = A$

(2) $G'AG' = G'$

(3) $(AG')^{\mathrm{T}} = AG'$

均成立.但

$$G'A = \begin{bmatrix} I_n & \widetilde{W}^{\mathrm{T}} \\ 0_{(m-n)\times n} & 0_{(m-n)\times(m-n)} \end{bmatrix}_{m\times m}$$

不是对称矩阵,故 $M-P$ 方程中的(4)是不成立的.

把(5.5.2.12)式看成是

$$\begin{bmatrix} A_n & 0 \\ 0 & I_{(m-n)} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_n^{-1} & 0 \\ 0 & I_{(m-n)} \end{bmatrix} \qquad —(5.5.2.13)$$

矩阵的前 n 列向量组成的矩阵,则 G' 的列向量由逆矩阵列向量的几何意义,应是等式一不等式方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 & i = 1, 2, \cdots, n \quad i \neq j \\ \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0 & 1 \leqslant j \leqslant n \\ x_{n+k} = 0 & k = 1, 2, \cdots, (m-n) \end{cases} \qquad —(5.5.2.14)$$

决定的解空间的方向向量(推论 5.2.2).所以,G' 的各列向量均位于 $Ox_1x_2\cdots x_n$ 坐标超平面上,且 G' 的第 j 列向量,刚好是

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n, i \neq j$$

决定的超平面与 $Ox_1x_2\cdots x_n$ 坐标超平面的共同交线上的方向向量.

而由 A^+ 的性质(5.5.2.6)式,A^+ 矩阵的第 j 列向量,必定也刚好是

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 & i = 1, 2, \cdots, n, i \neq j \\ \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0 & 1 \leqslant j \leqslant n \end{cases} \qquad —(5.5.2.15)$$

方程组的解空间的方向向量.

(5.5.2.15)式与(5.5.2.14)式的区别在于在(5.5.2.15)式中,x_{n+k}, $k=1, 2, \cdots, (m-n)$ 可以不为 0.记 A^+ 的第 j 列向量是 $\boldsymbol{a}_+^j$,

$$\boldsymbol{a}_+^j = (a_{1j}^+, a_{2j}^+, \cdots, a_{nj}^+, a_{n+1,j}^+, \cdots, a_{mj}^+)^{\mathrm{T}}$$

G' 的第 j 列向量是 $\boldsymbol{g}'^j$,

$$\boldsymbol{g}'^j = (g'_{1j}, g'_{2j}, \cdots, g'_{nj}, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$$

由于 $\boldsymbol{g}'^j$ 是(5.5.2.14)式的解向量,所以,也就是(5.5.2.15)式的一个特解,那么,取

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}'^j + \Lambda \boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-n} \qquad —(5.5.2.15a)$$

显然就是(5.5.2.15)式的全部解,这里 $\Lambda \boldsymbol{t}$ 是

$$Ax = \mathbf{0}$$

的通解.

比较 $\boldsymbol{a}_+^j$、$\boldsymbol{g}'^j$ 与基础解系矩阵 Λ 的构造，即知，取

$$\boldsymbol{t}_+^j = (a_{n+1,j}^+,\ a_{n+2,j}^+,\ \cdots,\ a_{mj}^+)^{\mathrm{T}}$$

肯定成立

$$\boldsymbol{a}_+^j = \boldsymbol{g}'^j + \Lambda \boldsymbol{t}_+^j \quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \qquad —(5.5.2.16)$$

所以，总成立以下推论.

推论 5.5.2.1 $A \in R^{n \times m}$ 设 $\operatorname{rank} A = n$，则广义逆矩阵 A^+ 可由

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_n^{-1} \\ 0_{(m-n)\times n} \end{bmatrix} + \Lambda T \quad T \in R^{(m-n)\times n} \qquad —(5.5.2.17)$$

构造，其中 Λ 是 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系矩阵，T 是 $(m-n)\times n$ 阶矩阵. ■

推论 5.5.2.1 的结论也可以直接予以验证. 取(5.5.2.17)式中的 T 矩阵为

$$T = \widetilde{W} \cdot (I_n + \widetilde{W}^{\mathrm{T}} \widetilde{W})^{-1} \cdot A_n^{-1} \qquad —(5.5.2.18)$$

则

$$\begin{bmatrix} A_n^{-1} \\ 0_{(m-n)\times n} \end{bmatrix} + \Lambda \cdot T = \begin{bmatrix} A_n^{-1} \\ 0_{(m-n)\times n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\widetilde{W}^{\mathrm{T}} \\ I_{(m-n)} \end{bmatrix} \cdot T$$

$$= \begin{bmatrix} A_n^{-1} - \widetilde{W}^{\mathrm{T}} \widetilde{W}(I_n + \widetilde{W}^{\mathrm{T}} \widetilde{W})^{-1} A_n^{-1} \\ \widetilde{W}(I_n + \widetilde{W}^{\mathrm{T}} \widetilde{W})^{-1} A_n^{-1} \end{bmatrix}$$

且由于

$$(I_n + \widetilde{W}^{\mathrm{T}} \widetilde{W})^{-1} A_n^{-1} + \widetilde{W}^{\mathrm{T}} \widetilde{W}(I_n + \widetilde{W}^{\mathrm{T}} \widetilde{W})^{-1} A_n^{-1} = A_n^{-1}$$

故

$$A_n^{-1} - \widetilde{W}^{\mathrm{T}} \widetilde{W}(I_n + \widetilde{W}^{\mathrm{T}} \widetilde{W})^{-1} A_n^{-1} = (I_n + \widetilde{W}^{\mathrm{T}} \widetilde{W})^{-1} A_n^{-1}$$

代入前一式，与(5.5.2.5)式比较即知结论.

由(5.5.2.17)式，即可将构造(5.5.1.15)～(5.5.1.16a)式的算法予以简化，即将(5.5.1.12)式直接写成为

$$G_0 = \begin{bmatrix} A_k^{-1} \\ 0_{(m-k)\times k} \end{bmatrix} \qquad —(5.5.2.19)$$

这里 $k = \operatorname{rank} A \leqslant n$，且 A_k 是 A 的前 $k \times k$ 阶顺序主子矩阵，并设 A_k 可逆.

续例 5.5.1.1 由上可知 $\mathrm{rank}\,A = 2 = n$

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_n^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

有

$$G_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从而

$$C = (-4, -4, -9, 11, 8)\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (2, -3)$$

依旧得到

$$\begin{cases} 2u_1 - 3u_2 \geqslant 0 \\ u_1,\ u_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

的解是

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{z} \quad \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0}$$

所以，$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的解是

$$\boldsymbol{x} = \Lambda\boldsymbol{t} + G_0\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{7}{4} & \frac{5}{4} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{t} + \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{z} \quad \boldsymbol{t} \in R^3 \quad \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0}$$

与例 5.5.1.1 的解(a)式相比较，易知

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{7}{4} & \frac{5}{4} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{63}\begin{bmatrix} -\frac{37}{6} & -12 \\ -3.5 & 0 \\ -\frac{17}{12} & 1.5 \end{bmatrix} = \frac{1}{63}\begin{bmatrix} \frac{83}{12} & 7.5 \\ -5.5 & -9 \\ -\frac{37}{6} & -12 \\ -3.5 & 0 \\ -\frac{17}{12} & 1.5 \end{bmatrix}$$

以上已经说明，G'矩阵其实是广义逆矩阵 $A^{(1,2,3)}$(在 A 矩阵是行满秩时). 而由广义逆矩阵的理论知 $A^{(1,2,3)}$ 的形式不是唯一的.

设 $A^{(1)}$ 是符合 $M-P$ 方程中的(1) 方程的广义逆矩阵. 在 A 矩阵行满秩时，

$$A \cdot A^{(1)} = I_n$$

成立[1]，并且，$A^{(1)}$矩阵总是存在的.

设 $A^{(1,\cdots)}$ 是至少符合 $M-P$ 方程中的(1)的广义逆矩阵. $A^{(1,\cdots)}$ 除了 $A^{(1,2,3,4)} = A^{+}$ 是唯一的，其他的各类广义逆矩阵都不是唯一的. 则任取$A_1^{(1,\cdots)}$、$A_2^{(1,\cdots)}$ 是同一类广义逆矩阵中的不同的 2 个矩阵，记

$$A^0 = A_1^{(1,\cdots)} - A_2^{(1,\cdots)} \neq [0] \quad A^0 \in R^{m\times n}$$

则由 $M-P$ 方程中的(1)，有

$$A \cdot A^0 \cdot A = AA^{(1,\cdots)}A - AA^{(1,\cdots)}A = A - A = 0$$

换句话讲，可看成是

$$A \cdot (A^0 A) = 0$$

即应有矩阵 Q，使

$$A^0 A = \Lambda Q \quad Q \in R^{(m-n)\times m}$$

成立.

再由 $\operatorname{rank} A = n$，存在 $A^{(1)}$，使 $AA^{(1)} = I_n$，即得

$$A^0 AA^{(1)} = A^0 = \Lambda QA^{(1)} = \Lambda T \quad T = QA^{(1)} \qquad T \in R^{(m-n)\times n}$$

即知任一 $A^{(1,\cdots)}$ 类广义逆矩阵，在 $\operatorname{rank} A = n$ 时，都有

$$\{A^{(1,\cdots)}\} = A_1^{(1,\cdots)} + \Lambda T \quad T \in R^{(m-n)\times n} \qquad —(5.5.2.20)$$

---

〔1〕《矩阵论》，程云鹏主编，西北工业大学出版社，2003 年，第 298 页，定理 6.5.

成立. $A_1^{(1,\cdots)}$ 是某个具体的(1, …) 类广义逆矩阵.

由此关系,也可知,因总有

$$A^{+} \in \{A^{(1,\cdots)}\}$$

故总有 $T \in R^{(m-n)\times n}$,使

$$A^{+} = A^{(1,\cdots)} + \Lambda T \qquad —(5.5.2.21)$$

对于一般的情况,记 $A \in R^{n\times m}$, $\operatorname{rank} A = k < \min(n, m)$ 仍记 A 的前 $k \times k$ 阶顺序主子矩阵为 A_k,且设 A_k 可逆,并记

$$\begin{cases} \widetilde{W}^{T} = A_k^{-1} \cdot A\begin{Bmatrix} 1, & 2, & \cdots, & k \\ k+1, & k+2, & \cdots, & m \end{Bmatrix} & \widetilde{W}^{T} \in R^{k\times(m-k)} \\ W = A\begin{Bmatrix} k+1, & k+2, & \cdots, & n \\ 1, & 2, & \cdots, & k \end{Bmatrix} \cdot A_k^{-1} & W \in R^{(n-k)\times k} \end{cases} \qquad —(5.5.2.22)$$

分别是 A 的列线性相关系数矩阵与行线性相关系数矩阵. 则可有

$$A = \begin{bmatrix} I_k \\ W \end{bmatrix} A_k \cdot [I_k, \widetilde{W}^{T}] \qquad —(5.5.2.23)$$

令

$$F = \begin{bmatrix} I_k \\ W \end{bmatrix} \quad G = A_k \cdot [I_k, \widetilde{W}^{T}]$$

$$A = FG$$

是满秩分解.

由 A^{+} 的构造易知

$$A^{+} = \begin{bmatrix} (I_k + \widetilde{W}^{T}\widetilde{W})^{-1}A_k^{-1} \\ \widetilde{W}(I_k + \widetilde{W}^{T}\widetilde{W})^{-1}A_k^{-1} \end{bmatrix} \cdot (I_k + W^{T}W)^{-1}[I_k, W^{T}]$$

即

$$A^{+} = A^{+}\begin{Bmatrix} 1, 2, \cdots, k \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix} \cdot (I_k + W^{T}W)^{-1}[I_k, W^{T}]$$

现在 $A^{+}\begin{Bmatrix} 1, 2, \cdots, k \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}$是行满秩的子矩阵 $A\begin{Bmatrix} 1, 2, \cdots, k \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}$的 A^{+} 广义逆矩阵,所以有

$$A^{+}\begin{Bmatrix} 1, 2, \cdots, k \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \Lambda T \quad T \in R^{(m-k)\times k}$$

其中 Λ 仍是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 即 $A\begin{Bmatrix}1, 2, \cdots, k\\ 1, 2, \cdots, m\end{Bmatrix}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系矩阵(见(5.5.2.7)式).

从而有

$$A^{+}=\left\{\begin{bmatrix}A_k^{-1}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}+\Lambda T\right\}(I_k+W^{\mathrm{T}}W)^{-1}[I_k,\ W^{\mathrm{T}}]$$

即

$$A^{+}=A_0^{-}+\Lambda\widetilde{T} \qquad —(5.5.2.24)$$

其中,

$$A_0^{-}=\begin{bmatrix}A_k^{-1}(I_k+W^{\mathrm{T}}W)^{-1} & A_k^{-1}(I_k+W^{\mathrm{T}}W)^{-1}W^{\mathrm{T}}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in R^{m\times n}$$

$$\widetilde{T}=T\cdot(I_k+W^{\mathrm{T}}W)^{-1}[I_k,\ W^{\mathrm{T}}]\in R^{(m-k)\times n}$$

注意到

$$AA_0^{-}=\begin{bmatrix}I_k\\ W\end{bmatrix}(I_k+W^{\mathrm{T}}W)^{-1}\cdot[I_k,\ W^{\mathrm{T}}]$$

故

$$AA_0^{-1}\begin{bmatrix}I_k\\ W\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_k\\ W\end{bmatrix}\Rightarrow AA_0^{-1}A=A$$

且 AA_0^{-} 显然是对称的,即

$$(AA_0^{-})^{\mathrm{T}}=AA_0^{-}$$

所以,A_0^{-} 实际上是 $A^{(1,3)}$ 逆矩阵.

对于 $A\in R^{n\times m}$, $\mathrm{rank}\,A=k<n$ 时

$$A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0}$$

不等式方程组的解的结构中,由(5.5.2.19)式决定的 G_0 广义逆矩阵及所构造的解集合,与如何选择可逆子矩阵 A_k 是无关的.

事实上有以下推论.

推论 5.5.2.2 对 $A\in R^{n\times m}$, $\mathrm{rank}\,A=k$,设 $A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0}$ 的解集合

$$P(A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0})-N(A)\neq\varnothing$$

若 G_0D_+ 与 $G_0'D_+'$ 是 $P(A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0})-N(A)$ 中二个不同的方向向量基矩阵,那么,一定有非负矩阵 U 及矩阵 $\widetilde{T}\in R^{(m-k)\times k}$,使

$$G_0 D_+ U + \Lambda \widetilde{T} = G_0' D_+' \qquad —(5.5.2.25)$$

成立. 其中 G_0 是 A 的任一个 $k \times k$ 阶可逆子矩阵构造的 $A^{(1,3)}$ 广义逆矩阵, D_+ 是解约束方程组的解矩阵. ■

证明: 因为 $x \in P(Ax \geqslant 0)$, 可表成

$$x = \Lambda t + G_0 D_+ z \quad t \in R^{m-k} \quad z \geqslant 0$$

现 $G_0' D_+' \in P(Ax \geqslant 0)$, 故 $G_0' D_+'$ 中的列向量均可由上式表出, 即得 (5.5.2.25) 式.

设在 A 中选取了可逆子矩阵 $A\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{Bmatrix}$ $k = \operatorname{rank} A$ 以构造 G_0, 记

$$A^{-1}\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{Bmatrix} = [\tilde{a}_{i_t j_s}] \quad t, s = 1, 2, \cdots, k$$

即将 $A^{-1}\{\cdot\}$ 的元素的下标直接标记为 $i_1, i_2, \cdots, i_k; j_1, j_2, \cdots, j_k$. 则 $G_0 = [g_{ij}]$ 由以下关系决定

$$\begin{cases} G_0\begin{Bmatrix} j_1, j_2, \cdots, j_k \\ 1, 2, \cdots, k \end{Bmatrix} = A^{-1}\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{Bmatrix} \\ g_{ij} = 0 \quad i \neq j_1, j_2, \cdots, j_k \end{cases} \qquad —(5.5.2.26)$$

再设 $\{h_1, h_2, \cdots, h_{m-k}\} = \{1, 2, \cdots, m\} - \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$, 则有

$$C = A\begin{Bmatrix} h_1, h_2, \cdots, h_{m-k} \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix} G_0 \qquad —(5.5.2.27)$$

得

$$\begin{cases} Cu \geqslant 0 \\ u \geqslant 0 \end{cases}$$

就是 G_0 决定的解约束方程组. 它的解矩阵就是 D_+.

以符号

$$D = G_0 D_+ \qquad —(5.5.2.28)$$

也可以将 $x \in P(Ax \geqslant 0)$ 表示成

$$x = \Lambda t + Dv \quad t \in R^{m-k} \quad v \geqslant 0 \qquad —(5.5.2.29)$$

再续例 5.5.1.1 现取 A 的可逆子矩阵

$$A\begin{Bmatrix} 2, 3 \\ 2, 4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -4 & 11 \end{bmatrix} \qquad A^{-1}\begin{Bmatrix} 2, 3 \\ 2, 4 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

来构造 G_0'、D_+'.

由(5.5.2.26)式，G_0' 中有

$$G_0'\begin{Bmatrix}2, 4\\1, 2\end{Bmatrix} = A^{-1}\begin{Bmatrix}2, 3\\2, 4\end{Bmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix}11 & 3\\4 & 0\end{bmatrix}$$

得

$$G_0' = \begin{bmatrix}0 & 0\\-\frac{11}{12} & -\frac{1}{4}\\0 & 0\\-\frac{1}{3} & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

由(5.5.2.27)式，得

$$C' = A\begin{Bmatrix}1\\1, 2, 3, 4, 5\end{Bmatrix}G_0' = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

故从

$$\begin{cases}\frac{3}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 \geqslant 0\\ u_1, u_2 \geqslant 0\end{cases}$$

得到

$$D_+' = I_2$$

这样

$$G_0'D_+' = G_0'$$

已知例 5.5.1.1 中取 $A\begin{Bmatrix}1, 2\\1, 2\end{Bmatrix}$可逆子矩阵构造的

$$G_0D_+ = \begin{bmatrix}\frac{1}{6} & 0\\-\frac{1}{6} & -\frac{1}{2}\\0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

可以验证，取

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \widetilde{T} = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & & 0 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

及例 5.5.1.1 中的 Λ 矩阵，便有

$$G_0' D_+' = G_0 D_+ U + \Lambda \widetilde{T}$$

成立．此即(5.5.2.25)式．

§5.5.3 行线性相关与解约束方程组

当 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 方程组中，矩阵 A 是行向量线性相关的，由以上的分析已知，其解约束方程组可能无非 0 解，可能有非 0 解．但不论其解约束方程是否有非 0 解，$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 方程组所含有的 2^n 个子方程组不可能均是相容的．

对于 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 不等式组的解集合，由(5.5.1.15)～(5.5.1.16)式，$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 不等式组的解可表示为(简化了记号)

$$\boldsymbol{x} = \Lambda \boldsymbol{t} + \Pi B^{-1} \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-k} \quad \boldsymbol{u} \in P(C\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}) \qquad \text{—(5.5.3.1)}$$

因此，当 $P(C\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}) = \{\boldsymbol{0}\}$ 时，即 $\boldsymbol{u}$ 只能取 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ 向量时，上式只能为

$$\boldsymbol{x} = \Lambda \boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-k} \qquad \text{—(5.5.1.2)}$$

式．这时，不等式组

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

等价于等式方程组

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

这说明，

$$A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0} \text{ 以及} \begin{cases} \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} > 0 & i = i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_t,\ 1 \leqslant t \leqslant n \\ \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = 0 & j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ j \neq i \end{cases}$$

方程组都是矛盾方程组，这里 $\boldsymbol{a}_{i,j}^{\mathrm{T}}$ 都是 A 的行向量．

其次，马上还可以联想到，也可以出现不等式组(5.5.0)式中的子方程组

$$A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$$

是矛盾的，但

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \begin{cases} \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = 0 & i = i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_t \\ \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} > 0 & j = j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_s \end{cases} \quad t + s = n \quad \{i_k\} \cup \{j_k\} = \{1,\ \cdots,\ n\}$$

是相容的(至少对某个 t 以及某个 $i_1, i_2, \cdots, i_t$ 子列,以上方程组是相容的).

这两种情形可以合并讨论.

推论 5.5.3.1　$A \in R^{n\times m}$,$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 方程组中的所有的 2^n 个子方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 & i = i_1, i_2, \cdots, i_t \\ \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0 & j = j_1, j_2, \cdots, j_s \end{cases} \quad t+s=n \quad t=1, \cdots, n, \{i_k\} \cup \{j_k\} = \{1, \cdots, n\}$$

全部是相容的,充要条件是 A 矩阵是行满秩的.　■

证明: 由以上关于 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 的构造即知. 设 $\operatorname{rank} A = n$,当 $n \leqslant m$ 时,$\tilde{\boldsymbol{x}} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 为

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \Lambda\boldsymbol{t} + A^{+}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-n} \quad \boldsymbol{u} \in R_{+}^{n}$$

故

$$A\tilde{\boldsymbol{x}} = A(\Lambda\boldsymbol{t} + A^{+}\boldsymbol{u}) = AA^{+}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$$

因 $\boldsymbol{u} \in R_{+}^{n}$,故对 $t = 1, 2, \cdots, n$,及任取的下标子列 $i_1, i_2, \cdots, i_t$,取

$$\begin{cases} u_i = 0 & i = i_1, i_2, \cdots, i_t \\ u_j > 0 & j = j_1, j_2, \cdots, j_s \end{cases}$$

都是可以的. 即知以上推论是充分的.

若 A 是行向量线性相关的,设 $\operatorname{rank} A = k$,不妨设 A 的前 k 行向量线性无关,作 A 的满秩分解

$$A = \begin{bmatrix} I_k \\ W \end{bmatrix} A \begin{Bmatrix} 1, 2, \cdots, k \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}$$

W 是 A 的行线性相关系数矩阵,则 $\tilde{\boldsymbol{x}} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$,可表示成

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \Lambda\boldsymbol{t} + A^{+}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-k} \quad \boldsymbol{u} \in P(W\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}) \subset R_{+}^{k}$$

其中 $A^{+} = A^{+} \begin{Bmatrix} 1, 2, \cdots, k \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}$

$$A\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} I_k \\ W \end{bmatrix} A \begin{Bmatrix} 1, 2, \cdots, k \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix} \cdot (\Lambda\boldsymbol{t} + A^{+}\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} I_k \\ W \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

比较上式等号两边的结构即知,只要存在 W 矩阵,则至少以下子方程组是矛盾的,

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 & i = 1, 2, \cdots, k \\ \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0 & j = k+1, k+2, \cdots, n \end{cases}$$

因为这个子方程组要求取 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$(且 $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$) 故是矛盾的. 即知以上推论的

条件也是必要的.

由此可知,导致 $Ax>0$ 为矛盾方程组的情形只能发生在矩阵 A 是行向量线性相关的情况下. 由以上分析易知,这不论 $n \gtreqless m$,当 A 的各行向量之间存在线性相关,则其决定的不等式组 $Ax \geqslant 0$ 的解,总存在解约束方程组

$$\begin{cases} Cu \geqslant 0 \\ u \geqslant 0 \end{cases} \qquad —(5.5.1.14)$$

这里

$$C = A\begin{Bmatrix} k+1, k+2, \cdots, n \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix} \cdot G_0 \qquad —(5.5.1.13)$$

由于 A 矩阵的行向量线性相关,故有矩阵 $W = [w_{ij}]_{(n-k)\times k}$ 使

$$A\begin{Bmatrix} k+1, k+2, \cdots, n \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix} = W \cdot A\begin{Bmatrix} 1, 2, \cdots, k \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}$$

W 为行相关系数矩阵. 由此

$$C = W \cdot A\begin{Bmatrix} 1, 2, \cdots, k \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix} G_0 = W \qquad —(5.5.2.22)$$

利用 A 矩阵的分块表示,由

$$A_1 = A\begin{Bmatrix} 1, 2, \cdots, k \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix} \qquad A_2 = A\begin{Bmatrix} k+1, k+2, \cdots, n \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}$$

由定理 5.2.1 已经给出了任一 $A \in R^{n\times m}$, $Ax>0$ 有解的充要条件是不存在非 0 的 $y \geqslant 0$,使 $A^T y = 0$. 这一定理可从"择一定理"中推出.

定理 5.5.3.2 (择一定理) 设 $A \in R^{n\times m}$,则或者存在 x,使

$$Ax>0$$

或者存在非 0 向量 $y \geqslant 0$,使

$$A^T y = 0$$

但二者不能同时成立[1]. ■

容易理解,在定理 5.2.1 与择一定理中,把 $y \geqslant 0$ 的条件改成 $y \leqslant 0$ 也一样成立.

以下可将择一定理推广到(5.5.1.14)式形式的不等式方程组的场合. 由以上的符号规定,可有 $A \in R^{n\times m}$, $\operatorname{rank} A = k < n$,

---

〔1〕 可见《非线性规划》, M. Avriel 著,李元熹等译,上海科技出版社,1979 年,第 30 页,定理 3.3 及其证明.

$$A=\begin{bmatrix}I_k\\W\end{bmatrix}\cdot A_1 \qquad \operatorname{rank} A_1=k$$

故

$$Ax\geqslant \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix}I_k\\W\end{bmatrix}\cdot A_1x\geqslant \mathbf{0} \qquad —(5.5.3.2)$$

但注意到若成立

$$Ax\geqslant \mathbf{0}\Rightarrow A_1x\geqslant \mathbf{0}$$

故(5.5.3.2)式可写成为

$$\begin{cases}Wz\geqslant \mathbf{0}\\ z\geqslant \mathbf{0}\end{cases} \quad z\in\{A_1x \mid x\in P(A_1x\geqslant \mathbf{0})\} \qquad —(5.5.3.3)$$

注意到 $\operatorname{rank} A_1=k$，故有 $x\in P(A_1x\geqslant \mathbf{0})$

$$x=\Delta t+G^0u \quad t\in R^{m-k} \quad u\in R_+^k \qquad —(5.5.1.16b)$$

其中 G^0 由(5.5.1.12)式决定. 由那里的分析，G^0 是广义逆矩阵，且

$$A_1G^0=I_k$$

所以，

$$R(A_1x\geqslant \mathbf{0},\ x\in R^m)=R_+^k \qquad —(5.5.3.4)$$

这里 $R(\cdot)$是指值域集合.

这样，(5.5.3.2)式的成立及由(5.5.1.16b)式，即可表示为两个部分，其一是

$$x^0=\Delta t \quad t\in R^{m-k} \quad 且有\ A_1x^0=\mathbf{0}\Rightarrow Ax^0=\mathbf{0}$$

的解，即 A 的零度空间解，$x^0\in N(A)$；其二，则是可能存在的非零度空间解，$x=G^0u$，此时，由(5.5.2.4)式，必应有

$$z=u \quad u\in R_+^k$$

使

$$\begin{cases}Wu\geqslant \mathbf{0}\\ u\geqslant \mathbf{0}\end{cases} \qquad —(5.5.3.5)$$

成立. 显然，可知有以下推论.

推论 5.5.3.3 $A\in R^{n\times m}$，设 $\operatorname{rank} A=k<n$，则在 $Ax\geqslant \mathbf{0}$ 的解集合中含有非零度空间的解的充要条件是，由 A 中任一极大线性无关行向量组为基的行向量线性相关系数矩阵 $W\in R^{(n-k)\times k}$，使以下不等式方程组(即解约束方程组)

$$\begin{cases} Wu \geqslant 0 \\ u \geqslant 0 \end{cases}$$

有非 0 解. ■

另一方面,由

$$A^{T} = A_1^{T}[I_k, W^{T}]$$

故若有非 0 向量 y,使

$$A^{T}y = 0$$

就应有

$$A_1^{T} \cdot [I_k, W^{T}]y = 0$$

由于 A_1^{T} 是列满秩的,所以,只能有

$$[I_k, W^{T}]y = 0 \qquad —(5.5.3.6)$$

此式的通解是

$$y = \begin{bmatrix} I_{(n-k)} \\ -W^{T} \end{bmatrix} t \quad t \in R^{n-k} \qquad —(5.5.3.7)$$

现在再要求有 $y \geqslant 0$,那么,从(5.5.3.7)式,即知应要求有

$$\begin{cases} -W^{T}t \geqslant 0 \\ t \geqslant 0 \end{cases} \qquad —(5.5.3.8)$$

有非 0 解.

综合(5.5.3.2~8)式及择一定理,对 u、$t \neq 0$,(5.5.3.5)式、(5.5.3.8)式中必有一式成立,但不能二者同时成立. 由于 W 矩阵其实是任意的,所以,这个结论就是定理 5.3.3.4.

再由推论 5.3.3.1(及其系),可有

推论 5.5.3.4 若矩阵 $A \in R^{n\times m}$ 是行向量线性相关的,W 是 A 矩阵的行向量线性相关系数矩阵,当不存在 t_j, $j = 1, 2, \cdots, k$, $t_j \geqslant 0$, $\sum_j t_j = 1$,使 W 矩阵的列向量 w^j 成立

$$\sum_j t_j w^j \geqslant 0$$

则

$$Ax > 0 \quad 以及 \begin{cases} a_i^{T}x = 0 & i = i_1, i_2, \cdots, i_t \quad 1 \leqslant t \leqslant n-1 \\ a_j^{T}x > 0 & j = 1, 2, \cdots, n, j \neq i \end{cases}$$

方程组都是矛盾的. ■

易知,当 W 矩阵中存在负行向量 $\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}} < \boldsymbol{0}$,或存在有行向量 $\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}}$,它能被其他行向量以负线性组合方式表出,则(5.5.3.5)式无非 0 解.

设 $\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}} = (w_{ij})$ 是 W 的第 i 行向量. 若 $\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}} \leqslant \boldsymbol{0}$,但 $\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}}$ 不是严格小于 0 的,即 w_{ij} 中有若干个是 0,则经过适当编号,可以有

$$\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}} = (w_{i_1},\ w_{i_2},\ \cdots,\ w_{i_{h_i}},\ 0,\ \cdots,\ 0) \quad 1 \leqslant h_i \leqslant k,\ w_{i_j} < 0 \quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ h_i$$

称这样 $\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}}$ 为非正行向量.

系 5.5.3.5 当 W 中只存在非正行向量 $\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}} \leqslant \boldsymbol{0}$,且有正数 $t_j > 0$, $\sum_j t_j = 1$, $j = 1,\ 2,\ \cdots,\ (k - h_i)$,使

$$\sum_{j=1}^{k-h} t_j \boldsymbol{w}^{h+j} > 0 \quad h = \max_i(h_i) \quad \boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}} \leqslant 0$$

则 $A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ 是矛盾方程组,但至少有

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} & i = 1,\ 2,\ \cdots,\ h \\ \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0} & j = h+1,\ h+2,\ \cdots,\ k \end{cases}$$

是相容方程组. ■

系 5.5.3.5 的意思是说,当矩阵 W 中只存在以上形式的非正行向量(并设其元素已适当重排,使其前 h 列的元素已包含 W 矩阵的全部负数元素),则令(5.5.3.5)式中的 $\boldsymbol{u}$ 变量的前 h 个分量恒为 0,可以有等价的

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k-h} \boldsymbol{w}^{h+j} u_{h+j} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \qquad\qquad u_{h+j} \geqslant 0 \quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ k-h \end{cases}$$

不等式方程组形式. 而由以上的分析,这一不等式组存在非 0 解.

由以上分析易见,若在不等式组 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 中的 $A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ 是矛盾方程组,则不等式组 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的解一定是位于若干超平面的交平面集合上. 在几何意义上,又可以分为以下 3 种具体情形.

以 R^3 空间为例,有 4×3 阶矩阵 A 决定的不等式组

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \Leftrightarrow g_i:\ \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

且 A 矩阵中的第 1、2 行向量负线性相关

$$\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} = -w\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \quad w > 0$$

并设 $\operatorname{rank} A = 3$. 则这一不等式组形式上等价于

$$\begin{cases} g_1(g_2): \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 \\ g_i \qquad \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \quad i = 3,\ 4 \end{cases}$$

则 $g_{1,2,3,4}$ 可以有以下几何关系.

在图 5.5.3.1 的(a)中，$g_{1,2,3,4}$ 平面按箭头所示的法方向，在 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 不等式关系中，其解是这四个平面的交线 l，且其中的 g_1、g_2 平面是重合的但法方向刚好相反；在(b)中，不等式组 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的解显然是 g_1、g_2 重合的半平面即图中阴影所示的部分，且在(b)的情形里 $g_{1,2,3,4}$ 平面相似于(a)也是共线的；而在(c)的情形里，$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的解是 g_1、g_2 重合而成平面上的一个闭锥(如图中的阴影区域)，且此时 g_3、g_4 两平面共线但 $g_{1,2,3,4}$ 仅在 R^3 坐标系原点处共点(相交).

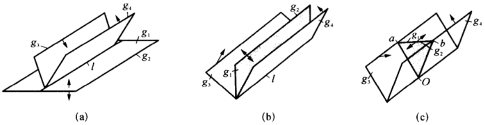


图 5.5.3.1

在 $m > 3$ 的更高维空间中，基本情形仍只有类似图 5.5.3.1 所示的这 3 种，区别仅仅在于诸超平面的“交线”可以是 1, 2, … 维的线性流形、“半平面”可以是 2, 3, … 维的线性流形，“平面上的闭锥”也可以是 2、3、… 维的线性流形.

例如设在 R^m 空间上，$A = [a_{ij}]_{n\times m}$ 阶矩阵，现假设

$$\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} = -c \cdot \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \quad c > 0$$

并考虑 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的解，设 $\operatorname{rank} A = k+1,\ k \geqslant 1$，简记

$$A\{\cdot\} = A\begin{Bmatrix} 3,\ 4,\ \cdots,\ n \\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m \end{Bmatrix}$$

$$A\{1\} = \begin{bmatrix} -\dfrac{a_{12}}{a_{11}},\ -\dfrac{a_{13}}{a_{11}},\ \cdots,\ -\dfrac{a_{1m}}{a_{11}} \\ I_{(m-1)} \end{bmatrix}_{m\times(m-1)}$$

这里设 $A\{\cdot\}$ 矩阵的前 k 个行向量是线性无关的，设 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}$ 行向量的第 1 个元素 a_{11} 非 0.

则

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \end{cases}$$

的解就是

$$\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$$

的解

$$\boldsymbol{x} = \Lambda\{1\}\boldsymbol{z} \quad \boldsymbol{z} \in R^{m-1} \qquad \text{—(5.5.3.9)}$$

将(5.5.3.9)式代入其他的 $n-2$ 个不等式，有

$$A'\boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{z} \in R^{m-1} \qquad \text{—(5.5.3.10)}$$

其中
$$A' = A\{\cdot\}\Lambda\{1\}_{(n-2)\times(m-1)}$$

设
$$\operatorname{rank} A' = s \quad 1 \leqslant s \leqslant m$$

(1) 当 $n-2 = m-1$ 且 $s = m-1$，则 A' 满秩，(5.5.3.10) 式的解可表示为

$$\boldsymbol{z} = (A')^{-1}\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} \in R_+^{m-1}$$

而 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的解就是

$$\boldsymbol{x} = \Lambda\{1\}(A')^{-1}\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} \in R_+^{m-1} \qquad \text{—(5.5.3.11)}$$

(5.5.3.11)式即相当于在(5.5.3.9)式决定的 $m-1$ 维超平面上再构造出一个闭锥如图 5.5.3.1 中的(c). 这时易知必有 $\operatorname{rank} A = m$.

(2) 当 $s < m-1$，作

$$\Lambda' = \begin{bmatrix} -\left(A'\begin{Bmatrix}1, 2, \cdots, s\\ 1, 2, \cdots, s\end{Bmatrix}\right)^{-1} \cdot A'\begin{Bmatrix}1, 2, \cdots, s\\ s+1, s+2, \cdots, m-1\end{Bmatrix} \\ I_{(m-1-s)} \end{bmatrix}$$

Λ' 是$(m-1)\times(m-1-s)$ 阶矩阵. 并作

$$\boldsymbol{z} = \Lambda'\boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-1-s} \qquad \text{—(5.5.3.12)}$$

以及

$$\Pi' = \begin{bmatrix} I_s \\ \left(\left(A'\begin{Bmatrix}1, 2, \cdots, s\\ 1, 2, \cdots, s\end{Bmatrix}\right)^{-1} A'\begin{Bmatrix}1, 2, \cdots, s\\ s+1, s+2, \cdots, m-1\end{Bmatrix}\right)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

Π' 是$(m-1)\times s$ 阶矩阵. 并作(5.5.3.12) 式的法向量补空间

$$\boldsymbol{\beta} = \Pi'\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} \in R^s$$

记

$$B' = A'\begin{Bmatrix}1, 2, \cdots, s\\ 1, 2, \cdots, m-1\end{Bmatrix}\Pi'$$

应有

$$B'\boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad —(5.5.3.13)$$

B' 是 $s \times s$ 阶矩阵.由前所述,B' 可逆.故(5.5.3.13)式的解是

$$\boldsymbol{v} = (B')^{-1}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^s \qquad —(5.5.3.14)$$

将(5.5.3.14)式再代入其他的不等式,可得

$$\begin{cases} C'\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad —(5.5.3.15)$$

这里

$$C' = A'\begin{Bmatrix} s+1,\ s+2,\ \cdots,\ n-2 \\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1 \end{Bmatrix}\Pi' \cdot (B')^{-1}$$

则可知以下结论

(2.1) 当(5.5.3.15)式没有非0解,则 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 不等式组的解是

$$\boldsymbol{x} = \Lambda\{1\} \cdot \Lambda'\boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-1-s} \qquad —(5.5.3.16)$$

这就是 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 不等式组的各边界超平面"共线"解的情形,如图5.5.3.1的(a).当 $s = m-2$,即为直观理解上的共线.

(2.2) 当(5.5.3.15)式有非0解,设其解集合简记为 $P^+(C')$,并记

$$G_0' = \Pi' \cdot (B')^{-1}$$

G_0' 是 $(m-1) \times s$ 阶矩阵,且具有"+"号逆矩阵的意义.可以有 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 不等式的解是

$$\boldsymbol{x} = \Lambda\{1\}\Lambda'\boldsymbol{t} + \Lambda\{1\} \cdot G_0'\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-1-s} \quad \boldsymbol{u} \in P^+(C') \qquad —(5.5.3.17)$$

这时,解空间就类似于图5.5.3.1的(b),各边界超平面共线且 g_1、g_2 重合超平面的一侧半平面即为解空间.

将以上结论再推广至更复杂的情况原则上不会有什么困难.重复指出以下一点是有必要的,在以上情形中,当 $A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ 为矛盾方程组,则 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 不等式组的解一定是若干超平面的交集合的子集.

例 5.5.3.1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & -2 & -2 \\ -6 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}\, A = 2$$

解 $$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

不作详细的求解直接写出结果，其解记为$\tilde{x}$，

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{t}+\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u \quad \boldsymbol{t}\in R^2 \quad u\geqslant 0$$

本例中前 2 个不等式负线性相关. 可以验证

$$A\tilde{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 6\end{bmatrix}u\geqslant \mathbf{0}$$

故其解是在 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 决定的平面上，且不等式组的解只是

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0\\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0\\ \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant 0\end{cases}$$

的解，即是说 $A\boldsymbol{x}>\mathbf{0}$ 是矛盾的.

例 5.5.3.2 将上例中的矩阵 A 扩展成

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1 & 1\\ -6 & 4 & -2 & -2\\ -6 & 1 & -2 & 1\\ 12 & 4 & 4 & -8\end{bmatrix} \qquad \operatorname{rank} A=2$$

解 $A\boldsymbol{x}\geqslant \mathbf{0}$

由 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 的基础解系为

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{z} \quad \boldsymbol{z}\in R^3 \quad \text{即 } \Lambda\{1\}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

代入后两个不等式并经简化可得

$$\begin{cases}-(z_1-z_3)\geqslant 0\\ \quad z_1-z_3\geqslant 0\end{cases}$$

这是矛盾不等式，只能有

$$z_1-z_3=0$$

则这一等式方程的解是

$$z=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}u \quad u\in R^2$$

故得到本例的最终解是

$$x=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}u \quad u\in R^2$$

例 5.5.3.3

$$A=\begin{bmatrix}3&-2&1&1\\-6&4&-2&-2\\-6&1&-2&1\\12&4&2&4\\3&-2&3&-11\end{bmatrix} \qquad \text{rank}\,A=3 \quad \textbf{解} \quad Ax\geqslant \mathbf{0}$$

本例矩阵 A 的前 3 行向量与上例相同. 故将 $a_1^{\mathrm{T}}x=0$ 的解代入后 3 个不等式，有

$$\begin{bmatrix}-3&0&3\\12&-2&0\\0&2&-12\end{bmatrix}z\geqslant 0 \quad 即\ A'=\begin{bmatrix}-3&0&3\\12&-2&0\\0&2&-12\end{bmatrix}$$

$\text{rank}\,A'=2=s$

解 $$A'z\geqslant \mathbf{0}$$

可从

$$\begin{cases}(a_1')^{\mathrm{T}}z=\mathbf{0}\\(a_2')^{\mathrm{T}}z=\mathbf{0}\end{cases} \qquad 记\ A'\begin{Bmatrix}1,2\\1,2,3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&0&3\\12&-2&0\end{bmatrix}$$

$$A'\begin{Bmatrix}3\\1,2,3\end{Bmatrix}=[0\quad 2\quad -12]$$

中得

$$z=\begin{bmatrix}1\\6\\1\end{bmatrix}t \quad t\in R$$

再作法向量集,得

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} \in R^2 \quad 即\ \Pi' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$$

并可得到

$$B' = \begin{bmatrix} -6 & -18 \\ 12 & -2 \end{bmatrix} \quad 及 \quad \boldsymbol{v} = \frac{1}{228}\begin{bmatrix} -2 & 18 \\ -12 & -6 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^2$$

所以

$$C' = A'\left\{\begin{matrix} & 3 & \\ 1, & 2, & 3 \end{matrix}\right\} \Pi' \cdot (B')^{-1} = (-4, -1)$$

从而,有

$$\begin{cases} -4u_1 - u_2 \geqslant 0 \\ u_1,\ u_2 \qquad \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 = u_2 = 0$$

故本例的最终解是

$$\boldsymbol{x} = \Lambda\{1\} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} t \quad t \in R$$

$\Lambda\{1\}$ 同例 5.5.3.1. 本例解空间的几何意义类似于图 5.5.3.1 的(a).

例 5.5.3.4

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & -2 & -2 \\ -6 & 1 & -2 & 1 \\ -12 & 5 & -3 & -2 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rank} A = 3 \qquad \textbf{解} \quad A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

本例矩阵 A 的前 3 行向量与上例同. 直接写出结果

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 & -\frac{7}{10} \\ -1 & -\frac{7}{10} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \quad t \in R \quad \boldsymbol{u} \in R_+^2$$

例 5.5.3.5

$$A=\begin{bmatrix}3&-2&1&1\\-6&4&-2&-2\\-6&1&-2&1\\12&4&2&4\\3&-1&1&2\end{bmatrix}\quad \operatorname{rank}A=4 \qquad \textbf{解}\quad A\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0}$$

本例矩阵 A 的前 3 行向量与上例同. 可知

$$A'=\begin{bmatrix}-3&0&3\\12&-2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

故 $\operatorname{rank}A'=3$,所以,本例的解是

$$\boldsymbol{x}=\Lambda\{1\}\cdot(A')^{-1}\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&-\frac{5}{6}\\-\frac{1}{6}&0&\frac{1}{2}\\-1&-\frac{1}{2}&3\\\frac{1}{6}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{u}\in R_+^3$$

注意,本例的解与例 5.5.3.2 的解的区别不仅在于 $\boldsymbol{u}$ 的维数的区别,还在于本例要求 $\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}$,而例 5.5.3.2 则无此条件. 本例在几何意义上类似于图 5.5.3.1 的(c),而例 5.5.3.2 则类似于(a).

可以对于向量间存在正线性相关关系的几何意义给予更多的分析. 当 $\boldsymbol{a}_{1,2,3}$ 三个方向向量中,$\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}$ 可以由 $\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}=t_1\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}+t_2\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}$, t_1, $t_2\geqslant 0$ 的正线性(相关)组合表出时,其几何图形即如图 5.5.1.1 那样的情形作射线

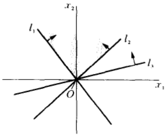


图 5.5.1.1

$$l_{1,2,3}=\boldsymbol{a}_{1,2,3}^{\mathrm{T}}s\quad s\in R$$

则在图 5.5.1.1 中,

不妨记 l_1, l_2 的法方向数向量为

$$\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}=(k_1,1)\quad l_1: x_2=-k_1x_1$$

$$\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}=(-k_2,1)\quad l_2: x_2=k_2x_1$$

k_1, $k_2>0$.

$$\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}=(k_3,1)\quad l_3: x_2=-k_3x_1$$

若已知 l_1, l_2 按各自的法方向构成图中阴影区域所示的锥,且 l_3 的法方向如图

所示，即使

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \\ \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \end{cases}$$

方程组的解集合即为这一阴影区域所示的锥，则必有

$$-k_1 \leqslant -k_3 \leqslant k_2$$

且由于 $\boldsymbol{a}_{1,2,3}^{\mathrm{T}}$ 是线性相关的，而 $\boldsymbol{a}_{1,2}^{\mathrm{T}}$ 是线性无关的，故可求得 $\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}$ 向量的线性相关系数 t_1，t_2：

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 - k_2 \\ 1 \quad\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{k_2 + k_3}{k_1 + k_2} \\ \dfrac{k_1 - k_3}{k_1 + k_2} \end{bmatrix} \geqslant \mathbf{0}$$

因此，图 5.5.1.1 所示的几何关系就是关于向量(组)之间存在正(非负)线性相关关系时的几何意义之所在.

将这里的分析推广到高维 R^m 空间，利用截平面的方法可得到正线性相关向量(组)之间的几何关系如图 5.5.1.1 所示. 需要说明的仅是与 R^2 不同之处在于当 R^m，$m>2$ 时，对向量组不等式，

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \quad \operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}) = k \leqslant n$$

的解集合 $P(\cdot)$ 取 Ots 正交坐标平面(截平面)，Ots 的原点与 R^m 重合且 s 轴(正向)在 $P(\cdot)$ 锥中，则对于任取的与 s 轴正交的某个 t 轴方向所构造的 Ots 坐标平面上，线性无关向量组 $\boldsymbol{a}_{i_t}^{\mathrm{T}}$，$t=1,\ 2,\ \cdots,\ k$，决定的超平面

$$\boldsymbol{a}_{i_t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 \quad t = 1,\ 2,\ \cdots,\ k$$

与 Ots 坐标平面的交线 L_{i_t} 决定的方向向量之间可能是线性相关的. 这可以用 $m=3$ 时的情形予以说明.

在图 5.5.3.2 中，

$$g_i:\ \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 \quad i = 1,\ 2,\ 3$$

组成了一个锥体. 锥上的断面用斑点阴影区域表示了出来. $l_{1,2,3}$ 是锥体的棱线. 在这个锥体中任取一点 A，并从原点向 A 引射线为 l_s 作为 s 轴，并取与 s 轴正交的某一个方向为 t 轴决定 Ots 坐标平面，比如图中用灰色阴影区域表示的平面 L. 则 $g_{1,2,3}$ 平面与 L 平面

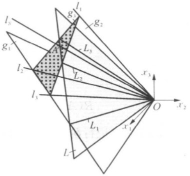


图 5.5.3.2

有交线L_1，L_2和L_3. 显然，$L_{1,2,3}$在Ots坐标系(即L平面)上的几何关系类似于图5.5.1.1那样的关系. 故，$L_{1,2,3}$射线的方向向量间存在正线性相关关系.

因此，这里所得到的结论即是，设$\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}$是$R^m$空间的向量，

$$g_i: \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

是R^m上的超平面. 若

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \quad i = 1, 2, 3$$

的解是g_1，g_2超平面夹成的锥，且$\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}$可由$\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}$的非负线性组合表出，那么，其充要条件是在锥中任取由R^m原点出发的射线l_s作为s轴，并任取与s轴正交的一个方向为t轴，作Ots坐标平面，则g_1、g_2、g_3在Ots坐标平面上的交线的方向向量(记为$\boldsymbol{a}_i^l$)，均存在

$$\boldsymbol{a}_3^l = t_1\boldsymbol{a}_1^l + t_2\boldsymbol{a}_2^l \quad t_1, t_2 \geqslant 0$$

的关系.

§5.5.4 值域$R(Ax\geqslant 0)$的构造及闭锥的表示定理

用

$$R(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) = \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{x} \in R^m\} \subset R_+^n \quad —(5.5.4.1)$$

表示所有的$\boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$的$\boldsymbol{x}$决定的$A\boldsymbol{x}$的值域，这与$A$的值域$R(A)$的意义有所区别. 相比较$R(A)$是指

$$R(A) = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in R^m\}$$

设$A \in R^{n\times m}$，$\mathrm{rank}(A) = k \leqslant n$，由上一节关于$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$的解的构造，可有对于$\boldsymbol{y} \in R(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$，有

$$\boldsymbol{y} = A\cdot(\Lambda\boldsymbol{t} + G_0D_+\boldsymbol{u}) \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-k} \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$$

即知

$$\boldsymbol{y} = AG_0D_+\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \quad —(5.5.4.2)$$

所以

$$R(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) = \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} = AG_0D_+\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}\} \quad —(5.5.4.3)$$

以下简化记号，记行阶数为n阶的矩阵，

$$Y = AG_0D_+ \quad —(5.5.4.4)$$

可知总要有$Y \geqslant 0$成立. 记$\boldsymbol{y}^j$是Y矩阵的第j列向量，有

$$Y = [\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \cdots] \quad \boldsymbol{y}^j \geqslant \boldsymbol{0}$$

记

$$\boldsymbol{y}^j = (y_1^j, y_2^j, \cdots, y_n^j)^{\mathrm{T}} \quad y_k^j \geqslant 0 \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

对于 Y 的第 j 列向量 $\boldsymbol{y}^j$，一定有 $\boldsymbol{x}^j \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$，使

$$\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^j = y_k^j \quad k = 1, 2, \cdots, n \qquad —(5.5.4.5)$$

成立，例如可取(5.5.4.3)式中的 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_j$.

因为在 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的解的构造中(见(5.5.1.16)式)，乘积矩阵 $G_0 D_+$ 中不含有 0(列)向量，故 $\boldsymbol{y}^j \geqslant \boldsymbol{0}$，但不会有 $\boldsymbol{y}^j = \boldsymbol{0}$ 的情形. 不妨设 $\boldsymbol{y}^j$ 的 0 分量为 $y_{k_t}^j = 0$，$t = 1, 2, \cdots, s$. 则(5.5.4.5)式可表成

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{k_t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 & t = 1, 2, \cdots, s \\ \boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = y_k^j > 0 & k = 1, 2, \cdots, n \quad k \neq k_t \end{cases} \qquad —(5.5.4.6)$$

注意，若记

$$l_y^j: \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}^j \cdot v \quad v \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \cdots; \quad \boldsymbol{z} \in R^n \qquad —(5.5.4.7)$$

那么，l_y^j 是 R_+^n 正象限上的射线(从原点出发). 很显然，所有的 l_y^j 射线围成的锥，就是 $R(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 值域锥. 而(5.5.4.7)、(5.5.4.6)式告诉我们，l_y^j 射线对应于

$$\boldsymbol{a}_{k_t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 \quad t = 1, 2, \cdots, s \qquad —(5.5.4.8)$$

决定的超平面的交线. 由这个信息，使我们可以理解 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 在 R^m 空间上的几何性状. 如果取 $m = 3$，则我们还可以准确地将 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 表示出来.

续例 5.5.1.2 在例 5.5.1.2 中已得到了那里所给出的 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 不等式组的解，$\boldsymbol{x} = B^+ \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^4$ 可有值域的表达式是 $A\boldsymbol{x} = A \cdot B^+ \boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 7 & 3 & -2 \\ 10 & 5 & 2 \\ 6 & -9 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{16}{45} & \frac{1}{9} & \frac{2}{5} & -\frac{17}{21} \\ -\frac{34}{45} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{5} & \frac{82}{21} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{5} & -\frac{120}{21} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$A\boldsymbol{x} = Y\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{367}{21} \\ 0 & 1 & \frac{21}{5} & 0 \\ \frac{367}{45} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^4$$

用 $\boldsymbol{y}^{1,2,3,4}$ 表示上式等号右边 $\boldsymbol{u}$ 前的矩阵 Y 的列向量. $\boldsymbol{y}^i$ 就对应于 $A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 解空间闭锥的棱射线的方向向量,即 B^+ 矩阵的对应(上标)的列向量与 A 矩阵的乘积. 则 $\boldsymbol{y}^i$ 列向量中零值分量的下标即表示了 B^+ 矩阵第 i 列向量为那两个边界平面的交射线的方向向量. 如对应于 B^+ 的第1列向量, $\boldsymbol{y}^1$ 的0分量是第2、3分量,从而可知 B^+ 的第1列向量是

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0\\\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0\\\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0\\\boldsymbol{a}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0\end{cases}$$

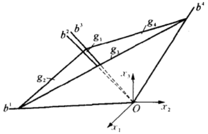


图 5.5.4.1

(子)方程组的解, $\boldsymbol{a}_{1,2,3,4}^{\mathrm{T}}$ 是 A 的行向量[1]. 余可类推. 由此可以画出 $\boldsymbol{x}=B^+\boldsymbol{u}$ 的几何图形.

图 5.5.4.1 中 $b^{1,2,3,4}$ 是 B^+ 矩阵的列向量决定的射线(棱), $g_{1,2,3,4}$ 则是 $\boldsymbol{a}_{1,2,3,4}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 决定的边界平面. 由图 5.5.4.1 可见在本例中形如

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_{i_j}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0 & j=1,2,3\\\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0 & k\neq i_j\end{cases}\qquad \{i_1,i_2,i_3,k\}=\{1,2,3,4\}$$

的方程组是矛盾的(在代数上这可由 $\operatorname{rank}A=3$ 推出),同时

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0\\\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0\\\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0\\\boldsymbol{a}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0\end{cases}\qquad\begin{cases}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0\\\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0\\\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0\\\boldsymbol{a}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0\end{cases}$$

也是矛盾的.

由以上的分析知, Y 矩阵其实在 A 给定时,完全由 G_0D_+ 乘积矩阵所决定. 注意 G_0D_+ 乘积矩阵的性质, G_0 可以是(5.5.2.26)式决定的任一个

$$A\begin{Bmatrix}i_1,i_2,\cdots,i_k\\j_1,j_2,\cdots,j_k\end{Bmatrix}=A_k$$

且 A_k 可逆,所构造的 G_0'(省略上标"′"),而 D_+ 是非负矩阵,所以,可以将乘积矩

〔1〕 附带地说, Y 矩阵行向量中的0分量,表示了 B^+ 矩阵列向量作为射线方向向量的相邻关系. 如可知 B^+ 矩阵的第2、3列向量决定的射线是相邻的,这里"相邻"的意思是指处于 $P(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})$ 的同一边界平面上.

阵 G_0D_+ 的列向量，理解为是由某个 A_k 子矩阵的逆阵的各列向量(在 D_+ 矩阵右乘作用下)以非负正线性组合的方式构造出来的.

以这样的观点去理解，就马上可以想到最简的乘积矩阵 G_0D_+ 的列向量，应当是某个 A_k(可逆)子矩阵的逆阵的某一个列向量按(5.5.2.26)式的记法直接构造出来的.

先给出以下引理

引理 5.5.4.1 $Y = AG_0D_+$ 矩阵的任一列向量 $\boldsymbol{y}^j$，总可以做到使得 $\boldsymbol{y}^j$ 中至少含有 $k-1$ 个 0 分量，$k = \text{rank}\, A$. ■

证明：设

$$Y = [\boldsymbol{y}^1,\ \boldsymbol{y}^2,\ \cdots,\ \boldsymbol{y}^v]$$

$\boldsymbol{y}^j$ 是 Y 的第 j 列向量. 并设 $\boldsymbol{y}^j$ 中含有 p 个 0 分量，$p < k-1$. 以下证明 $\boldsymbol{y}^j$ 必可被分解成 $\boldsymbol{y}_1^j,\ \boldsymbol{y}_2^j,\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_i^j$ 这样一组列向量的非负线性组合，其中 $\boldsymbol{y}_i^j \geqslant \boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{y}_i^j$ 至少含有 $p+1$ 个 0 分量.

可以注意到(5.5.4.3)式，当 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 中不存在 $G_0D_+\,\boldsymbol{u}$ 项时，

$$R(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) = \{\boldsymbol{0}\}$$

即 $R(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 只是一个 $\boldsymbol{0}$ 元素的单点集. 这时任一 $\boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$，都有 $\boldsymbol{x} \in N(A)$

$$\boldsymbol{x} = \Lambda \boldsymbol{t}$$

而基础解系矩阵 Λ 的列向量(组)，是 $N(A)$ 零度空间的一组极大线性无关(基)向量组，其充要条件(由齐次线性方程组解的理论)可知，可以表示为，取 i_1, i_2, $\cdots$, i_p 是 1, 2, $\cdots$, n 中的任一个子列，记

$$I\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_p\} = \{i \mid \boldsymbol{a}_{i_t}\boldsymbol{x} = 0,\ i = i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_p\}$$

则当且仅当

$$|\ I\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_p\}\ | = k$$

且

$$\text{rank}(A_{I\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_p\}}) = k$$

时，

$$A_{I\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_p\}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

的基础解系矩阵 $\Lambda\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_p\}$ 是 $N(A)$ 的一个极大线性无关向量组.

其次，不失一般性，设 $\boldsymbol{y}^j$ 的前 p 个分量为 0，后 $n-p$ 个分量为正数. 由于 $\boldsymbol{y}^j$ 是 $R(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 中的元素，所以，由 $\boldsymbol{y}^j$ 中 0 分量的下标，可知以下不等式方程组

$$\begin{cases} a_i^{\mathrm{T}} x = 0 & i = 1, 2, \cdots, p \\ a_i^{\mathrm{T}} x > 0 & i = p+1, p+2, \cdots, n \end{cases} \qquad —(5.5.4.9)$$

式一定有非 0 解存在.

由 rank $A = k$,故从(5.5.4.9)式任取出一个 a_i^{T} 行向量极大线性无关的等式(不等式)方程组都至少要含有 2 个(或更多个)不等式. 不妨设(5.5.4.9)式中的前 s 个方程组线性无关,$s \leqslant p$,并可取出以下一个极大线性无关等式——不等式方程组

$$\begin{cases} a_i^{\mathrm{T}} x = 0 & i = 1, 2, \cdots, s \\ a_i^{\mathrm{T}} x > 0 & i = p+1, p+2, \cdots, (k-s+p) \end{cases} \qquad —(5.5.4.10)$$

为方便叙述,可作下标变换,令

$$i \in \widetilde{I} = \{1, 2, \cdots, s, p+1, p+2, \cdots, k-s+p\} \Leftrightarrow h \in \{1, 2, \cdots, k\} = \widetilde{k}$$

对应地,令 $\quad a_i^{\mathrm{T}} \quad i \in \widetilde{I} \Leftrightarrow \widetilde{b}_h^{\mathrm{T}} \quad h \in \widetilde{k}$

即用 b_h^{T} 来表示 a_i^{T}.

则(5.5.4.10)式可简写成

$$\begin{cases} b_h^{\mathrm{T}} x = 0 & h = 1, 2, \cdots, s \\ b_h^{\mathrm{T}} x > 0 & h = s+1, s+2, \cdots, k \end{cases} \qquad —(5.5.4.11)$$

(5.5.4.11)式中的 $b_h^{\mathrm{T}} \quad h = 1, 2, \cdots, k$ 是线性无关的. 记$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} b_1^{\mathrm{T}} \\ b_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ b_k^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$,

$$\widetilde{B}x \geqslant \mathbf{0} \Leftrightarrow b_h^{\mathrm{T}} x \geqslant \mathbf{0} \quad h = 1, 2, \cdots, k$$

的解($k < m$)是

$$\widetilde{x} = \widetilde{\Lambda} t + G_0 u \quad t \in R^{m-k} \quad u \in R_+^k \qquad —(5.5.4.12)$$

其中 $\widetilde{\Lambda}$ 为$\widetilde{B}x = \mathbf{0}$ 的基础解系矩阵,G_0 是$\widetilde{B}$ 中的任一 $k \times k$ 阶可逆子矩阵(由(5.5.2.26)式的规定)构造的广义逆矩阵$\widetilde{B}^{(1,3)}$.

从(5.5.4.12)式中令参变量 u 取以下形式,

$$u_i = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, s$$

$$u_i > 0 \quad i = s+1, s+2, \cdots, k$$

由此 $\boldsymbol{u}$ 向量所构造的$\tilde{\boldsymbol{x}}$ 为

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \widetilde{\Lambda}\boldsymbol{t} + [\boldsymbol{g}^{s+1}, \boldsymbol{g}^{s+2}, \cdots, \boldsymbol{g}^{k}]\hat{\boldsymbol{u}} \quad \hat{\boldsymbol{u}} > \boldsymbol{0} \quad \hat{\boldsymbol{u}} \in R^{k-s} \qquad \text{—(5.5.4.13)}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{u}} = (u_{s+1}, u_{s+2}, \cdots, u_k)^{\mathrm{T}} > 0$$

则由(5.5.4.13)式构造的 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 显然就是(5.5.4.11) 式也就是(5.5.4.10) 式的解，其中 $\boldsymbol{g}^{s+1}$, $\boldsymbol{g}^{s+2}$, …, $\boldsymbol{g}^{k}$ 是 G_0 的第 $s+1$, $s+2$, …, k 列向量.

注意到(5.5.4.10)式是(5.5.4.9)式的一个子方程组，故(5.5.4.10)式的解一定只是(5.5.4.13)式构造的$\tilde{\boldsymbol{x}}$中的一个(子)集合.

现在，$\boldsymbol{y}^j$是(5.5.4.9) 式的一个可取的值，所以，必可有 $\hat{\boldsymbol{u}}^*$ 存在，使(5.5.4.13) 式中得到的

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^* = \widetilde{\Lambda}\boldsymbol{t} + [\boldsymbol{g}^{s+1}, \boldsymbol{g}^{s+2}, \cdots, \boldsymbol{g}^{k}]\hat{\boldsymbol{u}}^* \qquad \text{—(5.5.4.13a)}$$

可使(5.5.4.9)式取到 $\boldsymbol{y}^j$值，即

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}^* = 0 & i = 1, 2, \cdots, p \\ \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}^* = y_i^j > 0 & i = p+1, p+2, \cdots, n \end{cases} \qquad \text{—(5.5.4.14)}$$

注意

$$W = A\begin{Bmatrix} h_1, h_2, \cdots, h_{n-k} \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix} \cdot G_0 \in R^{(n-k)\times k}$$

的关系，这里 $\{h_1, h_2, \cdots, h_{n-k}\} \cup \widetilde{I} = \{1, 2, \cdots, n\}$. W 是 A 矩阵的行线性相关系数矩阵. 并易知$\widetilde{\Lambda}$ 矩阵也就是 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系矩阵，所以，

$$A\begin{Bmatrix} h_1, h_2, \cdots, h_{n-k} \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}^* = W\begin{Bmatrix} 1, 2, \cdots, n-k \\ s+1, s+2, \cdots, k \end{Bmatrix}\hat{\boldsymbol{u}}^* \qquad \text{—(5.5.4.15)}$$

将(5.5.4.15)式代入(5.5.4.14)式，得

$$\begin{cases} W\begin{Bmatrix} 1, 2, \cdots, n-k \\ s+1, s+2, \cdots, k \end{Bmatrix}\hat{\boldsymbol{u}}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y^j_{k-s+p+1} \\ y^j_{k-s+p+2} \\ \vdots \\ y^j_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} p-s\text{个}0 \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} > 0 \end{matrix} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^* > \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad \text{—(5.5.4.16)}$$

再将(5.5.4.16)式分解为以下两个子方程组，

$$\begin{cases} W\begin{Bmatrix} 1,\ 2,\ \cdots,\ p-s \\ s+1,\ s+2,\ \cdots,\ k \end{Bmatrix}\hat{u}^{*} = \mathbf{0} \\ \hat{u}^{*} > \mathbf{0} \end{cases} \quad —(5.5.4.17)$$

$$\begin{cases} W\begin{Bmatrix} p-s+1,\ p-s+2,\ \cdots,\ n-k \\ s+1,\ s+2,\ \cdots,\ k \end{Bmatrix}\hat{u}^{*} = \begin{bmatrix} y^{j}_{k-s+p+1} \\ y^{j}_{k-s+p+2} \\ \vdots \\ y^{j}_{n} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \\ \hat{u}^{*} > \mathbf{0} \end{cases} \quad —(5.5.4.18)$$

由于(5.5.4.17)、(5.5.4.18)式中的 $\hat{u}^{*}$ 是存在的，故说明

$$\begin{cases} W\begin{Bmatrix} 1,\ 2,\ \cdots,\ p-s \\ s+1,\ s+2,\ \cdots,\ k \end{Bmatrix}\hat{u} = \mathbf{0} \\ \hat{u} \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \quad —(5.5.4.19)$$

$$\begin{cases} W\begin{Bmatrix} p-s+1,\ p-s+2,\ \cdots,\ n-k \\ s+1,\ s+2,\ \cdots,\ k \end{Bmatrix}\hat{u} \geqslant \mathbf{0} \\ \hat{u} \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \quad —(5.5.4.20)$$

二式有非 0 解，并且其非 0 解的解集合的交非空.

记(5.5.4.19)式的解是

$$\hat{u} = \Lambda_{w} \cdot D^{w}_{+}\,\hat{v} \quad \hat{v} \geqslant \mathbf{0} \quad —(5.5.4.21)$$

其中 Λ_{w} 是(5.5.4.19)式中的 $W\{\cdot\}\hat{u} = \mathbf{0}$ 的基础解系矩阵，$D^{w}_{+} \geqslant 0$ 则是解(5.5.4.19)式的过程中会出现的

$$\hat{u} = \Lambda_{w}t \geqslant \mathbf{0} \quad (\text{隐含了 } t \geqslant \mathbf{0}) \Rightarrow t = D_{+}\,v \quad v \geqslant \mathbf{0}$$

不等式方程组的解矩阵.

将(5.5.4.21)式代入(5.5.4.20)式，并记

$$W\begin{Bmatrix} p-s+1,\ p-s+2,\ \cdots,\ n-k \\ s+1,\ s+2,\ \cdots,\ k \end{Bmatrix} \cdot \Lambda_{w}D^{w}_{+} = W_{\Lambda} \quad —(5.5.4.22)$$

有

$$\begin{cases} W_{\Lambda}\hat{v} \geqslant \mathbf{0} \\ \Lambda_w D_+^w \hat{v} \geqslant \mathbf{0} \\ \hat{v} \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

注意(5.5.4.21)式中必应有 $\Lambda_w D_+^w \geqslant 0$，故上式中的

$$\Lambda_w D_+^w \hat{v} \geqslant \mathbf{0}$$

子方程组是冗余的，可以省略，便得到

$$\begin{cases} W_{\Lambda}\hat{v} \geqslant \mathbf{0} \\ \hat{v} \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \qquad —(5.5.4.23)$$

由上可知，(5.5.4.23)式也一定有非0解.

设(5.5.4.23)式的解是(见(5.3.2.28)式)，

$$\begin{cases} \hat{v} = \widetilde{D}_+^w z \quad z \geqslant \mathbf{0} \\ \widetilde{D}_+^w = [\widetilde{L}_+^w, \widetilde{E}_+^w, \widetilde{\Lambda}_+^w] \end{cases} \qquad —(5.5.4.24)$$

将(5.5.4.24)式代回到(5.5.4.21)式，得

$$\hat{u} = \Lambda_w D_+^w \widetilde{D}_+^w z \quad z \geqslant \mathbf{0} \qquad —(5.5.4.25)$$

且由于 $\hat{u}^*$ 作为(5.5.4.19)、(5.5.4.20)式的共同解存在，所以，总有 $z^* \geqslant \mathbf{0}$，使

$$\hat{u}^* = \Lambda_w D_+^w \widetilde{D}_+^w z^*$$

将上式代回到(5.5.4.13a)式，

$$\tilde{x}^* = \widetilde{\Lambda} t + [g^{s+1}, g^{s+2}, \cdots, g^k] \cdot \Lambda_w D_+^w \widetilde{D}_+^w z^*$$

所以，可知有

$$y^j = A\tilde{x}^* = A \cdot [g^{s+1}, g^{s+2}, \cdots, g^k] \cdot \Lambda_w D_+^w \widetilde{D}_+^w z^* \qquad —(5.5.4.26)$$

这样，便将 y^j 分解开来了.

现在考虑乘积矩阵 Y_A，

$$Y_A = A \cdot [g^{s+1}, g^{s+2}, \cdots, g^k] \cdot \Lambda_w D_+^w \widetilde{D}_+^w \qquad —(5.5.4.26a)$$

的各列向量中的0分量的个数.

首先易知，若记

$$A\cdot[g^{s+1},\ g^{s+2},\ \cdots,\ g^{k}]=A_g=\begin{bmatrix}(a_1^g)^{\mathrm T}\\(a_2^g)^{\mathrm T}\\\vdots\\(a_n^g)^{\mathrm T}\end{bmatrix}$$

矩阵乘积矩阵.则 A_g 矩阵中,由 $g^{s+1},\ g^{s+2},\ \cdots,\ g^{k}$ 与

$$i\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ s,\ p+1,\ p+2,\ \cdots,\ k-s+p\}$$

下标决定的 $a_i^{\mathrm T}$ 行向量相乘的结果,可知 A_g 矩阵中的第 $1,\ 2,\ \cdots,\ s$ 行向量为 $\mathbf{0}$ 向量,这由 $g^{s+1},\ g^{s+2},\ \cdots,\ g^{k}$ 是 G_0 的列向量,以及 G_0 的构造及其具有的(广义)逆矩阵的属性即知.且由

$$Y_A=A_g\cdot\Lambda_w D_+^w\widetilde{D}_+^w$$

便知 Y_A 矩阵的各个列向量至少含有 s 个 0 分量.

其次,若记

$$A_g\cdot\Lambda_w D_+^w=A^w=\begin{bmatrix}(a_1^w)^{\mathrm T}\\(a_2^w)^{\mathrm T}\\\vdots\\(a_n^w)^{\mathrm T}\end{bmatrix}$$

则由以上的(5.5.4.15～17)式,即知 A^w 矩阵的行向量中,由 A_g 矩阵中下标 $i\in\{h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_{n-k}\}$ 的行向量 $(a_i^g)^{\mathrm T}$ 与 $\Lambda_w D_+^w$ 的乘积,刚好就是

$$\begin{bmatrix}(a_i^g)^{\mathrm T}\\(a_j^g)^{\mathrm T}\\\vdots\end{bmatrix}=A\begin{Bmatrix}h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_{n-k}\\1,\ 2,\ \cdots,\ m\end{Bmatrix}[g^{s+1},\ g^{s+2},\ \cdots,\ g^{k}]=W\begin{Bmatrix}1,\ 2,\ \cdots,\ n-k\\s+1,\ s+2,\ \cdots,\ k\end{Bmatrix}$$

$$i,\ j\in\{h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_{n-k}\}$$

$$\begin{bmatrix}(a_i^g)^{\mathrm T}\\(a_j^g)^{\mathrm T}\\\vdots\end{bmatrix}\cdot\Lambda_w D_+^w=W\begin{Bmatrix}1,\ 2,\ \cdots,\ n-k\\s+1,\ s+2,\ \cdots,\ k\end{Bmatrix}\Lambda_w D_+^w$$

$$=\begin{bmatrix}W\begin{Bmatrix}1,\ 2,\ \cdots,\ p-s\\s+1,\ \cdots,\ k\end{Bmatrix}\\W\begin{Bmatrix}p-s+1,\ \cdots,\ n-k\\s+1,\ \cdots,\ k\end{Bmatrix}\end{bmatrix}\cdot\Lambda_w D_+^w$$

$$i,\ j\in\{h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_{n-k}\}$$

而由(5.5.4.21)式的意义知

$$W\begin{Bmatrix}1,\ 2,\ \cdots,\ p-s \\ s+1,\ s+2,\ \cdots,\ k\end{Bmatrix}\cdot \Lambda_w D_+^w = [0]$$

这样,可知 A^w 矩阵中的第 $1, 2, \cdots, s$ 行向量以及第 $h_1, h_2, \cdots, h_{p-s}$ 行向量均为 0 向量,且 $\{1, 2, \cdots, s\}$ 与 $\{h_1, h_2, \cdots, h_{p-s}\}$ 不相交,故知若记

$$Y_A = A^w \cdot \widetilde{D}_+^w \qquad —(5.5.4.27)$$

则 Y_A 矩阵的各个列向量中至少含有 p 个 0 分量.

最后,考虑 A^w 矩阵中下标为 $i \in \{h_{p-s+1}, h_{p-s+2}, \cdots, h_{n-k}\}$ 的行向量 $(a_i^w)^{\mathrm{T}}$ 与 D_+^w 的乘积. 此乘积(见(5.5.4.22)式)应就是

$$W\begin{Bmatrix}p-s+1,\ p-s+2,\ \cdots,\ n-k \\ s+1,\ s+2,\ \cdots,\ k\end{Bmatrix}\Lambda_w D_+^w\cdot \widetilde{D}_+^w = W_A \cdot \widetilde{D}_+^w$$

则由(5.5.4.24)式及其意义,以及 $\widetilde{D}_+^w = [\widetilde{L}_+^w, \widetilde{E}_+^w, \widetilde{\Lambda}_+^w]$ 的表示方式,和 $\widetilde{L}_+^w$、$\widetilde{E}_+^w$、$\widetilde{\Lambda}_+^w$ 各矩阵列向量的取法,即知乘积矩阵 $W_A \cdot \widetilde{L}_+^w$ 的各个列向量中,都至少含有一个 0 分量,而 $W_A \cdot \widetilde{\Lambda}_+^w$ 乘积矩阵的各个列向量中,由 $\widetilde{\Lambda}_+^w$ 矩阵的取法,都至少含有 2 个或更多个 0 分量.

那么,由以上即知, A^w 矩阵中的下标为 $i \in \{h_{p-s+1}, h_{p-s+2}, \cdots, h_{n-k}\}$ 的行向量 $(\boldsymbol{a}_i^w)^{\mathrm{T}}$ 与 $\widetilde{L}_+^w$ 或 $\widetilde{\Lambda}_+^w$ 的乘积,都至少有 1 个是 0,所以,可知,在(5.5.4.27)式中

$$Y_A = A^w \cdot \widetilde{D}_+^w = [A^w\widetilde{L}_+^w,\ A^w\widetilde{E}_+^w,\ A^w\widetilde{\Lambda}_+^w]$$

决定的列向量中, $A^w\widetilde{L}_+^w$、$A^w\widetilde{\Lambda}_+^w$ 决定的那部分列向量中,第 $1, 2, \cdots, s$ 行,第 $h_1, h_2, \cdots, h_{p-s}$ 行为 0,并且第 $h_{p-s+1}, h_{p-s+2}, \cdots, h_{n-k}$ 行分量中至少还有 1 个为 0,即知, Y_A 的这部分列向量中至少含有 $p+1$ 个 0 分量.

至于 $W_A \cdot \widetilde{E}_+^w$ 的乘积,则可以回复到(5.5.4.22)式加以考虑. 这里以 $\widetilde{E}_+^w$ 中假设含有 $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 为例,则由(5.5.4.22)式

$$W_A \cdot \boldsymbol{e}_1 = W\begin{Bmatrix}p-s+1,\ p-s+2,\ \cdots,\ n-k \\ s+1,\ s+2,\ \cdots,\ k\end{Bmatrix}\cdot (\Lambda_w D_+^w)\boldsymbol{e}_1$$

$$—(5.5.4.28)$$

可以理解因 $\Lambda_w D_+^w \geqslant 0$,且乘积矩阵 $\Lambda_w D_+^w$ 的每一列向量中均含有至少 1 个 0 分量. 这是因为 Λ_w 是

$$W\begin{Bmatrix}1,\ 2,\ \cdots,\ p-s \\ s+1,\ s+2,\ \cdots,\ k\end{Bmatrix}\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$$

的基础解系,故

$$\Lambda_w = \begin{bmatrix} W_r \\ I_{(m-r)} \end{bmatrix} \qquad r = \operatorname{rank}\left(W\begin{Bmatrix} 1,\ 2,\ \cdots,\ p-s \\ s+1,\ s+2,\ \cdots,\ k \end{Bmatrix}\right)$$

型的矩阵，而 D_+^w 则仍可分解为

$$D_+^w = [\tilde{\tilde{L}}_+^w,\ \tilde{\tilde{E}}_+^w,\ \tilde{\tilde{\Lambda}}_+^w]$$

类似以上的分析易知，

$$\Lambda_w \cdot \tilde{\tilde{L}}_+^w = \begin{bmatrix} W_r \cdot \tilde{\tilde{L}}_+^w \\ \tilde{\tilde{L}}_+^w \end{bmatrix}$$

都使 $W_r \cdot \tilde{\tilde{L}}_+^w$ 乘积的每一列中含有 1 个 0，$\tilde{\tilde{L}}_+^w$ 本身的每一列中也含有 0 分量，同理，可知 $\Lambda_w \cdot \tilde{\tilde{\Lambda}}_+^w$ 乘积中的每一列也含有至少 1 个 0 分量，而现在 $\Lambda_w \cdot \tilde{\tilde{E}}_+^w$ 的结果就是 Λ_w 的某些列向量，故均含有(至少)1 个 0 分量.

所以，回到(5.5.4.26a)式，考虑 Y_A 中属于 $A^w\tilde{E}_+^w$ 决定的那部分列向量中的列向量 $\boldsymbol{y}^E$，

$$\boldsymbol{y}^E = A \cdot [\boldsymbol{g}^{s+1},\ \boldsymbol{g}^{s+2},\ \cdots,\ \boldsymbol{g}^k]\Lambda_w D_+^w\, \boldsymbol{e}_1$$

由以上的分析，若记 $\Lambda_w \cdot D_+^w$ 的第 1 列向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1^w$，则

$$\Lambda_w D_+^w\, \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1^w \geqslant \boldsymbol{0}$$

且 $\boldsymbol{\alpha}_1^w$ 中至少含有 1 个 0 分量，故若记 $\boldsymbol{\alpha}_1^w$ 的第 1 个分量为 0，则

$$\boldsymbol{y}^E = A \cdot \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j}^w \boldsymbol{g}^{s+j} = \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j}^w \cdot A\boldsymbol{g}^{s+j}$$

由 $\boldsymbol{g}^{s+j}$ 是 G_0 的列向量即知，以上乘积将使 $\boldsymbol{y}^E$ 的第 1, 2, …, s, $p+1$ 个(共 $s+1$ 个) 分量为 0，而

$$A\begin{Bmatrix} h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_{n-k} \\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m \end{Bmatrix}[\boldsymbol{g}^{s+1},\ \boldsymbol{g}^{s+2},\ \cdots,\ \boldsymbol{g}^k] \cdot \boldsymbol{\alpha}_1^w$$

中将仍至少含有 $p-s$ 个 0 分量，故 $\boldsymbol{y}^E$ 至少含有 $p+1$ 个 0 分量(因为 $\{h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_{n-k}\}$ 与 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ s,\ p+1\}$ 子列不相交).

这样，综合以上分析，Y_A 的各个列向量都至少含有 $p+1$ 个 0 分量. 即证.

回到(5.5.4.26)式，利用以上结果，就可以有

$$\boldsymbol{y}^j = Y_A \boldsymbol{z}^* \quad \boldsymbol{z}^* \geqslant \boldsymbol{0}$$

从而将 Y 矩阵的 $\boldsymbol{y}^j$ 列向量用 Y_A 矩阵替代，并检查(替代后的)Y 矩阵的各列向量所含有的 0 分量，对含有 0 分量个数少于 $k-1$ 的那些列向量继续沿用以上的方

法加以分解，则这些列向量都会逐步被含有更多 0 分量的 Y_A 矩阵替代，最终，就可以使 Y 矩阵的各个列向量都含有至少 $k-1$ 个 0 分量.

推论 5.5.4.2 Y 矩阵中的列向量 $\boldsymbol{y}^j$，$\boldsymbol{y}^j$ 的分量中含有 $\geqslant k-1$ 个 0，设其含有的 0 分量的行下标集合为 $I_y^j(0)$，那么，若

$$\mathrm{rank}(A_{I_y^j(0)}) = k-1$$

则 $\boldsymbol{y}^j$ 列向量不能够被分解为

$$\boldsymbol{y}^j = Y_A\boldsymbol{z} \quad \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0}$$

且 Y_A 矩阵的各个列向量中均至少含有 k 个 0 分量. ■

证明：由于 $\mathrm{rank}(A_{I_y^j(0)}) = k-1$，且已设 $\mathrm{rank}\,A = k$，故 $\boldsymbol{y}^j$ 中的正数分量 $y_i^j>0$，$i \notin I_y^j(0)$ 中的某一个，比如说是 y_h^j 的下标 h 与 $I_y^j(0)$ 集合的并集合 $I_y^j(0)\cup\{h\}$. 所决定的 A 的子矩阵的秩，

$$\mathrm{rank}(A_{I_y^j(0)\cup\{h\}}) = k$$

必要成立. 这样，必有 $I_y^j \subseteq I_y^j(0)$ 且 $|I_y^j| = k-1$，及

$$\mathrm{rank}(A_{I_y^j\cup\{h\}}) = k$$

不妨记 $I_y^j = \{i_1, i_2, \cdots, i_{k-1}\}$，所以，$A$ 的行向量组

$$\boldsymbol{a}_{i_1}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_{i_2}^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_{k-1}}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_h^{\mathrm{T}}$$

是极大线性无关向量组. 这样即可知不能成立有 $\boldsymbol{x}^*$，使

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_{i_j}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = 0 & j=1,2,\cdots,k-1\\ \boldsymbol{a}_h^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = 0 & \\ \boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* > 0 & k\neq h,\ k\notin I_y^j(0),\ 1\leqslant k\leqslant n\end{cases}$$

的情形，即知不能通过任何运算，使 $\boldsymbol{y}^j$ 被分解为 $Y_A\boldsymbol{z}^*$，$\boldsymbol{z}^* \geqslant \boldsymbol{0}$ 的形式中，Y_A 的各个列向量的第 h 个分量为 0. 因为 $\boldsymbol{a}_h^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{a}_{i_j}^{\mathrm{T}}$ 线性无关，

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_{i_j}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = 0 & j=1,2,\cdots,k-1\\ \boldsymbol{a}_h^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = 0 & \end{cases} \Rightarrow A\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{0}$$

但由此即可知，对任一下标 i，若 $i\notin I_y^j(0)$，$y_i^j>0$，则其对应的 A 的行向量 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{a}_{i_j}^{\mathrm{T}}$，$j=1,2,\cdots,k-1$ 必定也是线性无关的. 因为设

$$\boldsymbol{y}^j = A\boldsymbol{x}^* \quad (\text{已知 } \boldsymbol{a}_{i_j}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = 0,\ j=1,2,\cdots,k-1)$$

有

$$y_i^j = \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* > 0 \quad \text{当 } i\notin I_y^j(0)$$

故若 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{a}_{i_j}^{\mathrm{T}}$，$j=1, 2, \cdots, k-1$ 线性相关，则有一组不全为 0 的数 t_s

$$y_i^j=\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \sum_{s=1}^{k-1}t_s\boldsymbol{a}_{i_s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = 0$$

与 $y_i^j>0$ 矛盾.

由此即知 $\boldsymbol{y}^j$ 中的所有正数分量 $y_i^j>0$ 都不可能再用分解的方式消除为 0.

由以上这两个结论，即知(5.5.4.4)式中的 G_0D_+ 乘积矩阵，在其所构造的 Y 矩阵的各列向量均含有至少 $k-1$ 个 0 分量，并且各列向量的正数分量均不能再消除为 0 时，G_0D_+ 乘积矩阵的列向量只能是

$$A\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_{k-1}, h \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}$$

子矩阵的某个 $k\times k$ 阶可逆子矩阵 A_k^{-1} 的列向量按(5.5.2.27)式构造的 G_0 矩阵的某个列向量. 这里 $i_1, i_2, \cdots, i_{k-1}, h$ 下标的含义与推论 5.5.4.2 的证明中所使用的意义相同.

构造以下形式的矩阵 A^*. 取双下标子列 $\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{Bmatrix}$，使 A 的子矩阵

$$A\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{Bmatrix} \qquad (\text{其中 } k=\operatorname{rank} A)$$

是可逆的. 作以下方程组

$$\begin{cases} A\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\{1, 2, \cdots, k\} \\ x_{k_{s-k}} = b_s \quad s=k+1, k+2, \cdots, m \end{cases} \qquad —(5.5.4.29)$$

$$\{j_1, j_2, \cdots, j_k\} \cup \{k_1, k_2, \cdots, k_{m-k}\} = \{1, 2, \cdots, m\}$$

令 A^* 就是(5.5.4.29)式的系数矩阵. 则(5.5.4.29)式可写成为

$$A^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \qquad —(5.5.4.30)$$

若已选定了 $i_1, i_2, \cdots, i_k$；$j_1, j_2, \cdots, j_k$ 下标序列，则若取

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_i \quad i=1, 2, \cdots, k \qquad —(5.5.4.31)$$

则(5.5.4.30)式的解，就是按(5.5.2.27)式决定的 G_0 矩阵的列向量

若取

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_j \quad j=k+1, k+2, \cdots, m \qquad —(5.5.4.32)$$

则(5.5.4.30)式的解，就是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系矩阵 Λ 的列向量.

在这两种情况下，(5.5.4.30)解总是

$$\boldsymbol{x}^* = (A^*)^{-1}\boldsymbol{e}_j \quad j = 1, 2, \cdots, m$$

且 $\boldsymbol{x}^*$ 即 A^* 矩阵的逆矩阵的某一个列向量[1].

容易理解,在 $\operatorname{rank}A = m$ 时,因为先决定 $\{j_1, j_2, \cdots, j_m\} = \{1, 2, \cdots, m\}$,故 $\{k_1, k_2, \cdots, k_{m-k}\} = \varnothing$,即是说此时,$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系矩阵 Λ 就不存在.

由于 A^* 矩阵的具体形式与双下标子列的取法有关,故以下将 A^* 写成为

$$A^*\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}$$

定义 5.5.4.1 设 $\boldsymbol{d}^1$、$\boldsymbol{d}^2 \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 是 P 的方向,即对任何 $\boldsymbol{x} \in P$, $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{d}^{1,2} \in P$ 对任何 $t > 0$ 均成立. 若 A 的零度 $N(A) \neq \varnothing$,且存在 $\boldsymbol{x}^0 \in N(A)$ 以及正数 $t > 0$ 和实数 $s \in R$,使

$$\boldsymbol{d}^2 = t \cdot \boldsymbol{d}^1 + s \cdot \boldsymbol{x}^0$$

则称 $\boldsymbol{d}^2$ 是与 $\boldsymbol{d}^1$ 同方向的方向向量. ■

定义 5.5.4.1 的意思是两个方向如果是平行(同向)的,就是相同的.

定义 5.5.4.2 设 $\boldsymbol{d} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 是 P 的一个方向,若 $\boldsymbol{d}$ 是与某个双下标子列决定的矩阵

$$A^*\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}$$

的逆矩阵的某个列向量相同的方向向量,则称 $\boldsymbol{d}$ 是最简的**基方向向量**. ■

易知,若 $\operatorname{rank}A = m$, $\boldsymbol{d} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$,且 $\boldsymbol{d}$ 是最简的基方向向量,那么,$\boldsymbol{d}$ 就是极方向. 但在 $\operatorname{rank}A = k < m$ 时,最简基方向向量不具有极方向的意义. 这在 §5.5.1 中已有叙述.

由定义 5.5.4.1～2,推论 5.5.4.1～2,马上可以得到以下定理,

定理 5.5.4.3(闭锥的表示定理) $A \in R^{n\times m}$, $\boldsymbol{x} \in R^m$, $\operatorname{rank}A = k$,不等式方程组

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

的解 $\boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$,都可以由以下形式表示

$$\boldsymbol{x} = \sum_{h=1}^{m-k} t_h \boldsymbol{\alpha}^h + \sum_{i=1}^{k} u_i \boldsymbol{d}^i \quad t_h \in R \quad u_i \geqslant 0$$

并且 $\boldsymbol{\alpha}^h$、$\boldsymbol{d}^i$ 都是 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 中的最简的基方向向量. 其中 $A\boldsymbol{\alpha}^h = \boldsymbol{0}$, $h = 1, \cdots, m-k$. ■

---

[1] A^* 矩阵可逆是易见的.

定理 5.5.4.3 中，若 $\operatorname{rank} A = m$，则就是通常所谓的多胞形表示定理. 可以称定理 5.5.4.3 为闭锥的表示定理. 这里"闭锥"与"多胞形"的差异在于前者包含有 A 的零度 $N(A)$ 空间.

附带指出，由上面给出的结论，对于 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的解法，也可以找出 1, 2, …, m 序列中所有的递增子列 $i_1, i_2, \cdots, i_k$, $k = \operatorname{rank} A$，对使

$$\operatorname{rank} A\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{Bmatrix} = k$$

(对于一个子列 $i_1, i_2, \cdots, i_k$，这里的 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 子列可以任取且只取一列)的子矩阵，求其逆阵，并利用(5.5.2.27) 式构造 G_0 矩阵，

$$G_0 = [\boldsymbol{g}^1, \boldsymbol{g}^2, \cdots, \boldsymbol{g}^k]$$

再选取

$$A\boldsymbol{g}^j \geqslant \boldsymbol{0}$$

的列向量 $\boldsymbol{g}^j$，其全体，就是上文中的 $G_0 D_+$ 乘积矩阵的列向量全体，但这样的方法在计算效率上不见得更具优势.

但是由这一算法(枚举法)的性质，又可以直接得到以下结论，

推论 5.5.4.4　$A \in R^{n\times m}$, $\boldsymbol{x} \in R^m$, $\operatorname{rank} A = k$，不等式方程组

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

具有非零度 $N(A)$ 的解存在的充要条件是，至少有一个双下标子列 $\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{Bmatrix}$ 所构造的矩阵

$$A^{\cdot}\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{Bmatrix}$$

的逆矩阵的第 1, 2, …, k 列向量中，至少有一个列向量是 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的解. ■

推论 5.5.4.5 的意义是说，$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 有非 $N(A)$ 零度解存在，则其充要条件是有双下标子序列 $\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{Bmatrix}$ 存在，使得(5.5.4.29) 式在 $\boldsymbol{b}$ 等于某个 $1 \leqslant i \leqslant k$ 的 $\boldsymbol{e}_i$ 时的解就是 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的解.

例 5.5.4.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & 5 & -3 \\ 4 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

这里 $\operatorname{rank} A = 3$.

直接写出不等式组的解

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 5 & -5 & -2 & -6 & 1 & -3 \\ 2 & -28 & 20 & -18 & 16 & 4 \\ 4 & 22 & 14 & 16 & 6 & 8 \\ 5 & -5 & -2 & -6 & 1 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \quad t \in R \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$$

—(a)

可以得值域

$$R(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

上式 $\boldsymbol{u}$ 前的矩阵即为 Y 矩阵. 现在 Y 矩阵中的第 3 列向量中仅含有 1 个 0 分量,可知这一列向量不是最简基方向向量. 利用以上方法,可以将它分解.

由(5.5.4.10)式,因 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}$ 行向量线性无关,故可取

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = 0 \\ \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} > 0 \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} > 0 \end{cases}$$

将这一方程组看成是(见(5.5.4.11)~(5.5.4.12)式),

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geqslant 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geqslant 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

并利用以上不等式系数矩阵中的前 3×3 阶主子矩阵可逆,构造上式的解,是

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ -5 & 6 & -4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^3$$

这里直接利用了(5.5.2.26)式构造了 G_0 矩阵.

再由(5.5.4.13)式,构造

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 6 & -4 \\ -1 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{u} \quad \hat{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

则由(5.5.4.15)式可得到以下解约束方程组

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 \geqslant 0 \\ u_1 - u_2 \geqslant 0 \\ -u_1 + 2u_2 \geqslant 0 \\ u_1,\ u_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

这里$\{h_1, h_2, h_3\} = \{4, 5, 6\}$. 解出这个不等式,得(见(5.5.4.25)式),

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} z \quad z \in R_+^2$$

最后得到

$$G_0' D_+' = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 6 & -4 \\ -1 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{—(b)}$$

可以验证

$$Y_A = A \cdot G_0' D_+' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

而且 Y 矩阵的第 3 列向量

$$\mathbf{y}^3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = Y_A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

故 Y 的第 3 列向量可被分解为 Y_A 的 2 列向量. 这其实等价于说(a)式中 $\boldsymbol{u}$ 前

的矩阵(即 G_0D_+ 矩阵)的第3列向量,可以被(b)式右端矩阵的2列向量替代.但注意到(b)式第1列向量与 A 的乘积(即 Y_A 的第1列向量)就是(a)式的 $\boldsymbol{u}$ 前矩阵的第5列向量与 A 的乘积,故这2个列向量其实是等价的.实际上,

$$\frac{1}{26}\begin{bmatrix}1\\16\\6\\1\end{bmatrix}+\left(-\frac{1}{26}\right)\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}1\\8\\3\\0\end{bmatrix}$$

即这2个列向量只相差一个零解.类似地,(b)式右端矩阵的第2列向量与(a)式的 $\boldsymbol{u}$ 前矩阵的第6列向量仅相差一个零解.

所以,本例的解可以写成是

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}t+\frac{1}{26}\begin{bmatrix}5&-5&-6&1&-3\\2&-28&-18&16&4\\4&22&16&6&8\\5&5&-6&1&-3\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\quad t\in R\quad \boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}\quad -(\mathrm{c})$$

(c)式中 $\boldsymbol{u}$ 前矩阵产生的 Y 矩阵的各列向量中都至少含有 $3-1=2$ 个0分量,故它们都是最简基方向向量.

由此例可见, $R(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})$ 的构造矩阵 Y 的列向量中有某列向量 $\boldsymbol{y}^j$ 含有的0分量个数 $<k-1\quad k=\mathrm{rank}A$ 即表示解

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{m-k}\boldsymbol{\alpha}^i t_i+\sum_{h=1}^{k}\boldsymbol{d}^h u_h\quad \boldsymbol{x}\in P(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})$$

中的 $\boldsymbol{d}^j(h=j)$ 向量一定可由其他的最简基方向向量以非负的线性组合方式表出.

附带地说,若 Y 矩阵是由最简基方向向量与 A 的乘积构造的,那么, Y 矩阵的列向量中0的分量可以告诉我们,对应的最简基方向向量是那个子序列 i_1, i_2, …, i_k 决定的 $A^{*}\{\cdot\}$ 矩阵的逆矩阵中的列向量.同时,由上分析亦知,当 Y 矩阵的某个列向量中0分量的总个数 $\geqslant k$,则0分量下标对应的 A 矩阵的行向量 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}$ 之间一定是线性相关.

例如,在上例中,可以知道 Y 矩阵的第2列向量一定是{1, 2, 4}、{1, 3, 4}等子列决定的 $A^{*}\{\cdot\}$ 矩阵的列向量(前3行)中的某1个(或最多相差一个正数倍与一个零度解).如取

$$A^{*}\begin{Bmatrix}1,3,4\\1,2,3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\2&-1&2&2\\-3&5&5&-3\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

则 $A^{*}\begin{Bmatrix}1, 3, 4\\1, 2, 3\end{Bmatrix}$的逆矩阵的第 2 列向量是

$$\frac{1}{26}\begin{bmatrix}-5\\-14\\11\\0\end{bmatrix}$$

且与(a)式的第 2 列向量相比较，显然有

$$2\times\begin{bmatrix}-5\\-14\\11\\0\end{bmatrix}+(-5)\times\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\-28\\22\\-5\end{bmatrix}$$

再如 Y 的第 1 列向量中含有 3 个 0 分量，易证 A 矩阵的 $\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{a}_4^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{a}_6^{\mathrm{T}}$ 行向量一定是线性相关的.

结束本节时，再给出 Y 矩阵的秩与其他矩阵秩之间的相互关系. 由(5.5.2.1)式，

$$\mathrm{rank}(Y)=\mathrm{rank}(A\cdot G_0D_+)=\mathrm{rank}(G_0D_+)-\dim(R(G_0D_+)\cap N(A))$$

且由于

$$G_0=\Pi\cdot B^{-1}$$

而 Π 是与 $N(A)$ 正交的矩阵，故

$$R(G_0D_+)\cap N(A)=\varnothing$$

所以

$$\mathrm{rank}(Y)=\mathrm{rank}(G_0D_+)=\mathrm{rank}(D_+)-\dim(R(D_+)\cap N(G_0))$$

再由于 G_0 由其构造是列满秩的，故

$$N(G_0)=\{\mathbf{0}\}$$

即

$$R(D_+)\cap N(G_0)=\varnothing$$

所以总有

$$\mathrm{rank}(G_0D_+)=\mathrm{rank}(Y)=\mathrm{rank}(D_+) \qquad —(5.5.4.33)$$

再利用可乘矩阵 UV 的秩关系

$$\mathrm{rank}(UV)=\mathrm{rank}(U)-\dim(R(U^{\mathrm{T}})\cap N(V^{\mathrm{T}}))$$

可知有

$$\operatorname{rank}(G_0D_+) = \operatorname{rank}(G_0) - \dim(R(G_0^{\mathrm{T}}) \cap N(D_+^{\mathrm{T}})) \qquad \text{—(5.5.4.34)}$$

所以,总有以下关系

$$\operatorname{rank}(G_0D_+) = \operatorname{rank}(Y) = \operatorname{rank}(D_+) \leqslant \operatorname{rank}(G_0) = \operatorname{rank}(A) \qquad \text{—(5.5.4.35)}$$

并且,可知,若 D_+ 矩阵是行满秩的(即 D_+^{T} 矩阵是列满秩的),则因为

$$N(D_+^{\mathrm{T}}) = \{\mathbf{0}\}$$

故可有

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(G_0D_+) &= \operatorname{rank}(Y) = \operatorname{rank}(D_+) = \operatorname{rank}(G_0)\\ &= \operatorname{rank}(A) \quad (\text{当 } D_+ \text{ 行满秩}) \end{aligned} \qquad \text{—(5.5.4.36)}$$

§5.6 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}$ 方程组的解

§5.6.1 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}$ 方程组的解法

设 $A \in R^{n\times m}$, $\boldsymbol{b} \in R^n$, $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$,考虑

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \qquad \text{—(5.1.1.0)}$$

不等式方程组的解.

设 $\operatorname{rank} A = k$,记 $\boldsymbol{b}$、A 的分块矩阵是

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{b}_2\end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix} \quad A_{11} \in R^{k\times k} \quad \operatorname{rank} A_{11} = k$$

$$A_1 = [A_{11}, A_{12}] \quad A_2 = [A_{21}, A_{22}]$$

先考虑 $n < m$ 时的情形. 直接拓展前面已有的诸式. 对(5.1.1.0)式的前 k 个方程为等式方程时的解,是

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}_1 + \Lambda\boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-k} \qquad \text{—(5.6.1.1)}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix}A_{11}^{-1}\boldsymbol{b}_1\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix}-A_{11}^{-1}A_{12}\\ I_{(m-k)}\end{bmatrix}$$

依旧记 Λ 的正交矩阵是 Π,

$$\Pi = \begin{bmatrix} I_k \\ A_{12}^{\mathrm{T}}(A_{11}^{-1})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

可构造

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}_1 + \Lambda \boldsymbol{t} + \Pi \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-k} \quad \boldsymbol{v} \in R^k \qquad —(5.6.1.2)$$

将(5.6.1.2)式代入(5.1.1.0)式的前 k 个不等式，仍旧可得

$$B\boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad —(5.5.1.9)$$

其中，B 矩阵由(5.5.1.8)式定义. 记(5.5.1.9)式的解是

$$\boldsymbol{v} = B^{-1}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^k \qquad —(5.5.1.10)$$

所以，$A_1\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}_1$ 的解是

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}_1 + \Lambda \boldsymbol{t} + \Pi B^{-1}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-k} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^k \qquad —(5.6.1.3)$$

将(5.6.1.3)式再代入(5.1.1.0)式的 $A_2\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}_2$ 中[1]，有

$$A_2 \cdot (\boldsymbol{B}_1 + \Lambda \boldsymbol{t} + \Pi B^{-1}\boldsymbol{u}) \geqslant \boldsymbol{b}_2$$

由线性相关性质，有

$$A_2\Lambda = [0]$$

故可得应有

$$\begin{cases} A_2 \Pi B^{-1}\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{b}_2 - A_2\boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

不等式方程组成立.

利用(5.5.1.12～13)式的符号规定，可将上式写成为

$$\begin{cases} C\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{b}_2 - A_2\boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \quad C = A_2 \Pi B^{-1} \qquad —(5.6.1.4)$$

(5.6.1.4)式无非有两种情形：

(1)

$$\boldsymbol{b}_2 - A_2\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{0}$$

此即表示 rank A = rank$[A : \boldsymbol{b}]$ 即 A 矩阵的秩等于增广矩阵$[A : \boldsymbol{b}]$ 的秩. 则(5.6.1.4) 式等价于(5.3.0) 式，可用那儿的方法解之.

(2) 记

$$\tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b}_2 - A_2\boldsymbol{B}_1 \neq \boldsymbol{0}$$

---

〔1〕 如果 $k = n$，则式(5.6.1.3) 就是最终解. 所以，矩阵 A 在行向量线性无关时，(5.1.1.0) 式一定有解.

此即表示 $\operatorname{rank} A \neq \operatorname{rank}[A : \boldsymbol{b}]$. 这时(5.6.1.4)式即为

$$\begin{cases} C\boldsymbol{u} \geqslant \tilde{\boldsymbol{b}} \\ \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \quad \text{—(5.6.1.5)}$$

(5.6.1.5)式等价于(5.4.0)式，可以用那儿的方法解之.

这样，若(5.1.1.0)式是相容的，就总能由上述方式得到其解.

例 5.6.1.1 $n = 3 \quad m = 4$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -10 & 7 & -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

解 $$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}$$

由于 $$\operatorname{rank} A = 2$$

故先解出

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 \geqslant 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geqslant -1 \end{cases}$$

利用以上所述各式易得这一不等式组的解是

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{8} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{t} + \frac{1}{127} \begin{bmatrix} \frac{41}{2} & -3 \\ -19 & -22 \\ -\frac{3}{2} & 25 \\ -13 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{t} \in R^2 \quad \boldsymbol{u} \in R_+^2$$

将上式的解代入

$$3x_1 - 10x_2 + 7x_3 - x_4 \geqslant 3$$

可得到不等式方程组

$$\begin{cases} 2u_1 + 3u_2 \geqslant 2 \\ u_1,\ u_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

再解这一方程组又解得

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \boldsymbol{s} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{s}、\boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0} \quad s_1 + s_2 = 1$$

从而就有

$$x=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{1}{8}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\frac{1}{127}\begin{bmatrix}\frac{41}{2} & -2\\ -19 & -\frac{44}{3}\\ -\frac{3}{2} & \frac{50}{3}\\ -13 & \frac{10}{3}\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}1 & \frac{3}{4}\\ 1 & \frac{1}{8}\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}t+\frac{1}{127}\begin{bmatrix}\frac{41}{2} & -3\\ -19 & -22\\ -\frac{3}{2} & 25\\ -13 & 5\end{bmatrix}v$$

化简以后可以写成下式

$$x=\frac{1}{127}\begin{bmatrix}\frac{463}{4} & \frac{373}{4}\\ -\frac{25}{8} & \frac{29}{24}\\ -\frac{3}{2} & \frac{50}{3}\\ -13 & \frac{10}{3}\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}1 & \frac{3}{4}\\ 1 & \frac{1}{8}\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}t+\frac{1}{127}\begin{bmatrix}\frac{41}{2} & -3\\ -19 & -22\\ -\frac{3}{2} & 25\\ -13 & 5\end{bmatrix}v$$

其中 $t\in R^2\quad s、v\geqslant 0\quad s_1+s_2=1$

再设 $n>m$. 这里仍可区分两种情形. 其一是 $\operatorname{rank}A<m$ 这种情况的求解步骤等同于上文 $m>n$ 的情况；其二是 $\operatorname{rank}A=m$，这可按以下方式求解. 设 A 的前 $m\times m$ 阶顺序主子矩阵 A_1 满秩. 先从前 m 个不等式方程组中得到解

$$x=A_1^{-1}b_1+A_1^{-1}v\quad b_1=(b_1,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}},\ v\in R_+^m \quad —(5.6.1.6)$$

将(5.6.1.6)式决定的 x 代入后 $n-m$ 个不等式，得

$$A_2\cdot A_1^{-1}v\geqslant b_2-A_1^{-1}b_1 \quad —(5.6.1.7)$$

仍记

$$C=A_2A_1^{-1}$$

则在

$$b_2-A_1^{-1}b_1=0$$

时，(5.6.1.7)式是

$$\begin{cases}Cv\geqslant 0\\ v\geqslant 0\end{cases}$$

否则，仍记

$$\tilde{b}=b_2-A^{-1}b_1\neq 0$$

则(5.6.1.7)式就是

$$\begin{cases} C\boldsymbol{v} \geqslant \tilde{\boldsymbol{b}} \\ \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad \text{—(5.6.1.8)}$$

继续解以上关于 $\boldsymbol{v}$ 的不等式方程组便可得最终解或判定其无解.

例 5.6.1.2 $n = 5 \quad m = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \\ -6 & 4 & 8 \\ 5 & -4 & -7 \\ -1 & -8 & -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

解 $$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}$$

因为 rank $A = 3$,故由前 3 个不等式中可得

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -16 & -28 & -13 \\ 4 & 6 & 3 \\ -14 & -24 & -11 \end{bmatrix}\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} \in R_+^3$$

将此解代入后 2 个不等式,有

$$\begin{cases} v_1 + 2v_2 + 0 \cdot v_3 \geqslant 5 \\ -v_1 + 2v_2 + 0 \cdot v_3 \geqslant 4 \\ v_1,\ v_2,\ v_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

再解出这一不等式,得解是

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{s} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{s},\ \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \quad s_1 + s_2 = 1$$

代入前一式,得到最终解是

$$x = \begin{bmatrix} -34.5 & -35 \\ 8 & 8.25 \\ -29.5 & -30 \end{bmatrix}\boldsymbol{s} + \begin{bmatrix} -14 & -30 & -6.5 \\ 3 & 7 & 1.5 \\ -12 & -26 & -5.5 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{s},\ \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \quad s_1 + s_2 = 1$$

例 5.6.1.3 $n = 4 \quad m = 3$

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -3\\ 1 & -3 & -2\\ 5 & -4 & -7\\ -1 & -8 & -1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 2\\ -1\end{bmatrix}$$

解
$$A\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{b}$$

本例的 A、$\boldsymbol{b}$ 矩阵(向量)是上例 A、$\boldsymbol{b}$ 划去第 3 行向量(元素)的子矩阵(向量). 因为在本例中 $\operatorname{rank} A=2<m$. 故先解

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-3x_3=1\\ x_1-3x_2-2x_3=-2\end{cases}$$

有

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{11}\\ \frac{7}{11}\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{13}{11}\\ -\frac{3}{11}\\ 1\end{bmatrix}t\quad t\in R$$

作法向量方程

$$\left(\frac{13}{11},\ -\frac{3}{11},\ 1\right)\boldsymbol{\beta}=0$$

解得

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -\frac{13}{11} & \frac{3}{11}\end{bmatrix}\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{v}\in R^2$$

构造

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{11}\\ \frac{7}{11}\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{13}{11}\\ -\frac{3}{11}\\ 1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -\frac{13}{11} & \frac{3}{11}\end{bmatrix}\boldsymbol{v}$$

利用前述的符号,得到

$$B=\begin{bmatrix}3 & 2 & -3\\ 1 & -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -\frac{3}{11} & \frac{3}{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{72}{11} & \frac{13}{11}\\ \frac{37}{11} & -\frac{39}{11}\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{299}\begin{bmatrix}39 & 13\\ 37 & -72\end{bmatrix}$$

$$G_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -\frac{13}{11} & \frac{3}{11}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{299}\begin{bmatrix}39 & 13\\ 37 & -72\end{bmatrix}=\frac{1}{299}\begin{bmatrix}39 & 13\\ 37 & -72\\ -36 & -35\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}3 & 2 & -3\\ 1 & -3 & -2\end{bmatrix}\cdot G_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad 故\ \boldsymbol{v}=B^{-1}\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}$$

由此得到前 2 个不等式方程组的解是

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{11}\\ \frac{7}{11}\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{13}{11}\\ -\frac{3}{11}\\ 1\end{bmatrix}t+\frac{1}{299}\begin{bmatrix}39 & 13\\ 37 & -72\\ -36 & -35\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\quad t\in R\quad \boldsymbol{u}\in R_+^2$$

将这一解代入后 2 个不等式方程，并经整理，得到

$$\begin{cases}u_1+2u_2\geqslant 5\\ -u_1+2u_2\geqslant 4\\ u_1,\ u_2\geqslant 0\end{cases}$$

这一组方程的解是

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{5}{2} & \frac{9}{4}\end{bmatrix}\boldsymbol{s}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{s}、\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0}\quad s_1+s_2=1$$

将这个解代回前一式中，即可得到本例的最终解是

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\frac{9}{506} & \frac{73}{1\,012}\\ \frac{113}{3\,289} & \frac{1\,029}{6\,578}\\ -\frac{175}{598} & -\frac{387}{1\,196}\end{bmatrix}\boldsymbol{s}+\begin{bmatrix}\frac{13}{11}\\ -\frac{3}{11}\\ 1\end{bmatrix}t+\frac{1}{299}\begin{bmatrix}13 & \frac{91}{2}\\ -72 & 1\\ -35 & -\frac{107}{2}\end{bmatrix}\boldsymbol{v}$$

其中 $\boldsymbol{s}、\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0}\quad s_1+s_2=1,\ t\in R$

注意(5.6.1.3)式中的

$$\Pi\cdot B^{-1}=G_0$$

以及可以将(5.6.1.4～5)式的解约束方程组的解，统一表示为

$$\boldsymbol{u} = \Phi_+ \boldsymbol{s} + D_+ \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{s}, \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \sum_i s_i = 1 \quad (\text{或 } 0 \leqslant \sum_i s_i \leqslant 1)$$

那么,(5.6.1.3)式就是

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}_1 + \Lambda \boldsymbol{t} + G_0 \Phi_+ \boldsymbol{s} + G_0 D_+ \boldsymbol{v}$$

易见,总可以将 $\boldsymbol{B}_1 + G_0\Phi_+ \boldsymbol{s}$ 再简记为 $\Phi\boldsymbol{s}$,并记 $D = G_0 D_+$,便可得到 $\boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 的一般形式

$$\boldsymbol{x} = \Phi\boldsymbol{s} + \Lambda\boldsymbol{t} + D\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-k} \quad \boldsymbol{s}, \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \sum_i s_i = 1 \qquad \text{—(5.1.2.23)}$$

其中

$$\Phi = \boldsymbol{B}_1 + G_0\Phi_+ \boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \sum_i s_i = 1 \quad (\text{或 } 0 \leqslant \sum_i s_i \leqslant 1) \quad \text{—(5.6.1.9)}$$

这里,如果 $\boldsymbol{0}$ 不是解约束方程组(5.6.1.4 ~ 5)式的极点,即权参变量 $\boldsymbol{s}$ 取 $\sum_i s_i = 1$ 的形式,那么,若记 $G_0\Phi_+$ 乘积矩阵的列向量为 $\boldsymbol{\varphi}_g^j$,Φ 矩阵的列向量为 $\boldsymbol{\varphi}^j$,就有

$$\boldsymbol{\varphi}^j = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{\varphi}_g^j \quad j = 1, 2, \cdots \quad \Phi = [\boldsymbol{\varphi}^1, \boldsymbol{\varphi}^2, \cdots] \text{ —(5.6.1.10)}$$

如果 $\boldsymbol{0}$ 是解约束方程组(5.6.1.4 ~ 5)式的极点,即 $\boldsymbol{s}$ 取 $0 \leqslant \sum_i s_i \leqslant 1$ 的形式,就可以令

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}^0 = \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{\varphi}^j = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{\varphi}_g^j \\ \Phi = [\boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\varphi}^1, \boldsymbol{\varphi}^2, \cdots] \end{cases} \qquad j = 1, 2, \cdots \qquad \text{—(5.6.1.11)}$$

§5.6.2 值域 $R(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 的构造

由上一节的分析,一般地,将 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, $\operatorname{rank} A = k$ 时

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}$$

的解集合表示为

$$P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \Phi\boldsymbol{s} + \Lambda\boldsymbol{t} + D\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{s}, \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \sum_i s_i = 1 \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-k}\}$$

—(5.1.2.23)

则其值域是

$$R(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})\} \quad \text{—(5.6.2.0)}$$

且易知对于 $\boldsymbol{y} \in R(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$,有

$$y = A\Phi s + ADv \quad s,\ v \geqslant 0 \quad \sum_i s_i = 1 \qquad —(5.6.2.1)$$

并且可知,若记 $y \in R(Ax \geqslant b) \quad y = y^1 + y^2$ 且

$$y^1 = A\Phi s \quad s \geqslant 0 \quad \sum_i s_i = 1 \qquad —(5.6.2.2)$$

$$y^2 = ADv \quad v \geqslant 0 \qquad —(5.6.2.3)$$

则 y^2 的意义等同于(5.5.4.2)式.故以下只考虑 y^1.

记

$$Y_\Phi = A\Phi \qquad —(5.6.2.4)$$

同时应有

$$Y = AD \quad (D = G_0 D_+)$$

类似于引理 5.5.4.1,有

引理 5.6.2.1 $Y_\Phi = A\Phi$ 矩阵的任一列向量 y_φ^j,则($y_\varphi^j - b$)的差总含有至少 k 个 0 分量,$k = \text{rank}\, A$. ■

证明:这由 Φ 矩阵的构造即知.由(5.6.1.10 ~ 11)式,φ^j 是 Φ 的列向量.若 $\varphi^j = B_1$,由

$$B_1 = \begin{bmatrix} A^{-1}\begin{Bmatrix} 1, 2, \cdots, k \\ 1, 2, \cdots, k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} \\ 0_{(m-k)} \end{bmatrix}$$

即知

$$A\varphi^j - b = A \cdot B_1 - b$$

差向量的第 1, 2, …, k 个分量均为 0.

若 $\varphi^j = B_1 + G_0 \varphi_g^j$(见(5.6.1.10)式),则

$$A\varphi^j - b = (A \cdot B_1 - b) + AG_0 \varphi_g^j$$

上式等号右边(·)中的差向量的第 1, 2, …, k 个分量均为 0,而

$$AG_0 \varphi_g^j = \begin{bmatrix} I_k \\ W \end{bmatrix} \varphi_g^j = \begin{bmatrix} \varphi_g^j \\ W\varphi_g^j \end{bmatrix} \qquad —(5.6.2.5)$$

注意 φ_g^j 其实就是形如(因为(5.6.1.5)或(5.6.1.8)式中的 $C = W$),

$$\begin{cases} \boldsymbol{W}\boldsymbol{u} \geqslant \tilde{\boldsymbol{b}} \\ \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

方程组的极点，由推论 5.1.2.3、(5.6.2.5)式以及(5.6.1.5)式中$\tilde{\boldsymbol{b}}$的意义即知

$$A\boldsymbol{\varphi}^{j}-\boldsymbol{b}$$

差向量中至少含有 k 个 0 分量.

当 $\operatorname{rank} A = m$ 时，以上引理的结论就是推论 5.1.2.3.

续例 5.6.1.1 有

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -10 & 7 & -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rank} A = 2$$

并已知

$$\Phi=\frac{1}{127}\begin{bmatrix} \frac{463}{3} & \frac{373}{4} \\ -\frac{25}{8} & \frac{29}{24} \\ -\frac{3}{2} & \frac{50}{3} \\ -13 & \frac{10}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow A\Phi = Y_{\Phi} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -\frac{1}{3} \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Y_{Φ} 的各列向量减去 $\boldsymbol{b}$ 的差至少有 2 个 0 分量.

续例 5.6.1.2

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \\ -6 & 4 & 8 \\ 5 & -4 & -7 \\ -1 & -8 & -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rank} A = 3$$

已知

$$\Phi=\begin{bmatrix} -34.5 & -35 \\ 8 & 8.25 \\ -29.5 & -30 \end{bmatrix} \qquad A\Phi = Y_{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ .5 & .25 \\ 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Y_{Φ} 的各列向量减去 $\boldsymbol{b}$ 的差，(至少) 含有 3 个 0 分量.

上文已指出了，Φ 矩阵的列向量 $\boldsymbol{\varphi}^i$，在(5.1.2.23)式的构造中含有 $N(A)$ 的解 Λt 一项时，不是一般意义上的极点，而只是一个基点.

以例 5.6.1.3 中的数字，可以更为具体地说明这里的意思. 由那里的结果，已有

$$Y_\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ .5 & .25 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & .5 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

将 Y_Φ 的各列向量都减去 $\boldsymbol{b}$，有

$$\begin{bmatrix} 0 & .5 \\ 2.5 & 2.25 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

可知 Φ 矩阵(即 $\boldsymbol{s}$ 前矩阵)中的列向量，第 1 列向量是

$$\begin{cases} g_1: \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_1 \\ g_3: \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_3 \end{cases}$$

交线上的点，而第 2 列向量则是

$$\begin{cases} g_3: \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_3 \\ g_4: \boldsymbol{a}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_4 \end{cases}$$

交线上的点.

这即是说 Y_Φ 的列向量 $(\boldsymbol{y}_\varphi^j - \boldsymbol{b})$ 差向量中的 0 分量，其含义是给出了 Φ 的列向量 $\boldsymbol{\varphi}^j$ 所处的是那几个平面的交线上. 而矩阵

$$[\boldsymbol{y}_\varphi^1 - \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{y}_\varphi^2 - \boldsymbol{b},\ \cdots]$$

的行向量中的 0 分量，可以指示 Φ 的对应下标的列向量是同一平面上的相邻的点.

再结合 Y 矩阵的列向量中 0 分量的分布，可知 D 矩阵(即 $\boldsymbol{v}$ 前的矩阵)的第 1 列向量应位于 g_1 平面上，而第 2 列向量应位于 g_4 平面上.

由此，可得到以下的图形.

图中未标出 g_2 平面，因为由以上的分析可知，g_2 平面不直接影响到 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 的结构. 图 5.6.2.1 中 $g_{1,3,4}$ 共 3 个平面按其法方向 ∇g_i 围成一个开口的闭棱柱体. l_t 直线(共 2 条)是由 Λt 决定的直线，a_1、a_2 是 Φ 矩阵的列向量决定的点. a_1 位于 g_1、g_3 交线 l_t 直线上，a_2 则位于 g_3、g_4 平面的交线 l_t 直线上. a_1、a_2 间的

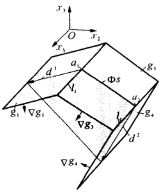


图 5.6.2.1

连线就是 Φs 决定的直线段. 它位于 g_3 平面上. d^1、d^2 两个方向向量分别代表 D 矩阵的 2 个对应列向量. d^1 可看成是由 a_1 点出发并位于 g_1 平面上的方向向量, d^2 则是从 a_2 出发位于 g_4 平面上的方向向量.

由 a_1、a_2 连线及 d^1、d^2 方向向量可组成 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 空间上的一个截平面,如图中的阴影区域. 这个区域,对应于解构造中的

$$\Phi\boldsymbol{s} + D\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{s},\ \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \sum_i s_i = 1$$

项. 而 Λt 项的存在,则表示这个截平面沿 $N(A)$ 空间的平移,便可构造出整个 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 集合.

由于可以在 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 中任意地取出类似图 5.6.2.1 式中的截平面,故 a_1、a_2(和 d^1、d^2)这样的点(方向)均不具有唯一性. 故它们并不是极点. 但显然的是,要构造出 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 的截平面,最少可用任取 2 个 a_1、a_2 这样的点,任取 2 个 d^1、d^2 这样的方向向量,便可以了. 所以,称 a_1、a_2 这样的点为基点,称 d^1、d^2 这样的方向向量为基方向是确切的.

易于理解,如果 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b})$ 中不含有 $N(A)$ 零度空间,那么,这样构造出来的截平面就是唯一的,这时,基点、基方向自然就具有了极点、极方向的意义了.

§5.7 更复杂的情形及线性规划的直接解法

以下仍设 $\boldsymbol{x} \in R^m$.

1. **$\boldsymbol{x}$ 单边约束**

$$\begin{cases} A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{a} \end{cases}$$

作变量替换

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{t} + \boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b} = -A\boldsymbol{a}$$

可得等价形式

$$\begin{cases} A\boldsymbol{t} \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{t} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

2. **等式、不等式混合方程组**

$$\begin{cases} Fx = h \\ Ax \geqslant b \\ x \geqslant a \end{cases}$$

这里 F 设为 $s \times m$ 阶矩阵，并设 $\operatorname{rank} F = s$, $s < m$.

$$Fx = h$$

设其解为

$$x = x^0 + \Lambda z \quad z \in R^{m-s}$$

其中 z 是 $m-s$ 维向量，Λ 是 $Fx=0$ 的 $m\times(m-s)$ 阶基础解系矩阵，x^0 是一特解. 将此解代入各不等式方程组，经整理可得到

$$Cz \geqslant b'$$

其中

$$C = \begin{bmatrix} A \cdot \Lambda \\ \Lambda \end{bmatrix} \qquad b' = \begin{bmatrix} b - Ax^0 \\ a - x^0 \end{bmatrix}$$

再解出这一不等式即能得到最终解.

3. **x 双边约束**

$$\begin{cases} Ax \geqslant b \\ a \geqslant x \geqslant c \end{cases}$$

作变量替换

$$x = t + c \quad x - c = t$$

可得

$$\begin{cases} At \geqslant b - Ac \\ a - c \geqslant t \geqslant 0 \end{cases}$$

记 $$f = b - Ac \quad h = a - c$$

有

$$\begin{cases} At \geqslant f \\ h \geqslant t \geqslant 0 \end{cases}$$

先解出

$$\begin{cases} A\boldsymbol{t} \geqslant \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{t} \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

设其解可表示为

$$\boldsymbol{t} = A'\boldsymbol{s} + B'\boldsymbol{u}$$

其中 A'、B' 均为非负矩阵，$\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{u} \geqslant \mathbf{0}$，且 $\sum_i s_i = 1$.

则将此解代入前式可得

$$\begin{cases} \sum_i s_i = 1 \\ -A'\boldsymbol{s} - B'\boldsymbol{u} \geqslant -\boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{s} \geqslant \mathbf{0} \\ \boldsymbol{u} \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

现在的情形等同于以上所指的混合约束的情形，按那里的步骤继续解之即可.

4. 等式、不等式混合方程组、$\boldsymbol{x}$ 双边约束

$$\begin{cases} F\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h} \\ A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \geqslant \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{c} \end{cases}$$

类似的先解出等式方程组的通解再代入到不等式方程组，然后再依据上文所分析的方法逐步解出，最终总能找到解的一般形式.

例 5.7.1 $\boldsymbol{x}$ 双边约束

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解

$$\begin{cases} A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ 5 \geqslant x_1 \geqslant 1 \\ 2 \geqslant x_2 \geqslant -1 \\ 6 \geqslant x_3 \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{—(a)}$$

作变换：

$$\begin{cases} t_1 = x_1 - 1 \\ x_1 = t_1 + 1 \end{cases} \begin{cases} t_2 = x_2 + 1 \\ x_2 = t_2 - 1 \end{cases} \begin{cases} t_3 = x_3 \\ x_3 = t_3 \end{cases}$$

从而可得到

$$\begin{cases}-2t_1+2t_2-3t_3\geqslant -2\\ t_1-3t_2+t_3\geqslant -3\\ 4\geqslant t_1\geqslant 0\\ 3\geqslant t_2\geqslant 0\\ 6\geqslant t_3\geqslant 0\end{cases}\qquad \text{—(b)}$$

先解

$$\begin{cases}-2t_1+2t_2-3t_3\geqslant -2\\ t_1-3t_2+t_3\geqslant -3\\ t_1,\ t_2,\ t_3\geqslant 0\end{cases}\qquad \text{—(c)}$$

由以上§5.4节各式可解得(c)的解为

$$\boldsymbol{t}=\begin{bmatrix}1&0&0&3&0\\0&0&1&2&\frac{11}{7}\\0&\frac{2}{3}&0&0&\frac{12}{7}\end{bmatrix}\boldsymbol{s}\quad \boldsymbol{s}\geqslant \boldsymbol{0}\quad \sum_{i}^{5}s_i=1\qquad \text{—(d)}$$

将(d)式与(b)式相比较即知，还应有

$$\begin{cases}s_1+s_2+s_3+s_4+s_5=1\\ -\begin{bmatrix}1&0&0&3&0\\0&0&1&2&\frac{11}{7}\\0&\frac{2}{3}&0&0&\frac{12}{7}\end{bmatrix}\boldsymbol{s}\geqslant\begin{bmatrix}-4\\-3\\-6\end{bmatrix}\\ s_i\geqslant 0\quad i=1,2,3,4,5\end{cases}\qquad \text{—(e)}$$

从第1个等式方程中可得到通解

$$\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&-1&-1&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{z}\quad \boldsymbol{z}\geqslant\boldsymbol{0}\qquad \text{—(f)}$$

将(f)式代入(e)式并整理后可得

$$\begin{cases} z_1 + z_2 - 2z_3 + \quad z_4 \geqslant -3 \\ \quad - z_2 - 2z_3 - \frac{11}{7}z_4 \geqslant -3 \\ -\frac{2}{3}z_1 \qquad\qquad - \frac{12}{7}z_4 \geqslant -6 \\ - \quad z_1 - z_2 - \quad z_3 - \quad z_4 \geqslant -1 \\ \qquad z_i \geqslant 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad \text{—(g)}$$

继续利用§5.4节各式，可解出(g)式的解是

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \quad \boldsymbol{\beta} \geqslant \mathbf{0},\ 0 \leqslant \sum_i^4 \beta_i \leqslant 1$$

将此解代入(f)式可得

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{s} \geqslant \mathbf{0} \quad \sum_i^5 s_i = 1$$

故(d)式就是(b)式的最终解.再由变换关系得

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{11}{7} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{12}{7} \end{bmatrix} \boldsymbol{s}$$

上式可写成为

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & \frac{4}{7} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{12}{7} \end{bmatrix} \boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{s} \geqslant \mathbf{0} \quad \sum_i s_i = 1$$

这就是(a)式的最终解.

不等式方程组的解法步骤并非唯一，这可由下例看到.

例 5.7.2

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ 2x_1 - \quad x_2 - 3x_3 \geqslant 1 \\ x_1 + \quad x_2 - \quad x_3 \geqslant -2 \\ \qquad 10 \geqslant x_1 \geqslant 1 \\ \qquad x_2,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{—(a)}$$

由第一个等式方程可先得到通解

$$x=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3&4\\1&0\\0&1\end{bmatrix}z\quad z\in R^2 \qquad \text{—(b)}$$

将(b)式代入(a)式的各不等式中，经整理可得

$$\begin{cases}-4z_1+5z_2\geqslant-3\\-2z_1+3z_2\geqslant-4\\8\geqslant-3z_1+4z_2\geqslant-1\\z_1,\ z_2\geqslant0\end{cases} \qquad \text{—(c)}$$

(c)式可直接写成为

$$\begin{cases}-4z_1+5z_2\geqslant-3\\-2z_1+3z_2\geqslant-4\\-3z_1+4z_2\geqslant-1\\3z_1-4z_2\geqslant-8\\z_1,\ z_2\geqslant0\end{cases} \qquad \text{—(d)}$$

解出(d)式，得到

$$z=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&2\end{bmatrix}s\quad s\geqslant\mathbf{0}\quad 0\leqslant s_1+s_2\leqslant1$$

将这一结果代入(b)式即得本例(a)式的最终解

$$x=\begin{bmatrix}2&1&10\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&2\end{bmatrix}s\quad s\geqslant\mathbf{0}\quad \sum_i s_i=1$$

例 5.7.3

$$\begin{cases}3x_1-2x_2+3x_3\geqslant0\\-x_1+x_2-3x_3\geqslant0\\x_1,\ x_2\geqslant0\end{cases}$$

本例中仅 x_1、x_2存在单边约束，x_3无约束. 仍可先解出

$$\begin{cases}3x_1-2x_2+3x_3\geqslant0\\-x_1+x_2-3x_3\geqslant0\\x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant0\end{cases}$$

可得到解

$$x=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 1 & 3\\ \frac{1}{2} & 1 & 6\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}z \quad z\geqslant \mathbf{0} \qquad \text{—(a)}$$

再由变量替换

$$t_1=x_1 \quad t_2=x_2 \quad t_3=-x_3$$

得

$$\begin{cases}3t_1-2t_2-3t_3\geqslant 0\\ -t_1+t_2+3t_3\geqslant 0\\ t_1,\ t_2,\ t_3\geqslant 0\end{cases}$$

解出此式，得

$$t=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}v \quad v\geqslant \mathbf{0} \qquad \text{—(b)}$$

再由逆变换，得

$$x=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}v \quad v\geqslant \mathbf{0} \qquad \text{—(c)}$$

(a)、(c)两式合起来，得到本例最终解

$$x=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 1 & 3\\ \frac{1}{2} & 1 & 6\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}v \quad z,\ v\geqslant \mathbf{0} \qquad \text{—(d)}$$

作最简化处理，可将上式简化为

$$x=\begin{bmatrix}3 & \frac{1}{3} & 1\\ 6 & 0 & 0\\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}z \quad z\geqslant \mathbf{0}$$

本例解的几何构造如图 5.7.1 所示. $l_{1,2,3}$ 分别是以上 z 前矩阵的第 1, 2, 3 列向量为方向向量决定的射线. l_1', l_2' 是(d) 式中被剔除的方向向量

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

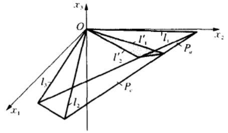


图 5.7.1

决定的射线. 显然, l_1', l_2' 可由 $l_{1,2,3}$ 的正线性组合表出.

在 l_1', l_2' 所在的 Ox_1x_2 平面上, l_1', l_2' 所张成的阴影区域为一个分界面,在其上的 P_a 是由(a) 式决定的锥,在其下的 P_c 则是(c) 式决定的锥. 本例的解显然就是这 2 个锥体的并集合.

一般地,若 x 变量中的 $x_i\geqslant 0$, $i=1,2,\cdots,h$,而 x_{h+j}, $j=1,2,\cdots,n-h$ 没有约束,那么,作以下变量替换

$$\begin{cases}t_i=x_i & i=1,2,\cdots,h\\ t_{h+j_s}=-x_{h+j_s} & s=1,2,\cdots,d \quad 0\leqslant d\leqslant n-h\\ t_{h+j}=x_{h+j} & j=1,2,\cdots,n-h \quad j\neq j_s\end{cases}$$

d 遍取 $0, 1, \cdots, n-h$, $\{j_s\}$ 遍取 $\{1, 2, \cdots, n-h\}$ 中 d 个下标的子列,并分别对这一变换下得到的不等式组求出解. 最终解就是所有这些变量替换下不等式解的并集合.

5. 线性规划的直接解法

由以上分析,显然地,线性规划问题可以直接予以解决.

例 5.7.4 [1]

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$$

---

〔1〕 本例及下二例,均引自《现代应用数学手册——运筹学与最优化理论卷》,清华大学出版社,1998 年,第 17 页例 1.2.5 和第 46 页例 1.5.7,第 22 页例 1.2.7.

有线性规划问题：

$$\min f = -2x_1 - x_2 \\ \text{s. t.} \begin{cases} Ax = b \\ x_i \geqslant 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \qquad \text{—(a)}$$

先从等式约束得到通解

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z \quad z \in R^2 \qquad \text{—(b)}$$

将(b)式代入不等式约束并经整理可得

$$\begin{cases} z_1 + z_2 \geqslant 3 \\ -z_1 + z_2 \geqslant 2 \\ -z_2 \geqslant -3 \\ z_1, z_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{—(c)}$$

再解出(c)式.

从(c)式的前 2 个不等式中，直接可得

$$z = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u \quad u \geqslant \mathbf{0} \qquad \text{—(d)}$$

将(d)式代入后 3 个不等式，可得

$$\begin{cases} -u_1 - u_2 \geqslant -1 \\ u_1, \ u_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{—(e)}$$

再解出(e)式即有

$$u = s \quad s \geqslant \mathbf{0} \quad 0 \leqslant s_1 + s_2 \leqslant 1$$

所以有

$$z = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} s$$

将此结果再代回到(b)式，得

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \quad 0 \leqslant s_1 + s_2 \leqslant 1$$

这就是约束条件方程组的最终解. 将此解代入目标函数便有

$$f = -4 - s_1 + s_2$$

显然最小值在 $s_1 = 1$、$s_2 = 0$ 处，从而，有最小值解

$$\boldsymbol{x}^* = (1, 3, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}} \quad f^* = -5$$

例 5.7.5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c} = (2, 3, 5, 2, 3)^{\mathrm{T}}$$

解线性规划问题

$$\min f = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ x_i \geqslant 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

直接解出约束条件. 从约束条件的前 2 个不等式取等号时得到的正截距矩阵中可得

$$\boldsymbol{\Phi}_+^1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

由 A 矩阵的非负列向量可决定

$$E_+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由射线方向向量矩阵可得

$$L_+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \qquad \text{—(a)}$$

得到其通解是

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{5}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z} \quad \boldsymbol{z} \in R^3 \qquad \text{—(b)}$$

再由 $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 得到

$$\begin{cases} -7z_1 - 3z_2 - 7z_3 \geqslant -11 \\ -\ z_1 - \ z_2 - 5z_3 \geqslant -5 \\ z_1,\ z_2,\ z_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

解这个不等式得到

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \frac{11}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & \frac{11}{3} & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{6}{7} \end{bmatrix} \boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \quad 0 \leqslant \sum_i s_i \leqslant 1 \qquad \text{—(c)}$$

将(c)式代入(b)式得

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{11}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{4} & \frac{6}{7} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{6}{7} \end{bmatrix} \boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \sum_i s_i = 1 \qquad \text{—(d)}$$

(d) 式就是(b) 式决定的 $\boldsymbol{x}$ 与 R_+^6 正象限的交集. 从而得到

$$\Phi_+^2 = \begin{bmatrix} \frac{11}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{4} & \frac{6}{7} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

且没有适合组成 Λ_+ 矩阵的方向向量. 故, 约束条件不等式方程组的解是

$$\boldsymbol{x} = [\Phi_+^1, \Phi_+^2]\boldsymbol{s} + [E_+, L_+]\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{s}, \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \sum_i s_i = 1$$

将此解代入目标函数

$$f = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}[\Phi_+^1, \Phi_+^2]\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}[E_+, L_+]\boldsymbol{u}$$

因为要求 $\min f$, 且 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}[E_+, L_+]\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$, 故令 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. 并由

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}[\Phi_+^1, \Phi_+^2] = \left(8, 10, 8, 9, \frac{37}{4}, \frac{73}{7}, \frac{25}{3}, 5, 8, \frac{43}{7}\right)$$

即知, 在 $s_8 = 1$, $s_i = 0$, $i = 1, 2, \cdots, 10$, $i \neq 8$ 时 f 达到最小值, 故,

$$\boldsymbol{x}^* = (1, 0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}} \quad f^* = 5$$

例 5.7.6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -8 & -8 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -12 & -12 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c} = \left(0, 0, 0, -\frac{3}{4}, 20, -\frac{1}{2}, 6\right)^{\mathrm{T}}$$

解线性规划问题

$$\min f = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

由等式约束条件解出

$$x=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & 8 & 1 & -9\\ -\frac{1}{2} & 12 & \frac{1}{2} & -3\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}z \quad z\in R^4 \qquad \text{—(a)}$$

将(a)式代入 $x\geqslant 0$ 之中得

$$\begin{cases}-\frac{1}{4}z_1+8z_2+z_3-9z_4\geqslant 0\\ -\frac{1}{2}z_1+12z_2+\frac{1}{2}z_3-3z_4\geqslant 0\\ -z_3\geqslant -1\\ z_i\geqslant 0 \quad i=1,2,3,4\end{cases}$$

再解这个不等式方程组,直接给出各个结果

$$\Phi_+^1=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} \qquad \Phi_+^2=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\\1 & 1\\ \frac{1}{9} & 0\end{bmatrix} \qquad E_+=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$L_+=\begin{bmatrix}0 & 2\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{12}\\ 0 & 0\\ \frac{1}{9} & 0\end{bmatrix} \qquad \Lambda_+=\begin{bmatrix}84 & 0 & 24\\ \frac{15}{4} & \frac{1}{32} & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & \frac{1}{36} & 0\end{bmatrix}$$

$$D_+=[L_+,E_+,\Lambda_+] \qquad \Phi_+=[\Phi_+^1,\Phi_+^2]$$

$$z=\Phi_+s+D_+t \quad t\geqslant 0,\ s\geqslant 0 \quad \sum_i s_i=1 \qquad \text{—(b)}$$

将(b)式代回到(a)式,有

$$x=A's+B't \quad t\geqslant 0,\ s\geqslant 0 \quad \sum_i s_i=1 \qquad \text{—(c)}$$

其中

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 8 & 0 & 0 & 2 \\ \frac{7}{6} & 0 & 12 & 0 & \frac{7}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 84 & 0 & 24 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{12} & 1 & \frac{15}{4} & \frac{1}{32} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{36} & 0 \end{bmatrix}$$

再将(c)式代入目标函数得到

$$f = 0 \cdot s_1 - \frac{1}{2}s_2 - \frac{1}{6}s_3 - \frac{5}{4}s_4 + \frac{19}{6}t_1 + \frac{1}{6}t_2 + 20t_3 + 18t_4 + \frac{7}{12}t_5 + 2t_6$$

所以 f 的最小值在 $s_4 = 1$，$s_i = 0$，$i = 1, 2, 3$；$t_i = 0$，$i = 1, \cdots, 6$ 处，故，

$$\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{3}{4}, 0, 0, 1, 0, 1, 0\right)^{\mathrm{T}} \quad f^* = -\frac{5}{4}$$

本例若按普通单纯形法求解会遇到循环问题.

毫无疑问的是线性规划问题的直接解法与单纯形算法等相比较，肯定不具有计算效率上的优势. 因此，在单纯形等算法充分成熟的现状下，通常就不会再去费心研究线性规划问题的直接解法. 但是，这反过来又造成了线性不等式方程组解的构造方法与理论的贫乏. 而在另一些重要的数学问题(如非线性规划与曲面的 Dupin 标形)中，线性不等式方程组解的构造又是不可或缺的分析工具. 所以，就有必要对此给出一个一般性的理论分析. 这即是本书用了许多篇幅论述这一问题的原因.

结束本章之时，尚可给出以下补充性的内容.

6. 一类绝对值不等式组的解

设 A 是满秩的 $n \times n$ 阶方阵，$\boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{0}$，$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leqslant b_i \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad —(5.7.1)$$

是一组带有绝对值运算的不等式组. 传统文献上称满足以下条件的 $\boldsymbol{x}$ 为(5.7.1)式的解[1]：

---

[1] 《数学手册》，人民教育出版社，1979 年，第 163 页.

$$|x_j| \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i |A_{ij}|}{|\det A|} \quad j = 1, 2, \cdots, n \qquad —(5.7.1a)$$

以下将指出(5.7.1a)式存在含糊不清之处.

事实上,由(5.7.1)式

$$-b_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

可写成

$$-\boldsymbol{b} \leqslant A\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}$$

这就可以得到等价的形式

$$\begin{cases} A\boldsymbol{x} \geqslant -\boldsymbol{b} & —(5.7.2) \\ -A\boldsymbol{x} \geqslant -\boldsymbol{b} & —(5.7.3) \end{cases}$$

先解出(5.7.2)式的解,有

$$\boldsymbol{x} = -A^{-1}\boldsymbol{b} + A^{-1}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^n \qquad —(5.7.4)$$

将(5.7.4)式再代入(5.7.3)式得到

$$\begin{cases} -\boldsymbol{u} \geqslant -2\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad —(5.7.5)$$

(5.7.5)式的形式是

$$\begin{cases} -u_i \geqslant -2b_i \\ u_i \geqslant 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

这一不等式组在前 n 个不等式取等号时得到正截距矩阵

$$\Phi_+^1 = 2 \cdot \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{0} & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix}$$

并且,对 $1, 2, \cdots, n$ 的任一个递增顺序子序列 $i_1, i_2, \cdots, i_k \quad 2 \leqslant k \leqslant n$,

$$\begin{cases} -u_{i_1} = -2b_{i_1} \\ -u_{i_2} = -2b_{i_2} \\ \quad \vdots \\ -u_{i_k} = -2b_{i_k} \end{cases}$$

自然有交点

$$\begin{cases} u_i = 2b_i & i = i_1, i_2, \cdots, i_k \\ u_j = 0 & j = 1, 2, \cdots, n \quad j \neq i \end{cases}$$

故若记

$$B_0 = \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \\ & & & b_n \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & \cdots & b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & & \mathbf{0} & & b_2 & b_2 & \cdots & b_2 & \cdots & b_2 \\ & b_3 & & & b_3 & 0 & \mathbf{0} & & \cdots & b_3 \\ & & \ddots & & & b_4 & & & \cdots & b_4 \\ \mathbf{0} & & & b_n & \mathbf{0} & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & & & b_n & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & b_2 & \cdots & b_2 & b_2 & b_2 & \cdots & b_2 & \cdots & b_2 \\ b_3 & & \mathbf{0} & & b_3 & b_3 & \cdots & b_3 & \cdots & b_3 \\ & b_4 & & & b_4 & 0 & \mathbf{0} & \vdots & & b_4 \\ & & & & & b_5 & & & & \\ \mathbf{0} & & \ddots & & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & b_n & \mathbf{0} & & & b_n & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$B_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

则可有

$$\Phi_+^1 = 2 \cdot B_0 \quad \Phi_+^2 = 2 \cdot [B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}]$$

以 $n = 4$ 为例

$$B_0 = \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{0} & b_3 & \\ & & & b_4 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 & b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & 0 & 0 & b_2 & b_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & 0 & b_3 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & b_4 & 0 & b_4 & b_4 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ b_3 & 0 & b_3 \\ 0 & b_4 & b_4 \end{bmatrix} \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

从而(5.7.5)式的解可写成为

$$\boldsymbol{u} = 2 \cdot [B_0, B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}]\boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{s} \geqslant \mathbf{0},\ 0 \leqslant \sum_i s_i \leqslant 1 \qquad —(5.7.6)$$

最终得到(5.7.1)式的解是

$$\boldsymbol{x} = -A^{-1}\boldsymbol{b} + 2A^{-1}[B_0, B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}]\boldsymbol{s}$$

$$\boldsymbol{s} \geqslant \mathbf{0},\ 0 \leqslant \sum_i s_i \leqslant 1 \qquad —(5.7.7)$$

由(5.7.7)式即可导出(5.7.1a)式.但这两式在意义上不同.(5.7.1a)式只能理解为是绝对值不等式组解的上、下确界而不能理解为是解空间.因为由(5.7.7)式,解空间仅仅是(5.7.1a)式的上、下确界所决定的 R^n 空间的矩形多面体内部的一个真子集合.

例 5.7.7

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

解

$$\begin{cases} \left|\frac{1}{2}x_1 + 3x_2\right| \leqslant 3 \\ \left|-\frac{1}{2}x_1 + x_2\right| \leqslant 2 \end{cases}$$

由

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad [B_0, B_1] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

即得

$$x = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \quad 0 \leqslant s_1 + s_2 + s_3 \leqslant 1$$

这个解亦可写为

$$x = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} \\ -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \quad s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 1$$

解的上、下确界是

$$-\frac{9}{2} \leqslant x_1 \leqslant \frac{9}{2} \quad -\frac{5}{4} \leqslant x_2 \leqslant \frac{5}{4}$$

这符合(5.7.1a)式.但在几何上,解空间与上、下确界的关系如下图所示.

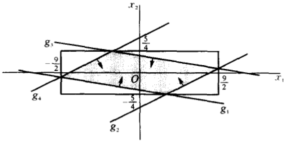


图 5.7.2

图 5.7.2 中解 x 的上、下确界构造成以原点为中心的矩形,但解空间仅仅是这个矩形中的阴影区域表示的平行四边形区域,其中 $g_{1,2,3,4}$ 是以下不等式组的边界线.

$$\begin{cases} g_1: \quad \frac{1}{2}x_1 + 3x_2 \geqslant -3 \\ g_2: -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \geqslant -2 \\ g_3: -\frac{1}{2}x_1 - 3x_2 \geqslant -3 \\ g_4: \quad \frac{1}{2}x_1 - x_2 \geqslant -2 \end{cases}$$

箭头方向为 g_i 边界线的法方向.

§ 5.8 正法锥与反演问题

§ 5.8.1 正法锥

本节分析的是 $Ax \geqslant \mathbf{0}$ 不等式方程组解集合的**正法锥**(又称为对偶锥)的构造.将 $Ax \geqslant \mathbf{0}$ 的解 $\boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0})$ 理解为由 R^m 坐标系原点出发的方向向量,用

$$P'(A\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}) = \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \quad \boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}),\ \boldsymbol{y} \in R^m\} \qquad —(5.8.1.1)$$

表示 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0})$ 的正法锥.这里 $\boldsymbol{y}$ 也被理解为从 R^m 原点出发的方向向量.

由(5.5.1.16)式及(5.5.3.1)式,有 $\boldsymbol{y} \in P'(A\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0})$,则

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Lambda\boldsymbol{t} + \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Pi \cdot B^{-1}\boldsymbol{u} \geqslant 0 \quad \boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}),\ \boldsymbol{t} \in R^{m-k}$$

$$\boldsymbol{u} \in P(C\boldsymbol{u} \geqslant \mathbf{0},\ \boldsymbol{u} \geqslant \mathbf{0})$$

因此,应有 $\boldsymbol{y} \in P'(A\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0})$ 的充要条件是

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Lambda = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Pi B^{-1}\boldsymbol{u} \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \qquad —(5.8.1.2)$$

成立.

充分性易见.必要性由下即知,记

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Lambda = (\tilde{y}_1,\ \tilde{y}_2,\ \cdots,\ \tilde{y}_{m-k})$$

若某个 $\tilde{y}_i \neq 0$,则取 $\boldsymbol{t}$ 满足

$$\tilde{y}_i t_i < 0 \text{ 且 } |t_i| \text{ 充分大} \quad t_j = 0 \quad j \neq i \quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-k$$

则
$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Lambda\boldsymbol{t} = \tilde{y}_i t_i < 0$$

并在
$$|t_i| > |\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Pi B^{-1}\boldsymbol{u}/\tilde{y}_i|$$

时,有
$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} < 0$$

故 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Lambda = \mathbf{0}$ 是必要的,由此即知 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Pi B^{-1}\boldsymbol{u} \geqslant 0$ 也就是必要的了.另一类解集合 P 的形式是对 $\boldsymbol{x} \in P(\boldsymbol{Ax} \geqslant \mathbf{0})$,$\boldsymbol{x} = \Pi B^{-1}\boldsymbol{u}$,则直接可得应有

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Pi B^{-1}\boldsymbol{u} \geqslant \mathbf{0} \qquad —(5.8.1.3)$$

由(5.8.1.2)并见(5.5.1.4)~(5.5.1.6)式,即知满足

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Lambda = \mathbf{0}$$

的解就是(5.5.1.6)式，只需用 $\boldsymbol{y}$ 代替 $\boldsymbol{\beta}$，

$$\boldsymbol{y} = \Pi\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} \in R^k \qquad —(5.8.1.4)$$

这里 $k = \text{rank}\, A$，Π 仍由(5.5.1.5)式表示. 所以，有

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi B^{-1}\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad —(5.8.1.5)$$

这里 $\Pi^{\mathrm{T}}\Pi$、B 都是 $k \times k$ 阶矩阵.

$\Pi^{\mathrm{T}}\Pi$ 是 Gram 矩阵. Gram 矩阵是一个向量组 $\boldsymbol{f}_i$，由其内积 $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_j$ 作为矩阵的第 i 行第 j 列元素所构造的矩阵.

Gram 矩阵具有以下性质[1]，

(1) 每个 Gram 矩阵都是半正定的

(2) 线性无关向量组构造的 Gram 矩阵是正定的

(3) 每个正定矩阵都可表示成 Gram 矩阵

$\Pi^{\mathrm{T}}\Pi$ 乘积矩阵是 Π 矩阵的 k 个列向量组构造的 Gram 矩阵，而 Π 矩阵的列向量组显然线性无关，故 $\Pi^{\mathrm{T}}\Pi$ 矩阵可逆.

当 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的系数矩阵 A 是行向量线性无关的，由以上的分析知不等式组的解就是

$$\boldsymbol{x} = \Lambda\boldsymbol{t} + \Pi B^{-1}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-k} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^k$$

故(5.8.1.5)式可表示为

$$\boldsymbol{v}\Pi^{\mathrm{T}} \cdot \Pi B^{-1} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad (B^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0}$$

并直接得到这一不等式组的解，

$$\boldsymbol{v} = (\Pi^{\mathrm{T}}\Pi)^{-1}B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{h} \in R_+^k \qquad —(5.8.1.6)$$

代入(5.8.1.4)，得到矩阵 A 行满秩时的正法锥向量 $\boldsymbol{y}$ 的表达式，

$$\boldsymbol{y} = \Pi(\Pi^{\mathrm{T}}\Pi)^{-1}B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{h} \in R_+^k \qquad —(5.8.1.7)$$

已知在 A 为 $n \times m$ 阶矩阵，$\text{rank}\, A = n$ 时，Π 应为 $m \times n$ 阶矩阵. 故当 $n = m$ 时，由以上分析即知

$$\Pi = A^{-1} \quad B = I_m \quad (\Lambda\ \text{矩阵不存在})$$

所以在 $n = m$ 且 A 满秩时，由(5.8.1.7)

$$\boldsymbol{y} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{h} \in R_+^m \qquad —(5.8.1.8)$$

或者说(5.8.1.8)式决定的 $\boldsymbol{y}$ 就是

---

[1] 引自《特殊矩阵》，陈景良、陈向晖，清华大学出版社，2001 年，第 203 页.

$$(A^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geqslant \mathbf{0} \qquad \text{—(5.8.1.9)}$$

的解.

例 5.8.1.1 利用例 5.2.1 的矩阵 A、A^{-1} 给出 R^3 截平面上 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0})$，$P'(A\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0})$ 的关系图形.

重写出

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

构造 R_3 的截平面. 由于 $A\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}$ 的解是

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^3$$

任取一个 $\boldsymbol{u}^0$，如 $\boldsymbol{u}^0 = (1, 1, 1)$，记

$$\boldsymbol{x}^0 = A^{-1}\boldsymbol{u}^0 = \begin{bmatrix} \frac{4}{15} \\ -\frac{8}{15} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

作

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0 = 0$$

得 $\boldsymbol{\beta}$ 的基础解系为：

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{4} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将 $\boldsymbol{\beta}$ 的 2 个列向量正交化，为

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

作

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\beta}\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix}$$

则由此决定的 $\boldsymbol{x}$ 全体为 R^3 空间上过 $\boldsymbol{x}^0$ 点且与角平分线正交的平面，且此平面必与 $P(A\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0})$、$P'(A\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0})$ 相交，并可构造原点在 $\boldsymbol{x}^0$ 的坐标系 Ots.

现已知 $P(A\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0})$ 是 $\boldsymbol{a}^j z$，$j=1, 2, 3$ 为棱线的闭锥，这里 $\boldsymbol{a}^j$ 为 A^{-1} 的第 j 列向量，故，应有 z 使

$$\boldsymbol{a}^j z = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\beta}\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix}$$

或者写成

$$[\boldsymbol{a}^j, \boldsymbol{\beta}]\begin{bmatrix} z \\ t \\ s \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}^0 \quad j=1, 2, 3$$

解以上方程组便可以得到 $\boldsymbol{a}^j z$ 射线在 Ots 坐标平面上交点的坐标并因此可决定 $P(A\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0})$ 与 Ots 交集的图形.

有

$$(t_1, s_1) = \left(-\frac{7}{5}, -\frac{13}{5}\right) \quad (t_2, s_2) = \left(0, \frac{4}{9}\right) \quad (t_3, s_3) = \left(\frac{7}{15}, \frac{4}{9}\right)$$

同理，若记

$$A^{\mathrm{T}} = [\tilde{\boldsymbol{a}}^1, \tilde{\boldsymbol{a}}^2, \tilde{\boldsymbol{a}}^3]$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{a}}^i$ 是 A^{T} 的第 i 列向量，再解

$$[\tilde{\boldsymbol{a}}^i, \boldsymbol{\beta}]\begin{bmatrix} z \\ t \\ s \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}^0 \quad i=1, 2, 3$$

可解出 $P'(\cdot)$ 与 Ots 交集的图形顶点的坐标，

$$(\tilde{t}_1, \tilde{s}_1) = \left(0, -\frac{4}{5}\right), \ (\tilde{t}_2, \tilde{s}_2) = \left(-\frac{7}{15}, \frac{16}{15}\right),$$

$$(\tilde{t}_3, \tilde{s}_3) = \left(\frac{7}{15}, -\frac{4}{5}\right)$$

利用这 6 点坐标，可得图 5.8.1.1.

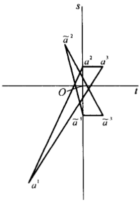


图 5.8.1.1

在图 5.8.1.1 中，由 $a^{1,2,3}$ 这 3 个顶点构成三角形即为 $P(\cdot)$ 与 Ots 的交集合，而由 $\tilde{a}^{1,2,3}$ 这 3 个顶点构成的三角形即为 $P'(\cdot)$ 与 Ots 的交集合，$a^{1,2,3}$ 的坐标为 (t_i, s_i)，$\tilde{a}^{1,2,3}$ 的坐标为 $(\tilde{t}_i, \tilde{s}_i)$，$i=1, 2, 3$.

再考虑矩阵 A 是行向量线性无关的(这隐含了 $n\leqslant m$)，则由(5.5.1.8)式，(5.8.1.7)式应为

$$\boldsymbol{y} = \Pi(\Pi^{\mathrm{T}}\Pi)^{-1}\Pi^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{h}\in R_+^n \qquad —(5.8.1.10)$$

可以知道

$$\Pi(\Pi^{\mathrm{T}}\Pi)^{-1}\Pi^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}$$

由此知(5.8.1.10)式在 $n \leqslant m \quad \mathrm{rank}\,A = n$ 时,依旧有

$$\boldsymbol{y} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{h} \in R_{+}^{n} \qquad —(5.8.1.11)$$

从几何意义上讲,记

$$\hat{\Pi} = \Pi(\Pi^{\mathrm{T}}\Pi)^{-1}\Pi^{\mathrm{T}} \Rightarrow \hat{\Pi}\cdot\hat{\Pi} = \hat{\Pi} \quad \hat{\Pi}^{\mathrm{T}} = \hat{\Pi}$$

是幂等的 Hermite 矩阵,因此是正交投影矩阵. $\hat{\Pi}$矩阵由

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

的正交补空间的一组基向量组成的矩阵 Π 按正交投影算子的要求构造而成.

$$\hat{\Pi}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

即表示 R^{m} 中的向量 $\boldsymbol{x}$ 沿正交于 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的正交补空间的方向投影到正交补空间. 现在由

$$\hat{\Pi}\cdot A^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}$$

因此,A^{T}就是 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的正交补空间中的一个子空间的一组基组成的矩阵.

当矩阵 A 是行向量线性相关的,这时

$$k = \mathrm{rank}A \leqslant \min(n,\ m)$$

且当 $k = m$ 时,必有 $n \geqslant m$. 则由以上分析,(5.8.1.5)式中的参向量 $\boldsymbol{u}$ 应是一个形如(见(5.5.1.14)式及其说明),

$$\begin{cases} C\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

不等式组的解. 以上已指出系数矩阵 C 实际就是矩阵 A 中行向量间的线性相关系数矩阵 W.

由(5.3.2.28)式及其说明,以上不等式组的解可表成

$$\boldsymbol{u} = D_{+}\boldsymbol{z} \quad \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{u} \in R^{k}$$

这里先考虑 $A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ 是相容的情形,同时附带指出 D_{+}是非负矩阵.

这样,(5.8.1.5)式应为

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi B^{-1}D_{+}\boldsymbol{z} \geqslant 0 \quad \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad —(5.8.1.12)$$

这里 Π、B 分别是 $(m-k)\times k$、$k\times k$ 阶矩阵,D_{+}矩阵的阶数由(5.5.1.14)式的

解决定.有,

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi B^{-1}D_{+}\geqslant \mathbf{0}$$

或等价地表示成

$$D_{+}^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}})^{-1}\Pi^{\mathrm{T}}\Pi\boldsymbol{v}\geqslant\mathbf{0}\quad \boldsymbol{v}\in R_{+}^{k} \qquad —(5.8.1.13)$$

(5.8.1.13)式在不给出 D_{+} 矩阵的具体形式时是无法给予解的.但可以间接地知道(5.8.1.13)式决定的 $\boldsymbol{v}$ 按(5.8.1.4)式给出的 $\boldsymbol{y}$ 向量全体集合$P'(\cdot)$的几何意义.

由以上对于行向量线性无关的矩阵 A 的正法锥的讨论中,已有(5.8.1.8)及(5.8.1.11)式,且这两式在形式上是相似的.这两式也可以不通过以上的构造分析而直接从 $P(\cdot)$、$P'(\cdot)$集合的定义推出.

由定义,$P(A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0})$ 是所有使 $A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0}$ 的 $\boldsymbol{x}$ 的集合,而 $P'(A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0})$ 则又是与 $P(A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0})$ 中的所有 $\boldsymbol{x}$ 的内积大于(等于)0 的 $\boldsymbol{y}$ 的集合.因此,取 $\boldsymbol{h}\in R_{+}^{n}$,令

$$\boldsymbol{y}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}\Rightarrow\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0}\quad \boldsymbol{x}\in P(A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0})$$

故 $P'(A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0})=\{\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{y}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}\quad \boldsymbol{h}\in R_{+}^{n}\}$ —(5.8.1.11)

这是因为 $\boldsymbol{y}$ 只能是$\boldsymbol{a}_j$, $j=1,2,\cdots,n$ 向量的线性组合($\boldsymbol{a}_j$ 是 A 的行向量的转置),不可能有其他的 $\boldsymbol{a}'$向量,且 $\boldsymbol{a}'$不能由 $\boldsymbol{a}_j$ 的正线性组合表出,并有

$$\boldsymbol{y}=c\cdot\boldsymbol{a}'+A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}\quad c\geqslant 0\quad \boldsymbol{h}\geqslant\mathbf{0}$$

使
$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant 0\quad \boldsymbol{x}\in P(A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0})$$

若否,则由

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=c(\boldsymbol{a}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}\geqslant 0$$

知必应有

$$\begin{cases}A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0}\\(\boldsymbol{a}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant 0\end{cases}$$

成立.其中已知 $A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0}$,而 $(\boldsymbol{a}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant 0$ 是必须的,否则,取 $\boldsymbol{h}=\mathbf{0}$, $c>0$ 便可有 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\ngeqslant 0$. 但满足这一条件的 $\boldsymbol{x}$ 是

$$\boldsymbol{x}\in(P(A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0})\cap\{\boldsymbol{x}\mid(\boldsymbol{a}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant 0\})\subseteq P(A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0})$$

现在对 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant 0$ 成立的 $\boldsymbol{x}$ 是全体 $\boldsymbol{x}\in P(A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0})$,故应当要求有

$$(P(A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0})\cap\{\boldsymbol{x}\mid(\boldsymbol{a}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant 0\})=P(A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0})$$

再由 **Farkas 引理**:

设 A 是给定的 $n\times m$ 维实矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是给定的 m 维向量，对所有满足 $A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 的 $\boldsymbol{x}$ 成立 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 的充要条件是存在 n 维向量 $\boldsymbol{\rho}\geqslant\boldsymbol{0}$ 使 $\boldsymbol{b}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}$ [1]. ■

将 $\boldsymbol{a}'$ 看成是 Farkas 引理中的 $\boldsymbol{b}$ 向量，即知

$$(P(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})\cap\{\boldsymbol{x}\mid(\boldsymbol{a}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant 0\})=P(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})$$

的充要条件是

$$\boldsymbol{a}'=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}\quad \boldsymbol{h}\geqslant\boldsymbol{0}$$

此即与前设矛盾. 由此即有以上结论.

再由 $\boldsymbol{y}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}$ 的几何意义知，$P'(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})$ 集合是以 A^{T} 的列向量（即 A 的行向量转置）为方向向量所决定的从 R^m 坐标系原点出发的射线为棱线所组成的闭锥.

将以上的分析推广到矩阵 A 行向量线性相关的情形（在 $A\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}$ 为相容时），仍取

$$\boldsymbol{y}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}\quad \boldsymbol{h}\geqslant\boldsymbol{0}$$

则依旧成立

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{x}\in P(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})$$

仍旧规定

$$P'(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})=\{\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{y}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}\quad \boldsymbol{h}\geqslant\boldsymbol{0}\}$$

可知 $P'(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})$ 依旧是顶点在 R^m 坐标系原点的闭锥. 但由于现在矩阵 A 是行向量线性相关的，由上文所给出的"最简形式"的规定，当 A^{T} 的列向量组中有 $\boldsymbol{a}^i$

$$\boldsymbol{a}^i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}c_j\boldsymbol{a}^j\quad c_j\geqslant 0$$

就在决定

$$\boldsymbol{y}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}$$

的 A^{T} 矩阵的列向量中划去 $\boldsymbol{a}^i$ 列向量，并相应地使 $\boldsymbol{h}$ 向量的维数减 1. 仍记划去 $\boldsymbol{a}^i$ 后的 A^{T} 矩阵为 A^{T}，并记其列维数为 $n'=n-1$. 继续对这一 A^{T} 矩阵的列向量组作检验，直至其任一列向量都不可用其他列向量的正线性组合表出，就得到了 $\boldsymbol{y}\in P'(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})$ 中的最简形式. 记最简形式的 A^{T} 矩阵为 $\widetilde{A}^{\mathrm{T}}$，$\widetilde{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $m\times\tilde{n}$ 阶的，且 $k\leqslant\tilde{n}\leqslant n$. 有

[1] 引自《非线性规划》上册，M. Avriel，第 27 页.

$$\boldsymbol{y} = \widetilde{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{h} \in R_+^{\tilde{n}} \qquad \text{—(5.8.1.14)}$$

$$P'(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) = \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} = \widetilde{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{h} \in R_+^{\tilde{n}}\}$$

另一方面，记

$$\boldsymbol{v} = \widetilde{D}_+ \boldsymbol{p} \quad \boldsymbol{p} \geqslant \boldsymbol{0}$$

是(5.8.1.13)的解，$\widetilde{D}_+$矩阵的行维数是 k、列维数由(5.8.1.13)式的解过程决定. 则按(5.8.1.4)式，对 $\boldsymbol{y} \in P'(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$，有

$$\boldsymbol{y} = \Pi \widetilde{D}_+ \boldsymbol{p} \quad \boldsymbol{p} \geqslant \boldsymbol{0}$$

比较(5.8.1.14)式，可知只能有

$$\widetilde{A}^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow \Pi \cdot \widetilde{D}_+ \quad \boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{h} \in R_+^{\tilde{n}} \qquad \text{—(5.8.1.15)}$$

以下给出 2 个例子予以说明.

例 5.8.1.2 对例 5.5.1.1 求解 $P'(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 集合.

由例 5.5.1.1 中的结果，令

$$\boldsymbol{y} = \Pi \boldsymbol{v}$$

这里

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{4} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{4} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

再由 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \geqslant 0$ 可得

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{83}{12} & \frac{15}{2} \\ -\frac{11}{2} & -9 \\ -\frac{37}{6} & -12 \\ -\frac{7}{2} & 0 \\ -\frac{17}{12} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{63} \geqslant \boldsymbol{0}$$

经整理后可得

$$\frac{1}{63}\begin{bmatrix}10.5 & -10.5\\ 0 & -31.5\end{bmatrix}\boldsymbol{v}\geqslant \boldsymbol{0}$$

即

$$D_{+}^{T}(B^{T})^{-1}\Pi^{T}\Pi=\begin{bmatrix}10.5 & -10.5\\ 0 & -31.5\end{bmatrix}$$

由此得

$$\boldsymbol{v}=\frac{1}{5.25}\begin{bmatrix}31.5 & -10.5\\ 0 & -10.5\end{bmatrix}\boldsymbol{h}\quad \boldsymbol{h}\in R_{+}^{2}$$

所以

$$\boldsymbol{y}=\Pi\cdot\frac{1}{5.25}\begin{bmatrix}31.5 & -10.5\\ 0 & -10.5\end{bmatrix}\boldsymbol{h}=\begin{bmatrix}6 & -2\\ 0 & -2\\ 3 & -4.5\\ -9 & 5.5\\ -6 & 4\end{bmatrix}\boldsymbol{h}\quad \boldsymbol{h}\in R_{+}^{2}$$

得

$$\Pi\widetilde{D}_{+}=\begin{bmatrix}6 & -2\\ 0 & -2\\ 3 & -4.5\\ -9 & 5.5\\ -6 & 4\end{bmatrix}$$

显然 $\Pi\widetilde{D}_{+}$ 作为列向量是方向向量的意义上与矩阵 A^{T} 的第 2、3 列向量组成的子矩阵 $\widetilde{A}^{T}$ 等价. 这里

$$\widetilde{A}^{T}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 0 & -4\\ 1 & -9\\ -3 & 11\\ -2 & 8\end{bmatrix}$$

因为 A^{T} 的第 1 列向量可由第 2、3 列向量的正线性组合表出，有

$$\begin{bmatrix}1\\ -2\\ -3\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=\frac{3}{2}\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\\ -3\\ -2\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4\\ -4\\ -9\\ 11\\ 8\end{bmatrix}$$

可知正线性组合表出的意义是在

$$Ax \geqslant \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

不等式组中，若

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} c_j \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}} \quad c_j \geqslant 0$$

则 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0$ 不等式就是冗余的，去掉这一不等式将不至于对解造成影响. 其几何意义即如图 5.5.1.1. 在 $g_{1,2,3}$ 直线中，g_1 直线的法方向向量可以由 $g_{2,3}$ 直线的法方向向量的正线性组合表出，故

$$\begin{cases} g_1 = 0 \\ g_2 > 0 \\ g_3 > 0 \end{cases}$$

矛盾，$g_1(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 是冗余约束条件.

例 5.8.1.3 设

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

求 $A\boldsymbol{x} \geqslant 0$ 不等式组解集合的正法锥.

本例中 $n = 4$，$m = 3$ 矩阵 A 是行向量线性相关的. 利用 $A\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}$ 中的前 3 个不等式是线性无关的，可得其解是

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} \in R_+^3$$

即

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} \in R_+^3$$

将此解代入第 4 个不等式，得到

$$\begin{cases} v_1 - v_2 + v_3 \geqslant 0 \\ v_1, v_2, v_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

从而第 4 个不等式对于前 3 个不等式的线性相关系数是

$$(1, -1, 1)$$

故第 4 个不等式不能被看成是冗余的.

从以上关于 $\boldsymbol{v}$ 的不等式中可得到解的形式是

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^4$$

所以

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$$

注意本例中解 $\boldsymbol{x}$ 表达式中不存在 $\Lambda \boldsymbol{t}$ 项,即不存在零度空间解部分. 故为求 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \geqslant 0$ 的向量,可直接求解之,

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \geqslant \boldsymbol{0}$$

类似以上的解法,可得这一不等式的解是

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & -1 & -5 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{h} \in R_+^4$$

即仍旧是

$$\boldsymbol{y} = A^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{h} \in R_+^{\tilde{n}}$$

虽然本例中 A 矩阵是行向量线性相关的.

附带说明,本例中解 $\boldsymbol{x}$ 表达式中缺失 $\Lambda \boldsymbol{t}$ 项,表示 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 对 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 的任何向量均是不可能的. 在几何上这表示 $A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 的解空间是由 $\boldsymbol{a}_{1,2,3,4}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 决定的 4 个平面围成的闭锥,这个闭锥仅在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 处才能有 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

再考虑矩阵 A 存在行向量线性相关,并且 $A\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}$ 是矛盾不等式的情形下 $P'(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})$ 的结构. 在此情形下,由前所述, $P(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})$ 集合总是存在于某个 $(m-s)$ 维超平面 L 上,这里 $s\geqslant 1$,所以,可以想见这个超平面 L 的法向量一定也属于 $P'(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})$. 因此,对 $\boldsymbol{y}\in P'(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})$ 的表达式中,总要有超平面 L 的(正,负)法向量的项.

具体地讲,在 $A\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}$ 为矛盾方程组的条件下,取(5.5.3.17)式为 $A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 的解的形式,简化符号,不失一般性,有

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Lambda\{1\}\Lambda'\boldsymbol{t}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Lambda\{1\}\cdot G_0'D_+'\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0}$$

得正法锥的向量 $\boldsymbol{y}$ 应是

$$\begin{cases}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Lambda\{1\}\Lambda'=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Lambda\{1\}G_0'D_+'\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}\qquad —(5.8.1.16)$$

方程组的解. 这里 D_+' 是(5.5.3.15)式方程组的解

$$\boldsymbol{u}=D'_+\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0}$$

决定的矩阵. 容易理解,若 Λ' 矩阵不存在,如 $A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 的解是(5.5.3.1)式,则 $\boldsymbol{y}$ 就是

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Lambda\{1\}A'\geqslant\boldsymbol{0}\qquad —(5.8.1.17)$$

方程组的解.

对(5.8.1.16)、(5.8.1.17)式不再详细地作分析,因为前面的论述完全可以移用到这里. 以下仅给出 2 个例子以说明 $\boldsymbol{y}$ 的表达形式.

例 5.8.1.4 由例 5.5.3.4 已得 $A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 的解是

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}-1 & -\frac{7}{10}\\ -1 & -\frac{7}{10}\\ 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\quad t\in R\quad \boldsymbol{u}\in R_+^2$$

求 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant 0$ 的解.

由

$$(0,\ 1,\ 1,\ 1)\boldsymbol{y} = 0$$

得

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z} \quad \boldsymbol{z} \in R^3$$

再由

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -\dfrac{7}{10} \\ -1 & -\dfrac{7}{10} \\ 0 & \dfrac{1}{2} \\ 1 & \dfrac{1}{5} \end{bmatrix} \geqslant \boldsymbol{0}$$

简化得

$$\begin{cases} -\ z_1 - 2z_2 - \ z_3 \geqslant 0 \\ -7z_1 - 9z_2 + 3z_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

解这个不等式组，得

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} \dfrac{3}{70} & -\dfrac{4}{7} \\ -\dfrac{16}{70} & -\dfrac{2}{7} \\ -\dfrac{41}{70} & \dfrac{8}{7} \end{bmatrix} \boldsymbol{h} \quad s \in R \quad \boldsymbol{h} \in R_+^2$$

从而得 $\boldsymbol{y}$ 的表达形式是

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} \dfrac{3}{70} & -\dfrac{4}{7} \\ -\dfrac{16}{70} & -\dfrac{2}{7} \\ -\dfrac{41}{70} & \dfrac{8}{7} \end{bmatrix} \boldsymbol{h} \right)$$

有

$$
\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\\1\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}\frac{3}{70} & -\frac{4}{7}\\ -\frac{16}{70} & -\frac{2}{7}\\ -\frac{41}{70} & \frac{8}{7}\\ \frac{57}{70} & -\frac{6}{7}\end{bmatrix}\boldsymbol{h}\quad s\in R\quad \boldsymbol{h}\in R_{+}^{2}
$$

显然，$\boldsymbol{y}$ 表达式的 s 前的向量，就是 $A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0}$ 的解 $\boldsymbol{x}$ 集合所在的那个超平面的法方向向量，并且，在 $\boldsymbol{y}$ 的表达式中，这个法方向是可以取正也可以取负的 $(s\in R)$.

例 5.8.1.5 对例 5.5.3.5 的关于 $A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0}$ 的解

$$
\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6}\\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2}\\ -1 & -\frac{1}{2} & 3\\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{u}\in R_{+}^{3}
$$

求 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant 0$ 的解.

$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant 0$ 等价于(经化简)

$$
\begin{bmatrix}1 & -1 & -6 & 1\\ 1 & 0 & -3 & 0\\ -5 & 3 & 18 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{y}\geqslant\mathbf{0}
$$

这组不等式的解是

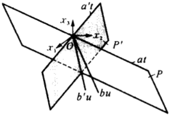
$$
\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\\1\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}-\frac{3}{10} & \frac{13}{15} & \frac{1}{30}\\ -\frac{3}{10} & \frac{64}{45} & \frac{13}{90}\\ -\frac{1}{10} & -\frac{2}{45} & \frac{1}{90}\\ \frac{2}{5} & \frac{13}{45} & \frac{8}{45}\end{bmatrix}\boldsymbol{h}\quad s\in R\quad \boldsymbol{h}\in R_{+}^{3}
$$

$\boldsymbol{y}$ 的表达式中也含有 $A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0}$ 的解 $\boldsymbol{x}$ 所在超平面的(正、负)法方向向量一项(即 s 参数前的向量).

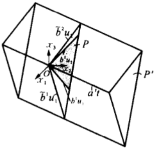
例 5.8.1.6 一般地，如图 5.5.3.1，当 $A\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0}$ 的解，在 $A\boldsymbol{x}>\mathbf{0}$ 为矛盾方程组时，可表示为

(1) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}t \quad t\in R$ 如图 5.5.3.1 的(a)，则其正法锥是 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=0$ 的解. 即如取坐标变换 ($\boldsymbol{x}\rightarrow\boldsymbol{x}'$) 使 $\boldsymbol{a}t$ 直线与 x_1'轴重合，那么，正法锥即为 $Ox_2'x_3'$ 平面(在 R_3 空间中).

(2) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}u \quad t\in R \quad u\geqslant 0$ 如图 5.5.3.1 的(b)，其正法锥也是一个半平面，仍见图 5.8.1.2 的(a). 这里以



(a)



(b)

图 5.8.1.2

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}u \quad t\in R \quad u\geqslant 0$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{20}\\\frac{1}{5}\\\frac{1}{4}\end{bmatrix}t+\frac{1}{41}\begin{bmatrix}9\\5\\-4\end{bmatrix}u \quad t\in R \quad u\geqslant 0$$

为例. $\boldsymbol{y}$ 表示为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}'t+\boldsymbol{b}'u \quad t\in R \quad u\geqslant 0$$

图 5.8.1.2 的(a)中的阴影半平面为正法锥.

(3) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}^1u_1+\boldsymbol{b}^2u_2 \quad u_{1,2}\geqslant 0$ 如图 5.5.3.1 的(c). 则其正法锥中的向量 $\boldsymbol{y}$ 可表成

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}t+\tilde{\boldsymbol{b}}^1u_1+\tilde{\boldsymbol{b}}^2u_2 \quad t\in R \quad u_{1,2}\geqslant 0$$

以

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}6&-1\\5&6\\-1&7\end{bmatrix}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ 8 & 7 \\ -5 & 11 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$$

为例. 其图形如图 5.8.1.2 的(b). 其中阴影部分为 $\boldsymbol{x}$ 的集合即 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$, 为平面上的闭锥, 而三棱柱体则为正法锥. 如果从(b)中取出 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 所在的平面以便可以正视它, 就会有图 5.8.1.3.

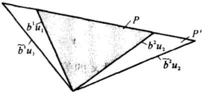


图 5.8.1.3

图中 4 条射线之间有关系

$$\widetilde{\boldsymbol{b}}^1 u_1 \perp \boldsymbol{b}^2 u_2 \quad \widetilde{\boldsymbol{b}}^2 u_2 \perp \boldsymbol{b}^1 u_1$$

§5.8.2 反演问题

反演问题. 如果先给出一个 $\boldsymbol{y}$ 的表达式, 然后问能否从 $\boldsymbol{y}$ 表达式中反演出一个矩阵 A, 使由 A 决定的不等式方程组

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

的解 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$, 并使

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$$

成立? 这即为反演问题.

由以上的分析, 对这一问题有以下推论:

推论 5.8.2.1 当给定 m 维向量 $\boldsymbol{y}$ 的表达式, 即有 $m \times n$ 矩阵 $\widetilde{A}$, n 维非负向量 $\boldsymbol{h}$, 使

$$\boldsymbol{y} = \widetilde{A}\boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{h} \in R_+^n$$

则 $\boldsymbol{y}$ 一定是一个由 $n \times m$ 维矩阵 A 和 m 维向量 $\boldsymbol{x}$ 决定的不等式组

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

的解 $\boldsymbol{x}$ 的正法锥中的向量, 即

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \quad 当\ A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

成立. ■

由上一节的分析即可知此结论. 并可知, 不论 $\widetilde{A}$ 矩阵是否是列满秩的, 总可以取

$$A = \begin{bmatrix} \widetilde{A}^{\mathrm{T}} \\ W_+ \widetilde{A}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \qquad —(5.8.2.1)$$

其中 W_+ 是 $k \times n$ 维任意的非负矩阵，k 可取为任意正整数，当 W_+ 取为 0 矩阵(或说是略去 $W_+ \cdot \widetilde{A}^T$ 项)时，就得到 A 的最简形式.

推论 5.8.2.2 当给定 m 维向量 $\boldsymbol{y}$ 的表达式，即有 $m \times n$ 维矩阵 $\widetilde{A}$ 及 $m \times k$ 维矩阵 $\widetilde{B}$、n 维非负向量 $\boldsymbol{h}$ 及 k 维向量 $\boldsymbol{s}$，使

$$\boldsymbol{y} = \widetilde{B}\boldsymbol{s} + \widetilde{A}\boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{s} \in R^k \quad \boldsymbol{h} \in R^n_+$$

则可构造 m 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的等式—不等式组

$$\begin{cases} \widetilde{B}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ \widetilde{A}^T \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad —(5.8.2.2)$$

那么，$\boldsymbol{y}$ 就是这一等式-不等式方程组解集合正法锥的向量. ■

如果规定把

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

称为原不等式组(以下会看到这一附加规定不能省略). 则由上一节的分析可知，当 A 矩阵行向量线性无关时，由原不等式组解集合的正法锥向量 $\boldsymbol{y}$ 的表达式，取(5.8.2.1)式中 $W_+ = [0]$，便可准确地反演出原不等式组. 当 A 矩阵行向量线性相关且 $A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ 相容时，由 $\boldsymbol{y}$ 的表达式可以反演出原不等式的最简形式. 当 $A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ 为矛盾方程组时，则一般地无法反演出原不等式组. 但由推论 5.8.2.2 所作的反演即

$$\begin{cases} \widetilde{B}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ \widetilde{A}^T \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad —(5.8.2.2)$$

一定是与原不等式等价的不等式组，即这两个不等式组的解集合一定是相同的. 这可以从以上等式-不等式方程组解的唯一性得知.

在(5.8.2.2)式中，设 $\widetilde{B}^T \in R^{m \times k}$

$$\widetilde{B}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

等式方程组的解是

$$\boldsymbol{x} = \Lambda_b \boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{s} \in R^{m-k}$$

Λ_b 是任一个基础解系矩阵.

设 $\widetilde{A}^T \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的解是 $P(\widetilde{A}^T \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$. 由以上的分析，$P(\widetilde{A}^T \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 集合是唯一的. 所以，(5.8.2.2)式的解应是

$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \Lambda_b \boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{s} \in R^{m-k}\} \cap P(\widetilde{A}^T \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$$

由于 $\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \Lambda_b \boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{s} \in R^{m-k}\}$ 也是唯一的，所以，(5.8.2.2)式的解

$$P(\widetilde{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\ \widetilde{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})$$

一定是唯一的.

但现在已设

$$\boldsymbol{y}=\widetilde{B}\boldsymbol{s}+\widetilde{A}\boldsymbol{h}\quad \boldsymbol{s}\in R^{k}\quad \boldsymbol{h}\in R_{+}^{n}$$

是原不等式组 $A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 的解集合 $P(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})$ 的正法锥,所以,只能有

$$P(\widetilde{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\ \widetilde{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})=P(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})$$

成立.

故

$$\begin{cases}\widetilde{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\\ \widetilde{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}\Leftrightarrow A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$$

必成立.

这里还可以看到的是在推论 5.8.2.1 中正法锥的向量 $\boldsymbol{y}$ 的构造在形式上是符合 Farkas 引理的结论的. 但在推论 5.8.2.2 中,由于 $\boldsymbol{s}$ 参向量可取为含有负数分量的向量,故其形式上与 Farkas 引理的结论不一致. 然而,这只要将推论 5.8.2.2 中正法锥向量 $\boldsymbol{y}$ 的构造写成

$$\boldsymbol{y}=\widetilde{B}\boldsymbol{s}^{1}+(-\widetilde{B})\boldsymbol{s}^{2}+\widetilde{A}\boldsymbol{h}\quad \boldsymbol{s}^{1},\ \boldsymbol{s}^{2}\in R_{+}^{k}\quad \boldsymbol{h}\in R_{+}^{n}$$

则在形式上就与 Farkas 引理的结论相一致. 这即等价于原等式-不等式方程组

$$\begin{cases}\widetilde{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\\ \widetilde{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}$$

转换成以下不等式方程组

$$\begin{cases}\widetilde{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\\ -\widetilde{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\\ \widetilde{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}$$

则上述 $\boldsymbol{y}$ 就是这一不等式方程组解集合正法锥中的向量.

例 5.8.2.1 由例 5.5.3.1 已得 $A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 的解

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{t}+\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u\quad \boldsymbol{t}\in R^{2}\quad u\geqslant 0$$

则其正法锥中的向量 $\boldsymbol{y}$ 应为

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\\1\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}-3\\0\\-1\\1\end{bmatrix}h \quad s\in R \quad h\geqslant 0$$

由以上推论 5.8.2.2，得到一个不等式组，是

$$\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3+x_4=0\\-3x_1\qquad\quad -x_3+x_4\geqslant 0\end{cases}$$

解这个方程组，就又得到例 5.5.3.1 的解. 虽然以上不等式组形式上与例 5.5.3.1 的原不等式组是不同的.

例 5.8.2.2 由例 5.5.3.4、例 5.8.1.4 已得 $A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 的解 $\boldsymbol{x}$ 及正法锥向量 $\boldsymbol{y}$ 为

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}-1&-\frac{7}{10}\\-1&-\frac{7}{10}\\0&\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{5}\end{bmatrix}\boldsymbol{u} \quad t\in R \quad \boldsymbol{u}\in R_+^2$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\\1\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}\frac{3}{70}&-\frac{4}{7}\\-\frac{16}{70}&-\frac{2}{7}\\-\frac{41}{70}&\frac{8}{7}\\\frac{57}{70}&-\frac{6}{7}\end{bmatrix}\boldsymbol{h} \quad s\in R \quad \boldsymbol{h}\in R_+^2$$

可反演出不等式组(简化)

$$\begin{cases}3x_1-\ \ 2x_2+\ \ x_3+\ \ x_4=0\\3x_1-16x_2-41x_3+57x_4\geqslant 0\\-2x_1-\ \ x_2+\ 4x_3-\ 3x_4\geqslant 0\end{cases}$$

直接解这个不等式组可以得到原不等式组的解.

在这 2 个例子中，可见由正法锥向量 $\boldsymbol{y}$ 的表达式所反演出的不等式组与原不等式组在形式上有显著的区别，几何性质上也有显著的差异，但却可以有相同的解集合. 保证这一点的必要条件是原不等式组与反演出的不等式组都包含有

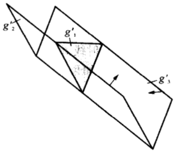


图 5.8.2.1

相同的等式约束方程组，只不过在原不等式组中，等式方程组是以两两负线性相关的不等式方程表示的. 这一点的几何意义可以给予图 5.8.2.1 以例说明. 图 5.8.2.1 表明的意思是，在图 5.5.3.1 的(c)的情形下，不等式 $g_{1,2,3,4}(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 且 g_1，g_2 负线性相关时，其解空间为图中阴影部分，即 $g_{1,2}(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 决定的平面上的一个闭锥. 而由这个解空间的正法锥反演所得到的可以是 $g'_{1,2,3}(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 不等式方程组，其中 $g'_1(\boldsymbol{x}) = 0$. 它们在几何上构成的是图 5.8.2.1. 其中的阴影区域为 $g'_1(\boldsymbol{x}) = 0$ 平面上的闭锥. 只要

$$g'_1(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) \geqslant 0 \\ g_2(\boldsymbol{x}) \geqslant 0 \end{cases}$$

且 $g'_{2,3}$ 平面由 $g_{3,4}$ 平面绕图 5.5.3.1 的(c)中的 Oa、Ob 直线转动而来，则 $g'_{1,2,3}(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ ($g'_1(\boldsymbol{x}) = 0$) 方程组的解一定与原不等式组相同.

一般地，若记 $X \subset R^m$ 是一个集合，则 X 的正法锥 $(X)'$ 是指

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \quad \boldsymbol{x} \in X \quad \boldsymbol{y} \in (X)'$$

以上的分析方法说明，如果我们已知道了 X 的结构，特别是当 X 中的元素 $\boldsymbol{x}$ 能够以线性组合的方式被 X 的最简基向量组表出，那么，$(X)'$ 的结构总可以利用以上方法予以确定.

以下仅补充说明 X 为 R^m 空间中的凸组合时，$(X)'$ 的结构. 设 $\boldsymbol{x} \in X$ 可表成

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi s} \quad \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \sum_i s_i = 1$$

Φ 是 $m \times n$ 阶矩阵.

则由 $\boldsymbol{y} \in (X)'$，应成立

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi} \geqslant \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0}$$

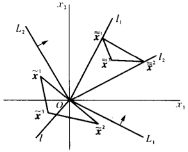


图 5.8.2.2

这个不等式方程组的解即是凸组合 $\boldsymbol{\Phi s}$ 的正法锥. 在这里，凸组合中的点 $\boldsymbol{x}$ 其实是被当作 R^m 中的(由原点出发的)向量来对待的.

由下一节的分析，当凸组合 $\boldsymbol{\Phi s}$ 存在对应的极大锥时，$\boldsymbol{\Phi s}$ 的正法锥就是其极大锥的正法锥. 可以给出对应于图 5.8.2.2 的凸组合的正法锥的图形.

图 5.8.2.2 中射线 $L_{1,2}$ 按其法方向所

夹成的锥即是凸组合$\tilde{\tilde{x}}^{1,2,3}$的正法锥. 这也就是$\tilde{\tilde{x}}^{1,2,3}$的极大锥即 $l_{1,2}$射线夹成的锥的正法锥. 这里$L_1 \perp l_1$, $L_2 \perp l_2$. 而在凸组合 $\tilde{x}^{1,2,3}$ 中,其正法锥则是与$\tilde{x}^1$、$\tilde{x}^2$ 连线正交的射线 l.

容易理解,如果 $x = 0$ 是凸组合 X 的内点,则 X 的正法锥$(X)'$退化为单点集$\{0\}$.

由这里的分析即可知道,在反演问题中,由某个正法锥中的向量 y

$$y = \widetilde{A}h \quad h \in R_+^n$$

要能反演出产生这个正法锥的(任意形式的)原不等式组,那么,原不等式组的形式就可以有无穷多个并且这些不等式组的解集合也有无穷多个. 如图 5.8.2.2,任意的以射线 $l_{1,2}$所夹成的锥为极大锥的凸组合(可看作为某个不等式方程组的解集合),都产生同样的正法锥即射线 $L_{1,2}$所夹成的锥. 所以仅只有当附加规定原不等式组具有

$$Ax \geqslant 0$$

的形式,那么,反演才具有唯一性(在解集合意义上). 如图 5.8.2.2 中由 $L_{1,2}$与 $l_{1,2}$的正交关系,可以唯一地决定 $l_{1,2}$射线(及它们所夹成的锥),反之也一样. 这一点对于

$$y = \widetilde{B}s + \widetilde{A}h \quad s \in R_+^k \quad h \in R_+^n$$

的情形也是成立的. 当然,反演时,$Ax \geqslant 0$ 的形式(即矩阵 A 的形式)可以有无穷多个,但这些形式上不同的 $Ax \geqslant 0$ 不等式组的解集合都是相同的.

§5.9 凸组合基向量组的唯一性

在解线性非齐次不等式方程组

$$\begin{cases} Cx \geqslant b \\ \ \ x \geqslant 0 \end{cases}$$

时,已得到了它的解的形式是

$$x = \Phi_+ s + D_+ v \quad v \geqslant 0 \quad s \geqslant 0 \quad \sum_i s_i = 1$$

其中 $\Phi_+ s$ 显然是一个凸组合. 由多胞形表示定理,即知 Φ_+ 矩阵是唯一的.

考虑一般的**非负凸组合**. 设 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ 是 $m \times n$ 阶**非负**实矩阵,$P_s(A)$是由 A 决定的凸组合,

$$P_s(A) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \sum_i s_i = 1\} \qquad —(5.9.1)$$

可以将 $P_s(A)$看成是由 n 个(R^m 空间中点的)点 $\tilde{\boldsymbol{x}}^j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ 张成的凸集,这里

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^j = \boldsymbol{a}^j \quad \boldsymbol{x} = \sum_j s_i \tilde{\boldsymbol{x}}^j \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

其中 $\boldsymbol{a}^j$ 是 A 矩阵的第 j 列向量. $P_s(A)$即为非负凸组合.

以下设 $\boldsymbol{a}^j \neq \boldsymbol{0}$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 对 $P_s(A)$集合,不用多胞形表示定理,直接构造出一组基向量,使 $P_s(A)$可由这一组基向量表示,并且,这样的基向量组是唯一的.

定义 5.9.1 $P_s(A)$是非负凸组合,称一组向量 $\boldsymbol{x}^j$, $j = 1, 2, \cdots, k$ 是 $P_s(A)$的构造向量,如果对任一 $\boldsymbol{x} \in P_s(A)$, 都有一组非负实数 $s_j \geqslant 0$, $\sum_j s_j = 1$, 使

$$\boldsymbol{x} = \sum_j s_j \boldsymbol{x}^j \quad j = 1, 2, \cdots, k$$

成立,并且对 $\boldsymbol{x}^j$中的任意一个向量如 $\boldsymbol{x}^i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, 都至少有一个 $\boldsymbol{x}' \in P_s(A)$ 存在,有

$$\boldsymbol{x}' = \sum_{j=1}^{k} \alpha'_j \boldsymbol{x}^j \text{ and } \alpha'_t > 0 \quad 1 \leqslant t \leqslant k$$

即任一构造向量 $\boldsymbol{x}^j$都是"有用"的. ■

由 $P_s(A)$的定义,取 $\boldsymbol{x}^j = \boldsymbol{a}^j$, $j = 1, 2, \cdots, n$, 就是 $P_s(A)$的一个构造向量组. 所以,对任意的凸组合,构造向量组都是存在的. 当 $k = 1$, $P_s(A)$为单点集. 以下均设 $k > 1$.

但对于任一凸组合 $P_s(A)$来讲,构造向量组不是唯一的. 例如,在 R^2 中,有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

取

$$P_s(A) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = s_1\boldsymbol{x}^1 + s_2\boldsymbol{x}^2 \quad s_{1,2} \geqslant 0 \quad s_1 + s_2 = 1\}$$

再取

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \tilde{\boldsymbol{x}}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \tilde{\boldsymbol{x}}^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \tilde{\boldsymbol{x}}^3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

取

$$P_s(A') = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = s_1'\tilde{\boldsymbol{x}}^1 + s_2'\tilde{\boldsymbol{x}}^2 + s_3'\tilde{\boldsymbol{x}}^3 \quad s_{1,2,3}' \geqslant 0 \quad s_1' + s_2' + s_3' = 1\}$$

易见

$$P_s(A') = P_s(A)$$

因为任取

$$\boldsymbol{x} \in P_s(A')$$

有

$$\boldsymbol{x} = s_1'\tilde{\boldsymbol{x}}^1 + s_2'\tilde{\boldsymbol{x}}^2 + s_3'\tilde{\boldsymbol{x}}^3$$

且有

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^2 = \tilde{s}_1\boldsymbol{x}^1 + \tilde{s}_2\boldsymbol{x}^2 \quad \tilde{s}_{1,2} = \frac{1}{2} \quad \tilde{\boldsymbol{x}}^{1,3} = \boldsymbol{x}^{1,3}$$

所以又有

$$\boldsymbol{x} = (s_1' + s_2' \cdot \tilde{s}_1)\boldsymbol{x}^1 + (s_2' \cdot \tilde{s}_2 + s_3')\boldsymbol{x}^2$$

取

$$s_1 = s_1' + s_2' \cdot \tilde{s}_1 \quad s_2 = s_2' \cdot \tilde{s}_2 + s_3'$$

有

$$s_{1,2} \geqslant 0 \quad s_1 + s_2 = 1$$

且
$$\boldsymbol{x} = s_1\boldsymbol{x}^1 + s_2\boldsymbol{x}^2 \in P_s(A)$$

所以
$$P_s(A') \subseteq P_s(A)$$

反之，任取 $\boldsymbol{x} \in P_s(A)$，有 $s_1, s_2 \geqslant 0, s_1 + s_2 = 1$ 使

$$\boldsymbol{x} = s_1\boldsymbol{x}^1 + s_2\boldsymbol{x}^2$$

则由以上符号，作

$$s_1 = s_1' + s_2' \cdot \tilde{s}_1 \qquad s_2 = s_2' \cdot \tilde{s}_2 + s_3'$$

并取 s_2' 足够小，即

$$0 < s_2' \leqslant \min\left(\frac{s_1}{\tilde{s}_1}, \frac{s_2}{\tilde{s}_2}\right)$$

保证有

$$s_1' = s_1 - s_2' \cdot \tilde{s}_1 \geqslant 0 \quad s_3' = s_2 - s_2' \cdot \tilde{s}_2 \geqslant 0$$

$$s_1' + s_2' + s_3' = 1$$

$$\boldsymbol{x} = s_1' \tilde{\boldsymbol{x}}^1 + s_2' \tilde{\boldsymbol{x}}^2 + s_3' \tilde{\boldsymbol{x}}^3 \in P_s(A')$$

成立. 从而

$$P_s(A') \supseteq P_s(A)$$

即知
$$P_s(A') = P_s(A)$$

以上分析显然可以一般化并推广至任意维的 R^m 空间. 以上分析同时说明了,如果 $P_s(A)$ 的一组构造向量 $\boldsymbol{x}^j$, $j=1, 2, \cdots, k$ 中的某一个向量 $\boldsymbol{x}^{j'}$ 是可以由其他的 $\boldsymbol{x}^j$, $j=1, 2, \cdots, k$, $j \neq j'$ 向量的凸线性组合的方式表出,

$$\boldsymbol{x}^{j'} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq j'}}^{k} s_j^{j'} \boldsymbol{x}^j \qquad s_j^{j'} \geqslant 0 \qquad \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq j'}}^{k} \quad s_j^{j'} = 1$$

则去掉 $\boldsymbol{x}^{j'}$ 向量后的向量组 $\boldsymbol{x}^j$, $j=1, 2, \cdots, k$, $j \neq j'$, 依旧是 $P_s(A)$ 的一组构造向量. 所以,可以有

定义 5.9.2 称 $P_s(A)$ 的一组构造向量 $\boldsymbol{x}^j$, $j=1, 2, \cdots, k$ 为 $T_s(A)$ 的基向量组,如果 $\boldsymbol{x}^j$ 中的任一向量 $\boldsymbol{x}^{j'}$, $1 \leqslant j' \leqslant k$, 都不能由其他向量 $\boldsymbol{x}^j$, $j=1, 2, \cdots, k$, $j \neq j'$ 的凸线性组合表出. ■

这样,可以有推论:

推论 5.9.1 对任一非负凸组合 $P_s(A)$, 都存在唯一的一个基向量组 $\boldsymbol{x}^j$, $j=1, 2, \cdots, k$, 使对任一 $\boldsymbol{x} \in P_s(A)$, 成立,

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{k} s_j \boldsymbol{x}^j \quad s_j \geqslant 0 \quad \sum_{j=1}^{k} s_j = 1$$ ■

证明: $P_s(A)$ 中的基向量组是存在的. 由上已知 $P_s(A)$ 一定存在构造向量组 $\boldsymbol{x}^j$, $j=1, 2, \cdots, k$. 若向量组 $\boldsymbol{x}^j$ 中的任一个向量 $\boldsymbol{x}^{j'}$ 都不能由其他向量的凸线性组合表出,那么,这一构造向量组就是基向量组,否则,若 $\boldsymbol{x}^{j'}$ 可以由其他向量的凸线性组合表出,那么,就从 $\boldsymbol{x}^j$ 中剔除 $\boldsymbol{x}^{j'}$, 重新编上标号,可有构造向量组 $\boldsymbol{x}^j$, $j=1, 2, \cdots, k^1$, $k^1 = k-1$, 如此继续剔除这一新的构造向量组中可以由其他向量的凸线性组合表出的向量 $\boldsymbol{x}^{j'}$, 得到又一个新的构造向量组 $\boldsymbol{x}^j$, $j=1, 2, \cdots, k^2$, $k^2 = k-2$, …. 这个过程不能持续到 $k^t = 0$ $(k > t \geqslant 1)$, 因为 $P_s(A)$ 不可能没有构造向量存在,故最终总能在某个 $0 < k^t < k$ 的时候,得到 $\boldsymbol{x}^j$, $j=1, 2, \cdots, k^t$, 且 $\boldsymbol{x}^j$ 中的任一向量均不能由其他向量的凸线性组合表出,并由于 $\boldsymbol{x}^j$ 是 $P_s(A)$ 的构造向量,故这样得到 $\boldsymbol{x}^j$, $j=1, 2, \cdots, k^t$ 就是 $P_s(A)$ 的基向量组.

其次,由 $P_s(A)$ 的构造,取构造向量组 $A=[\boldsymbol{a}^1, \cdots, \boldsymbol{a}^n]$ 的列向量组作为

$$\boldsymbol{x}^j = \boldsymbol{a}^j \quad j=1, 2, \cdots, n$$

设 $\boldsymbol{x}^j$ 就是一个基向量组，否则利用以上方法可以在 $\boldsymbol{x}^j$ 中得到基向量组，并仍用“n”表示这一基向量组的向量个数. 现在假设 $P_s(A)$ 中还存在有另一个基向量组，记为

$$\boldsymbol{x}^i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k$$

那么，由基向量组的定义，对向量组 $\boldsymbol{a}^j$ 中的任一个，比如 $\boldsymbol{a}^1 \in P_s(A)$，有

$$\boldsymbol{a}^1 = \sum_{i=1}^{k} t_i \boldsymbol{x}^i \quad t_i \geqslant 0 \quad \sum_{i=1}^{k} t_i = 1$$

另一方面，亦有

$$\boldsymbol{x}^i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \boldsymbol{a}^j \quad s_{ij} \geqslant 0 \quad \sum_{j=1}^{n} s_{ij} = 1 \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k$$

从而，

$$\boldsymbol{a}^1 = \sum_{i=1}^{k} t_i \Big(\sum_{j=1}^{n} s_{ij} \boldsymbol{a}^j \Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{k} t_i s_{ij} \Big) \boldsymbol{a}^j = \sum_{i=1}^{k} t_i s_{i1} \boldsymbol{a}^1 + \sum_{j=2}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{k} t_i s_{ij} \Big) \boldsymbol{a}^j$$

所以有

$$\Big(1 - \sum_{i=1}^{k} t_i s_{i1} \Big) \boldsymbol{a}^1 = \sum_{j=2}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{k} t_i s_{ij} \Big) \boldsymbol{a}^j$$

再由所有 t_i、s_{ij} 的性质，以及 $\boldsymbol{a}^j$ 均为非负实向量的性质即知，必有

$$1 - \sum_{i=1}^{k} t_i s_{i1} \geqslant 0$$

因此，若

$$1 - \sum_{i=1}^{k} t_i s_{i1} > 0$$

可以有

$$\boldsymbol{a}^1 = \sum_{j=2}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{k} t_i s_{ij}}{1 - \sum_{i=1}^{k} t_i s_{i1}} \boldsymbol{a}^j = \sum_{j=2}^{n} s'_j \boldsymbol{a}^j$$

其中

$$s'_j = \frac{\sum_{i=1}^{k} t_i s_{ij}}{1 - \sum_{i=1}^{k} t_i s_{i1}} \geqslant 0$$

并且
$$\sum_{j=2}^{n} s'_j = \frac{\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{k} t_i s_{ij}) - \sum_{i=1}^{k} t_i s_{i1}}{1 - \sum_{i=1}^{k} t_i s_{i1}} = 1$$

这是因为有

$$\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{k} t_i s_{ij}) = \sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{n} t_i s_{ij}) = \sum_{i=1}^{k} t_i(\sum_{j=1}^{n} s_{ij}) = \sum_{i=1}^{k} t_i = 1$$

但这即表明 $\boldsymbol{a}^1$ 可以由 $\boldsymbol{a}^j$, $j = 2, 3, \cdots, n$ 向量组的凸线性组合表出，这与 $\boldsymbol{a}^j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ 是基向量组的假设矛盾. 故只能有

$$1 - \sum_{i=1}^{k} t_i s_{i1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} t_i s_{i1} = 1$$

但这即意味着

$$\sum_{i=1}^{k} t_i s_{ij} = 0 \quad j = 2, 3, \cdots, n$$

这样一组关系中一定成立有 $i = i_1$, $1 \leqslant i_1 \leqslant k$ 这样的下标使

$$\begin{cases} t_{i_1} s_{i_1 1} = 1 \Rightarrow t_{i_1} = 1,\ s_{i_1 1} = 1 \\ t_i = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, k \quad i \neq i_1 \\ s_{i_1 j} = 0 \quad j = 2, 3, \cdots, n \end{cases}$$

所以必只能有

$$\boldsymbol{a}^1 = \boldsymbol{x}^{i_1}$$

成立. 同理可证，也必然要有

$$\boldsymbol{a}^j = \boldsymbol{x}^{i_j} \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

成立. 此即表明向量组

$$\boldsymbol{x}^i,\ i = 1, 2, \cdots, k$$

一定有 $k \geqslant n$.

若 $k = n$，则由上即知 $\boldsymbol{x}^i$ 重新编上标号后就是 $\boldsymbol{a}^j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ 向量组，若 $k > n$，则对于 $\boldsymbol{x}^i$ 中的 $1 \leqslant i \leqslant k$, $i \neq i_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ 的任一 $\boldsymbol{x}^i$，都可有

$$\boldsymbol{x}^i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\boldsymbol{a}^j = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\boldsymbol{x}^{i_j} \quad s_{ij} \geqslant 0 \quad \sum_{j=1}^{n} s_{ij} = 1$$

成立，故 $\boldsymbol{x}^i$, $i = 1, 2, \cdots, k > n$ 就不可能是 $P_s(A)$ 的基向量组.

所以，$P_s(A)$ 的基向量组是唯一的，并可由矩阵 A 的列向量组确定.

从几何上讲，$P_s(A)$ 的基向量组就是构成它的全部的顶点(坐标)的向量组. 容易理解的另一点是，如果把由基向量组 x^j，$j=1, 2, \cdots, n$ 构造的 $P_s(A)$ 具体写成

$$P_s(A) = P_s(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

那么，任取 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 中的一个子序列 $x^{j_1}, x^{j_2}, \cdots, x^{j_k}$，$1 \leqslant k < n$ 都有

$$P_s(x^{j_1}, x^{j_2}, \cdots, x^{j_k}) \subset P_s(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

因此，如果将任一 $x \in R^m$ 向量能够被一组向量 x^j，$j=1, 2, \cdots, n$ 以凸线性组合的方式表出，称为 x 与 x^j 向量组存在**凸线性相关**，那么，我们就可以说，$P_s(A)$ 中的基向量组 x^j，$j=1, 2, \cdots, n$ 是 $P_s(A)$ 中的**极大凸线性无关向量组**，基向量组 x^j 的个数 n 是 $P_s(A)$ 的**凸秩**. 由以上的分析，凸秩即等于顶点的个数. 在 R^3 空间中，$P_s(A)$ 表现为凸多面体. 由著名的 Euler 定理，

$$V = F - E + 2$$

其中 V—顶点数，F—多面体的面的个数，E—棱的个数. 这里 V 即是 R_3 中的 $P_s(A)$ 的凸秩.

在这样的表述中，"凸线性相关"、"凸秩" 的含义与传统的线性代数中的"线性相关"、"秩" 的含义有相似之处，但在以下一点上存在区别. 即一般地说，$P_s(A)$ 是 R^m 空间的凸组合，凸秩为 n，x^j，$j=1, 2, \cdots, n$ 为基向量，则对任一 $x \in P_s(A)$，有

$$x = \sum_{j=1}^{n} s_j x^j \quad s_j \geqslant 0 \quad \sum_{j=1}^{n} s_j = 1$$

但是，这种表示形式一般不是唯一的. 例如，取

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad x^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x^3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x^4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

作 $P_s(A) = \left\{ x \mid x = s_1 x^1 + s_2 x^2 + s_3 x^3 + s_4 x^4,\ s_{1,2,3,4} \geqslant 0 \quad \sum_j^4 s_j = 1 \right\}$

取 $x = \left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right)^{\mathrm{T}} \in P_s(A)$ 则可以有

$$s^1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{12}\right)^{\mathrm{T}} \quad s^2 = \left(\frac{7}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, 0\right)^{\mathrm{T}}$$

都可以有

$$x = As^1 \quad x = As^2$$

成立.

几何上点 $\boldsymbol{x}$ 与顶点 $\boldsymbol{x}^{1,2,3,4}$ 的关系如图 5.9.1. 一般地,因 $\boldsymbol{x}\in R^m$,设 $\boldsymbol{e}_i$, $i=1, 2, \cdots, m$ 是 R^m 空间的标准基向量,

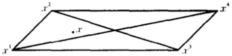


图 5.9.1

$$\boldsymbol{e}_i=(0,\cdots,0,\underset{\text{第}i\text{行}}{1},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

对任一 $\boldsymbol{x}\in P_s(A)$,一方面有

$$\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{n}s_j\boldsymbol{x}^j \quad s_j\geqslant 0 \quad \sum_{j=1}^{n}s_j=1$$

另一方面又有

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{m}t_i\boldsymbol{e}_i$$

同样,对 $\boldsymbol{x}^j$, $j=1, 2, \cdots, n$ 亦有

$$\boldsymbol{x}^j=\sum_{i=1}^{m}t_{ij}\boldsymbol{e}_i$$

这里的 t_i, t_{ij} 都是实数,并且在 $\boldsymbol{e}_i$ 基向量组下,t_i, t_{ij} 都是唯一的.

因此,由

$$\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{n}s_j\Big(\sum_{i=1}^{m}t_{ij}\boldsymbol{e}_i\Big)=\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}t_{ij}s_j\Big)\boldsymbol{e}_i$$

得到

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}t_{ij}s_j=t_i \quad i=1, 2, \cdots, m\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}s_j \quad\ =1\end{cases}$$

方程组成立.要使这一方程组有唯一解 s_j, $j=1, 2, \cdots, n$ 的充要条件即是其系数矩阵($(m+1)\times n$ 阶矩阵)

$$\begin{bmatrix}t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n}\\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn}\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

是满秩的. 故必应有

$$n = m + 1$$

并且用(−1)乘此矩阵的第 n 列向量再分别加到前 $n-1$ 个列向量后的矩阵行列式

$$\begin{vmatrix} t_{11}-t_{1n}, & t_{12}-t_{1n}, & \cdots, & t_{1(n-1)}-t_{1n}, & t_{1n} \\ t_{21}-t_{2n}, & t_{22}-t_{2n}, & \cdots, & t_{2(n-1)}-t_{2n}, & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{m1}-t_{mn}, & t_{m2}-t_{mn}, & \cdots, & t_{m(n-1)}-t_{mn}, & t_{mn} \\ 0, & 0, & \cdots, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} t_{11}-t_{1n}, & t_{12}-t_{1n}, & \cdots, & t_{1(n-1)}-t_{1n} \\ t_{21}-t_{2n}, & t_{22}-t_{2n}, & \cdots, & t_{2(n-1)}-t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{m1}-t_{mn}, & t_{m2}-t_{mn}, & \cdots, & t_{m(n-1)}-t_{mn} \end{vmatrix} \neq 0$$

而这即等价于说 $\boldsymbol{x}^j$, $j=1, 2, \cdots, n$ 个 $P_s(A)$ 的基向量,存在以下关系,

(1) $n = m + 1$

(2) $\boldsymbol{x}^1-\boldsymbol{x}^n$, $\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}^n$, $\cdots$, $\boldsymbol{x}^{n-1}-\boldsymbol{x}^n$ 向量组是线性无关的. 易见,以这样的一组基向量 $\boldsymbol{x}^j$, $j=1, 2, \cdots, n$ 所构造出来的凸线性组合 $P_s(A)$,只能是 R^m 空间中的单纯形. 所以,可以知道,当且仅当 $P_s(A)$ 是 R^m 空间上的单纯形时,$\boldsymbol{x}\in P_s(A)$,

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} s_j x^j \quad s_j \geqslant 0 \quad \sum_j s_j = 1$$

的形式才是唯一的. 当 $P_s(A)$ 是 R^m 空间上的单纯复形时,这一表出形式不是唯一的. 如图 5.9.1 中的 $\boldsymbol{x}$ 点可以作为 $\boldsymbol{x}^{1,2,4}$ 顶点组成的三角形(单纯形)的内点由 $\boldsymbol{x}^1$、$\boldsymbol{x}^2$、$\boldsymbol{x}^4$ 顶点表出,但也可以看作是三角形 $\boldsymbol{x}^{1,2,3}$ 的内点,由 $\boldsymbol{x}^1$、$\boldsymbol{x}^2$、$\boldsymbol{x}^3$ 顶点的凸线性组合表出.

最后,将推论 5.9.1 推广至一般的凸组合 $P_s(A)$. 对于一般的 $P_s(A)$,其构造向量组 $\boldsymbol{x}^j$, $j=1, 2, \cdots, k$ 中的任一向量 $\boldsymbol{x}^j$ 不一定是非负的,但可以对 $P_s(A)$ 作平移变换,取

$$M \geqslant \max_j(|\min_i(x_i^j)|) \quad i=1, 2, \cdots, m \quad j=1, 2, \cdots, n$$

其中 x_i^j 指 $\boldsymbol{x}^j$ 的第 i 个分量. 则对任一 $\boldsymbol{x}\in P_s(A)$

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{M} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{M} = (M, M, \cdots, M)^{\mathrm{T}}$$

成立,故若记

$$P_s^+(A) = \{\boldsymbol{x}' \mid \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{M},\ \boldsymbol{x} \in P_s(A)\}$$

则 $P_s^+(A)$ 是非负的，且 $\boldsymbol{x}'^j = \boldsymbol{x}^j + \boldsymbol{M} \geqslant \boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{x}'^j$ 是 $P_s^+(A)$ 的构造向量组. 可知推论 5.9.1 对 $P_s^+(A)$ 成立. 再由平移变换的性质易知，推论 5.9.1 对一般的 $P_s(A)$ 凸组合也是成立的.

补充：凸组合决定的极大锥. 任意一个凸组合 $P_s(A)$，其顶点 $\boldsymbol{x}^j$，$j = 1, 2, \cdots, n$ 中，可能存在有这样的 $\boldsymbol{x}^k$ 顶点，使

$$\boldsymbol{x}^k = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} t_j \boldsymbol{x}^j \quad t_j \geqslant 0 \quad \sum_j t_j \neq 1$$

即顶点 $\boldsymbol{x}^k$ 可以由其他顶点的正线性组合表示(注意 $\boldsymbol{x}^k$ 不能由其他顶点以凸组合方式表出). 将这样的顶点 $\boldsymbol{x}^k$ 全部剔除. 记余下的顶点为 $\tilde{\boldsymbol{x}}^1, \tilde{\boldsymbol{x}}^2, \cdots, \tilde{\boldsymbol{x}}^h$，$1 \leqslant h \leqslant n$，且 $\tilde{\boldsymbol{x}}^j$ 是线性无关向量组，则称，

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{h} t_j \tilde{\boldsymbol{x}}^j \quad t_j \geqslant 0 \qquad \text{—(5.9.2)}$$

决定的 $\boldsymbol{x}$ 的全体组成的集合为凸组合 $P_s(A)$ 决定的极大锥. 若记

$$P_h(A) = \left\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{h} t_j \tilde{\boldsymbol{x}}^j\right\} \qquad \text{—(5.9.3)}$$

则总有

$$P_s(A) \subset P_h(A)$$

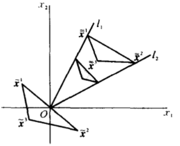


图 5.9.2

不是任何凸组合 $P_s(A)$ 都有对应的极大锥存在. 图 5.9.2 中由顶点 $\tilde{\boldsymbol{x}}^{1,2,3}$ 组成的凸组合没有以上(5.9.2)式决定的极大锥，因为向量 $\tilde{\boldsymbol{x}}^1$、$\tilde{\boldsymbol{x}}^2$ 是线性相关的. 由顶点 $\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}^{1,2,3}$ 组成的凸组合中 $\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}^3$ 可由 $\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}^{1,2}$ 的正线性组合表出，$\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}^{1,2}$ 是线性无关的，故，由原点出发且过 $\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}^{1,2}$ 的射线 $l_{1,2}$ 即夹成凸组合 $\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}^{1,2,3}$ 的极大锥. 容易理解，(无穷多个)不同的凸组合可以决定相同的极大锥. 如上图中用阴影区域表示的那个凸组合也可决定由射线 $l_{1,2}$ 所夹成的闭锥.

§5.10 附录：Farkas 引理的说明

Farkas 引理在正法锥及非线性规划中都有重要的作用. 因此，应当再给予

更多的讨论.

以下分析中的各符号在意义上与上文所引的 Farkas 引理中的规定相同.

Farkas 引理可以理解为,若 m 维向量 $\boldsymbol{b}$ 是使所有的 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 成立的 $\boldsymbol{x}$,有 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0$ 的向量,那么,该引理仅仅是断言以下方程组一定有解,

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{b} \\ \quad \boldsymbol{\rho} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad \text{---}(5.10.1)$$

由于

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} \geqslant 0 \quad \text{且 } A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

故取到 $\boldsymbol{\rho} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的 n 维向量是一定可以的.在这个意义上,Farkas 引理的结论是成立的.

应注意 Farkas 引理的结论仅在矩阵 A 是 $m \times m$ 阶可逆矩阵时,才具有唯一性,当矩阵 A 不可逆时,其结论不具有唯一性,并且,以上所指的 $\boldsymbol{b}$ 向量也可能由

$$\boldsymbol{b} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}$$

且 $\boldsymbol{\rho}$ 的分量中含有负数来构造.

例 5.10.1 取矩阵 A 如下

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

先给出

$$A\boldsymbol{x} \geqslant 0$$

的解.现在 A 矩阵的第 1、第 2 行向量 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}$ 是负线性相关的.

$$\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}$$

所以,

$$A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$$

是矛盾方程组.即

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

其实只能是

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 \\ \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 \\ \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \end{cases}$$

的形式. 这个方程组的解是

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -\frac{14}{15} \\ -1 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} u \quad z \in R \quad u \geqslant 0$$

因此可知

$$R(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{13}{15} \end{bmatrix} u \quad u \geqslant 0$$

再作 $\boldsymbol{b} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}$,有

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{13}{15} \end{bmatrix} u = \frac{13}{15}\rho_3 u \quad u \geqslant 0$$

故任取 $\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \quad \rho_1, \rho_2 < 0, \rho_3 \geqslant 0$,作 $\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}$,就总有对所有使 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的 $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0$ 成立.

例 5.10.2 取矩阵 A 如下

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

现 A 矩阵的行向量间有正线性相关性,

$$\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} + 2 \cdot \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}$$

成立.

现在 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的解是

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} \quad z \in R \quad \boldsymbol{v} \in R_+^2$$

由此可知 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的值域是

$$R(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 3 \\ 14 & 6 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} \in R_+^2$$

作 $\boldsymbol{b}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}$，则

要使 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant 0$ 成立，有

$$\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}14 & 0\\ 0 & 3\\ 14 & 6\end{bmatrix}\boldsymbol{v}\geqslant 0\quad \boldsymbol{v}\geqslant \boldsymbol{0}$$

即应要求（简化后），

$$\begin{cases}\rho_1 \quad\quad + \ \rho_3\geqslant 0\\ \quad\quad \rho_2+2\rho_3\geqslant 0\end{cases}$$

此不等式组的解是

$$\boldsymbol{\rho}=\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\quad t\in R\quad \boldsymbol{u}\in R_{+}^{2}$$

显然，易取到含有负数分量的 $\boldsymbol{\rho}$，如取 $t=1$，$\boldsymbol{u}=(1,\ 1)^{\mathrm{T}}$. 得

$$\boldsymbol{\rho}=\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 4\end{bmatrix}\quad \text{且得}\quad \boldsymbol{b}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}=\begin{bmatrix}12\\ -18\\ 12\end{bmatrix}$$

并有

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=84u_1+18u_2\geqslant 0$$

但由 Farkas 引理，即便是由含有负数分量的 $\boldsymbol{\rho}$ 向量所构造出来的上述 $\boldsymbol{b}$ 向量，也总能够由另一个非负的向量 $\boldsymbol{\rho}'$ 使 $\boldsymbol{b}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}'$. 例如对于例 5.10.2 中的 $\boldsymbol{b}$ 向量，可解以下方程组

$$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}'=\begin{bmatrix}12\\ -18\\ 12\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{\rho}'\geqslant \boldsymbol{0}$$

这一方程组的解是

$$\boldsymbol{\rho}'=\begin{bmatrix}6\\ 6\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}t\quad 0\leqslant t\leqslant 3$$

从而有无穷个 $\boldsymbol{\rho}'\geqslant \boldsymbol{0}$ 可以同样构造出 $\boldsymbol{b}$ 向量.

由以上 $\boldsymbol{\rho}'$ 的解的构造，令 $t=0$、$t=3$，得到

$$\boldsymbol{\rho}'_1=\begin{bmatrix}6\\6\\0\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{\rho}'_2=\begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix}$$

注意 $\boldsymbol{\rho}'_{1,2}$ 表示以上给出的 $\boldsymbol{b}$ 可由

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}=6\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}+6\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}$$

或

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}=3\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}+3\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}$$

表出（$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}$ 是 A 的第 i 行向量），并且 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}$ 以及 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}$ 都是矩阵 A 的极大线性无关（行）向量组.

一般地确实可以得到这样的结论，即若有 $\boldsymbol{\rho}\geqslant\boldsymbol{0}$，构造

$$\boldsymbol{b}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}$$

则总可以在 A 中找到（至少）一个极大线性无关行向量组 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}$，$i=1,2,\cdots,k$，$k=\operatorname{rank}A$，并有一组不全为 0 的实数 $t_i\geqslant 0$，使

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}=\sum_i^k t_i\cdot\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}$$

对这个结论可以通过类似以上示例那样地求解等式—不等式方程组的过程予以证明，但此处不予展开. 在下一章关于非线性规划中的 Lagrange 乘子向量的基向量组的分析中会给出更详尽的解释. 这里仅结合例 5.10.1 对此结论给予一个几何上的说明.

在例 5.10.1 的矩阵 A 中，其解空间是 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$（或 $\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$）决定的平面上的在 $\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}$ 向量所指向的那一侧的半平面. 构造与此半平面正交的 Ots 截平面坐标系，在此坐标系上有图 5.10.1.

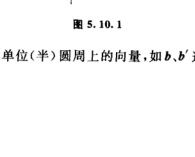


图 5.10.1

$l_{1,2,3}$ 是 $\boldsymbol{a}_{1,2,3}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 决定的平面与 Ots 平面的交线，B 是 $l_{1,2}$ 与 l_3 的交点. $\nabla a_{1,2,3}$ 是法向量 $\boldsymbol{a}_{1,2,3}^{\mathrm{T}}$ 决定的方向向量. 例 5.10.1 的解 $\boldsymbol{x}$ 是从 B 点出发与 $l_{1,2}$ 直线重合的（单位）方向向量. 则与 $\boldsymbol{x}$ 的夹角成锐角的（单位）向量 $\boldsymbol{b}$ 只能是从 B 点出发且终点落在图中单位（半）圆周上的向量，如 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{b}'$ 这

样的向量. 显然, $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_3$ 的正线性组合表出, $\boldsymbol{b}'$ 则可由 $\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$ 的正线性组合表出. 总之, 凡是与 $\boldsymbol{x}$ 的夹角成锐角的向量 $\boldsymbol{b}$ 总能由 A 中的某个线性无关极大(行)向量组的正线性组合表出[1].

Farkas 引理的加强. 符号意义不变, 考虑有向量 $\boldsymbol{b}$, 并对所有满足 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 且 $A\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 的 $\boldsymbol{x}$ 成立 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$ 的充要条件.

由以上的分析, 因 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ 向量总能由 A 中的某个极大线性无关(行) 向量组 $\boldsymbol{a}_{i_j}^{\mathrm{T}}$, $j = 1, 2, \cdots, k$, $k = \operatorname{rank} A$ 以非负线性组合的方式表出, 故应有

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^{k} t_j \boldsymbol{a}_{i_j}^{\mathrm{T}} \quad t_j \geqslant 0$$

因此, 当存在 $t_j > 0$, $j = 1, 2, \cdots, k$, 且

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^{k} t_j \boldsymbol{a}_{i_j}^{\mathrm{T}} \quad t_j > 0 \qquad \text{—(5.10.2)}$$

便可有对于所有满足 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 且 $A\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 的 $\boldsymbol{x}$ 成立

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$$

因为有 $A\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 且 $\boldsymbol{a}_{i_j}^{\mathrm{T}}$ 是 A 的极大线性无关(行) 向量组, 故 $\boldsymbol{a}_{i_j}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 乘积不能全为 0, 则由以上条件(5.10.2) 式, 即知

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$$

可有

(加强的)Farkas 引理(Ⅰ)

设 A 是给定的 $n \times m$ 阶实矩阵, $\boldsymbol{b}$ 是给定的 m 维向量, 对所有满足 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 且 $A\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 的 $\boldsymbol{x}$ 成立 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$ 的充要条件是存在 k 维向量 $\boldsymbol{\rho} > \boldsymbol{0}$, $\operatorname{rank} A = k$, 并对 A 中的一组极大线性无关(行) 向量组 $\boldsymbol{a}_{i_j}^{\mathrm{T}}$, 成立

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^{k} \rho_j \boldsymbol{a}_{i_j}^{\mathrm{T}} \qquad \text{—(5.10.3)}$$

■

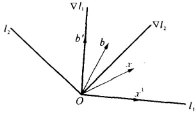


图 5.10.2

由图 5.10.2 可理解以上条件的必要性, 图 5.10.2 中, 法方向为 $\nabla l_{1,2}$ 的直线 l_1, l_2 以 O 点为顶点, 夹成锥. 这一个锥即为 $\nabla l_{1,2}\boldsymbol{x} \geqslant 0$ 不等式方程组的解空间. 当 $\boldsymbol{b}$ 可由 ∇l_1, ∇l_2 的正线性组合表示时, 如图, $\boldsymbol{b}$ 应

[1] 由此图也可说明, 与 $\boldsymbol{x}$ 夹角成锐角的向量 $\boldsymbol{b}$, 也可由

$$\boldsymbol{b} = t_2\boldsymbol{a}_2 + t_3\boldsymbol{a}_3 \quad t_2 < 0 \quad t_3 > 0$$

的方式表出, $\boldsymbol{b}'$ 也类似.

位于∇l_1、∇l_2所夹的锥(即正法锥)内,这样的$\boldsymbol{b}$可使任意的属于l_1、l_2所夹闭锥的$\boldsymbol{x}$向量成立$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$. 但若

$$\boldsymbol{b}=t_1\nabla l_1+t_2\nabla l_2$$

中的线性相关系数t_1、t_2不全是正数,比如$t_2=0$,如图中的$\boldsymbol{b}'$向量,那么,由于∇l_1与l_1正交,故在l_1上的向量$\boldsymbol{x}^1$,便有$\boldsymbol{b}'\boldsymbol{x}^1=0$. 所以要使$\boldsymbol{b}$对任一属于$l_{1,2}$射线所夹成的闭锥的$\boldsymbol{x}$向量成立$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$,$t_1$,$t_2$系数必须严格大于0.

还可以得到

(加强的)**Farkas 引理**(Ⅱ):(符号意义同上)对所有满足$A\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}$的$\boldsymbol{x}$成立$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$的充要条件是存在$k$维向量$\boldsymbol{\rho}\geqslant\boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{\rho}\neq\boldsymbol{0}$),$k=\operatorname{rank}A$,并对$A$中的一个极大线性无关(行)向量组$\boldsymbol{a}_{i_j}^{\mathrm{T}}$,成立(5.10.3)式. ■

加强的 Farkas 引理在非线性规划中有应用. 由上可见在(5.10.3)成立时,要求对$\boldsymbol{x}\in P(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})$,有

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0\Leftrightarrow\begin{cases}A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\rho}>\boldsymbol{0}\end{cases}\text{ or }\begin{cases}A\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\rho}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}\quad(\text{其中 }\boldsymbol{b}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho})$$

这即表明构造$\boldsymbol{b}$的向量$\boldsymbol{\rho}$,在$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$条件下,$\boldsymbol{\rho}$是否为严格大于0的向量与值域$R(A\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0})$是否严格大于0的性质有关.

§ 6 Kuhn - Tucker 条件解析

——非线性规划中的多重约束 Hessian 矩阵

§ 6.1 Kuhn - Tucker 条件的描述

对于一般的非线性规划问题，

(P)：

$$\min \quad f(\boldsymbol{x})$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} g_i(\boldsymbol{x}) \geqslant 0 & i = 1, 2, \cdots, k \\ h_j(\boldsymbol{x}) = 0 & j = 1, 2, \cdots, p \end{cases}$$

构造 Lagrange 函数

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{k} \omega_i g_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{p} \zeta_j h_j(\boldsymbol{x}) \qquad —(6.1.1)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$、$\boldsymbol{\zeta}$ 为 Lagrange 乘子(向量).

使用以下符号：

D——二阶可微函数 $f(\boldsymbol{x})$、$g_i(\boldsymbol{x})$、$h_j(\boldsymbol{x})$的定义域，$D \subset R^m$.

X——规划问题(P)的可行集合.

$$X = \{\boldsymbol{x} \mid g_i(\boldsymbol{x}) \geqslant 0,\ h_j(\boldsymbol{x}) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, k,\ j = 1, 2, \cdots, p,\ \boldsymbol{x} \in D\}$$

可行集合通常就是“可行区域”(见下节定义 6.2.1).

$\boldsymbol{x}^0$——(待检验的)局部极小值点，$\boldsymbol{x}^0 \in X$.

$I(\boldsymbol{x}^0)$——下标集合. $I(\boldsymbol{x}^0) = \{i \mid g_i(\boldsymbol{x}^0) = 0,\ i = 1, 2, \cdots k\}$，$\boldsymbol{x}^0 \in X$.

$N_\delta(\boldsymbol{x}^0)$——$\boldsymbol{x}^0$ 的邻域，$N_\delta(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\| \leqslant \delta,\ \delta > 0,\ \boldsymbol{x} \in R^m\}$

一般地邻域 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0)$如上所示是取为闭邻域的形式，但按需要也可以取成开邻域的形式.

$\boldsymbol{z}$——$\boldsymbol{x}^0$ 点处的能行方向向量，$\boldsymbol{z} \in R^m$. $\boldsymbol{z}$ 是满足以下条件的向量，即若有 $\delta > 0$，使

$$\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{z} \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X$$

则对于任一个 $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\delta}{\|z\|}$，都有

$$x^0 + \theta z \in N_\delta(x^0) \cap X$$

$Z^1(x^0)$——X 在 x^0 处的线性化锥.

$$Z^1(x^0) = \{z \mid \nabla g^T(x^0) z \geqslant 0,\ i \in I(x^0),\ \nabla h_j^T(x^0) z = 0,\ j = 1, 2, \cdots, p\}$$

$S(X, x^0)$——X 在 x^0 处的闭切锥

$$S(X, x^0) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \widetilde{S}(X \cap N_{\frac{1}{k}}(x^0), x^0)$$

其中 $\widetilde{S}(X \cap N_{\frac{1}{k}}(x^0), x^0)$ 是包含集合 $\{a - x^0 \mid a \in X\}$ 的所有闭锥的交集.

定义 6.1.1 $A \subset R^m$ 是一个集合，用记号 A' 表示 A 的正法向锥.

$$A' = \{x \mid x^T y \geqslant 0, \text{对所有的 } y \in A\}$$ ■

定义 6.1.2 （局部极小值点）. 若在 x^0 处存在正实数 $\delta > 0$，使对所有的 $x \in N_\delta(x^0) \cap X$ 成立

$$f(x) \geqslant f(x^0)$$

则称 x^0 为规划(P)的（弱）局部极小值点. 如果对所有这样的 x 成立

$$f(x) > f(x^0)$$

则称 x^0 是(P)的严格局部极小值点. ■

在以上符号规定下，有关规划(P)的局部极小值点的主要定理为以下三个

广义 Kuhn－Tucker 条件（一阶最优条件）：

令 x^0 是规划(P)的局部极小值点，并设

$$(Z^1(x^0))' = (S(X, x^0))' \qquad \text{—(6.1.2)}$$

则存在向量 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k)^T$，$\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_p)^T$，使得

$$\left.\begin{aligned} & \nabla f(x^0) - \sum_{i=1}^{k} \omega_i \nabla g_i(x^0) - \sum_{j=1}^{p} \zeta_j \nabla h_j(x^0) = \mathbf{0} \\ & \omega_i g_i(x^0) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, k \\ & \omega_i \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{—(6.1.3)}$$ ■

以下记

$$\nabla_x L(x^0, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}) = \nabla f(x^0) - \sum_{i=1}^{k} \omega_i \nabla g_i(x^0) - \sum_{j=1}^{p} \zeta_j \nabla h_j(x^0)$$

由于当

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) = S(X, \boldsymbol{x}^0) \Rightarrow (Z^1(\boldsymbol{x}^0))' = (S(X, \boldsymbol{x}^0))'$$

故以下将

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) = S(X, \boldsymbol{x}^0) \qquad \text{—(6.1.4)}$$

取为一阶约束品性.

再使用以下符号规定

$$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{z} \mid \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = 0,\ i \in I(\boldsymbol{x}^0),\ \nabla h_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = 0,\ j = 1, 2, \cdots, p\} \qquad \text{—(6.1.5)}$$

$$\hat{I}(\boldsymbol{x}^0) = \{i_k \mid g_{i_k}(\boldsymbol{x}^0) = 0,\ i_k \in I(\boldsymbol{x}^0),\ \text{且}\ \omega_{i_k} > 0\} \qquad \text{—(6.1.6)}$$

其中 ω_{i_k} 是一阶最优条件中的乘子. $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0) \subseteq I(\boldsymbol{x}^0)$.

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{z} \mid \nabla g_{i_k}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = 0,\ i_k \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0),\ \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant 0,\ i \in I(\boldsymbol{x}^0),\ i \neq i_k,$$
$$\nabla h_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = 0,\ j = 1, 2, \cdots, p\} \qquad \text{—(6.1.7)}$$ [1]

定义 6.1.3 如果每个非 0 的 $\boldsymbol{z} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 与包含于 X 的边界中的一条二次可微弧相切,则称 $\boldsymbol{x}^0 \in X$ 处满足**二阶约束品性**(A)[2]. ■

二阶(必要)最优条件

设 $\boldsymbol{x}^0$ 是规划(P)的局部极小值点,并设一阶最优条件成立,并且在 $\boldsymbol{x}^0$ 处二阶约束品性(A)成立,则对 $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{z} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$, 有

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}[\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) - \sum_{i=1}^{k}\omega_i \nabla^2 g_i(\boldsymbol{x}^0) - \sum_{j=1}^{p}\xi_j \nabla^2 h_j(\boldsymbol{x}^0)]\boldsymbol{z} \geqslant 0 \qquad \text{—(6.1.8)}$$

■

以下记

$$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}) = \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) - \sum_{i=1}^{k}\omega_i \nabla^2 g_i(\boldsymbol{x}^0) - \sum_{j=1}^{p}\zeta_j \nabla^2 h_j(\boldsymbol{x}^0)$$

严格局部极小值点的充分条件

设 $\boldsymbol{x}^0 \in X$, 若存在向量 $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\zeta}$,满足

---

[1] 为了更为清晰地表述 $\hat{\hat{Z}}^1(x^0)$ 集合,这里特意加入了"$i \neq i_k$"的条件. 这样处理的意义在下文中可以看到.

[2] 详见下文.

$$\left.\begin{aligned}&\nabla f(\boldsymbol{x}^0)-\sum_{i=1}^{k}\omega_i\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)-\sum_{j=1}^{p}\zeta_j\nabla h_j(\boldsymbol{x}^0)=\boldsymbol{0}\\&\omega_i g_i(\boldsymbol{x}^0)=0\quad i=1,2,\cdots,k\\&\omega_i\geqslant 0\end{aligned}\right\}\quad\text{—(6.1.3)}$$

且对于每个 $\boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{z}\in\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$，有

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}[\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)-\sum_{i=1}^{k}\omega_i\nabla^2 g(\boldsymbol{x}^0)-\sum_{j=1}^{p}\zeta_j\nabla^2 h_j(\boldsymbol{x}^0)]\boldsymbol{z}>0\quad\text{—(6.1.9)}$$

则 $\boldsymbol{x}^0$ 是规划(P)的严格局部极小值点[1]. ■

以上这 3 个条件和一、二阶约束品性即为非线性规划中的基础定理.在这些条件及约束品性中，存在一些尚需进一步澄清的问题，例如一阶约束品性的几何意义、二阶最优条件为什么只是“必要条件”，而在二阶条件的实际运用上，还需要给出$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合的构造，即要解出以下等式—不等式混合方程组

$$\begin{cases}\nabla g_{i_k}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}=0 & i_k\in\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)\\\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}\geqslant 0 & i\in I(\boldsymbol{x}^0)-\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)\\\nabla h_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}=0 & j=1,2,\cdots,p\end{cases}\quad\text{—(6.1.10)}$$

在不给出(6.1.10)的解的情况下，只能对一些简单的非线性规划问题才能运用充分条件.当然，现在我们可以利用上一章关于线性不等式方程组的解的方法，得到(6.1.10)式的解.但这三个定理中仍存在一些含混之处.

注意，在二阶(必要)最优条件中的(6.1.8)式在形式上接近于(6.1.9)式.区别仅在于(6.1.8)式是弱不等式而(6.1.9)式是严格不等式，其次(6.1.8)式中的向量 $\boldsymbol{z}$ 遍取$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合，而(6.1.9)式中的向量 $\boldsymbol{z}$ 则是遍取$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合.

比较$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合与$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合可知，$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合由以下等式方程组的解空间构造：

$$\begin{cases}\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}=0 & i\in I(\boldsymbol{x}^0)\\\nabla h_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}=0 & j=1,2,\cdots,p\end{cases}\quad\text{—(6.1.11)}$$

很显然，仅仅当 $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)\neq I(\boldsymbol{x}^0)$ 时，(6.1.11)式与(6.1.10)式才在形式上有所区别.换句话讲，当 $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)=I(\boldsymbol{x}^0)$ 时，$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)=\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$. 而当 $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)\subset I(\boldsymbol{x}^0)$ 时，形式上才有$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)\subset\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$. 因此二阶(必要)条件与(严格)局部极小值点的充

[1] 以上内容引自《非线性规划》上册，M. Avriel，第 3 章.符号及个别地方有所改动.关于这三个定理的证明，可见所引书章.

要条件的实质性区别仅在 $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0) \subset I(\boldsymbol{x}^0)$ 时才有意义[1]. 但这样一来，就出现了为什么在 $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0) = I(\boldsymbol{x}^0)$ 时原本上是必要条件的二阶最优条件同时又成了充分条件就应给予说明. 换句话说，所谓的"二阶(必要)最优条件"之所以只是必要条件而非充要条件的缘由尚有待说明.

其次，决定 $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$ 集合的是 $\boldsymbol{\omega} \geqslant \boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{\omega} \neq \boldsymbol{0}$ 的 Lagrange 乘子向量. 但 $\boldsymbol{\omega}$ 乘子是否是唯一的? 如果 $\boldsymbol{\omega}$ 不是唯一的(那么，$\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$ 也就不是唯一的)，则如果 $\boldsymbol{\omega}^1$、$\boldsymbol{\omega}^2$ 都是问题(P)的同一个局部极小值点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的(不同的)乘子，$\boldsymbol{\omega}^1$、$\boldsymbol{\omega}^2$ 的区别或说是几何意义上的区别究竟在哪里? 下面将会给出 2 个 $\boldsymbol{\omega}$ 乘子不唯一的实例.

例 6.1.1

$$\min \quad f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 3)^2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = 8 - x_1^2 - x_2^2 \geqslant 0 \\ g_2(\boldsymbol{x}) = 10 - 4x_1 - x_2 \geqslant 0 \\ g_3(\boldsymbol{x}) = 8 - x_1 - 3x_2 \geqslant 0 \\ g_{4,5,6}(\boldsymbol{x}) = x_{1,2,3} \geqslant 0 \end{cases}$$

构造 Lagrange 函数

$$L = f(\boldsymbol{x}) - \omega_1 g_1(\boldsymbol{x}) - \omega_2 g_2(\boldsymbol{x}) - \omega_3 g_3(\boldsymbol{x}) - \omega_4 x_1 - \omega_5 x_2 - \omega_6 x_3$$

由一阶最优条件

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad \begin{cases} \omega_j \geqslant 0 \\ \omega_j g_j(\boldsymbol{x}) = 0 \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{cases}$$

并取 $x_i > 0$, $\Rightarrow \omega_j = 0$, $i = 1, 2, 3$, $j = 4, 5, 6$, 从一阶条件可得

$$\begin{cases} 2(1 + \omega_1)x_1 + 4\omega_2 + \omega_3 = 6 \\ 2(1 + \omega_1)x_2 + \omega_2 + 3\omega_3 = 6 \\ 2(x_3 - 3) = 0 \end{cases} \qquad \text{—(a)}$$

从这一规划问题的几何意义可知，$\boldsymbol{x}^0 = (2, 2, 3)^{\mathrm{T}}$ 是极小值点. 将 $\boldsymbol{x}^0$ 点代入以上方程组并经整理可得等式-不等式方程组.

$$\begin{cases} 4\omega_1 + 4\omega_2 + \omega_3 = 2 \\ 4\omega_1 + \omega_2 + 3\omega_3 = 2 \\ \omega_1, \omega_2, \omega_3 \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{—(b)}$$

---

[1] 这里隐含地排除了 $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0) = \varnothing$ 的情形. 因为 $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0) = \varnothing \Leftrightarrow$ 乘子 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$, 但 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$ 时 K-T 条件在几何意义上就会有问题. 详见以下分析.

按§5章的方法，由以上方程组中的前2个等式方程中可解得

$$\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{11}{12}\\ \frac{8}{12}\\ 1\end{bmatrix}t \qquad t\in R \qquad \text{—(c)}$$

再由 $\omega_i \geqslant 0$ 得

$$\begin{cases}-\frac{11}{12}t\geqslant-\frac{1}{2}\\ \frac{8}{12}t\geqslant 0\\ t\geqslant 0\end{cases}$$

这组方程的解是

$$0\leqslant t\leqslant\frac{6}{11}\Leftrightarrow t=\frac{6}{11}s \qquad 0\leqslant s\leqslant 1$$

代入(c)式得到(b)式的最终解是

$$\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{4}{11}\\ 0 & \frac{6}{11}\end{bmatrix}\boldsymbol{s} \qquad \boldsymbol{s}\geqslant\boldsymbol{0} \qquad s_1+s_2=1$$

所以，满足一阶最优条件的乘子向量 $\boldsymbol{\omega}$(在 $\boldsymbol{x}^0=(2,2,3)^{\mathrm{T}}$ 处)是

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{4}{11}\\ 0 & \frac{6}{11}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{s} \qquad \boldsymbol{s}\geqslant\boldsymbol{0} \qquad s_1+s_2=1$$

故满足一阶最优条件的 $\boldsymbol{\omega}$ 乘子有无穷多个.

易知，现在

$$I(\boldsymbol{x}^0) = \{1, 2, 3\},$$

而$\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$则有 3 种情形(对应于 $s_1 = 1, s_2 = 0$; $s_1 = 0, s_2 = 1$ 以及 $s_1, s_2 > 0$),

$$\hat{I}(\boldsymbol{x}^0) = \{1\} \text{ or } \{2, 3\} \text{ or } \{1, 2, 3\}$$

在本例中,不论$\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$取为哪种情形,都只有

$$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}} t, t \in R\}$$

$$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}) = \begin{bmatrix} 2(1+\omega_1) & 0 & 0 \\ 0 & 2(1+\omega_1) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

即得

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}) \boldsymbol{z} = 2t^2 > 0, \ t \gtrless 0, \ \boldsymbol{z} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) \text{ or } \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$$

本例中乘子 $\boldsymbol{\omega}$ 是 R^6 空间中的由顶点

$$\boldsymbol{\omega}^1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0\right)^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\omega}^2 = \left(0, \frac{4}{11}, \frac{6}{11}, 0, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$$

张成的凸组合(线段)中的任一点,

$$\boldsymbol{\omega} = s_1 \boldsymbol{\omega}^1 + s_2 \boldsymbol{\omega}^2 \qquad s_1, s_2 \geqslant 0 \qquad s_1 + s_2 = 1$$

再给出一个例子,乘子 $\boldsymbol{\omega}$ 集合是一个闭锥.

例 6.1.2

$$\min \quad f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = -x_1 + a \geqslant 0 \\ g_2(\boldsymbol{x}) = x_1 + \dfrac{1}{4} x_2^2 - a \geqslant 0 \end{cases} \quad (0 < a < 2)$$

构造

$$L = f(\boldsymbol{x}) - \omega_1 g_1(\boldsymbol{x}) - \omega_2 g_2(\boldsymbol{x})$$

一阶最优性条件为

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + \omega_1 - \omega_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \frac{1}{2} x_2 \omega_2 = 0$$

有

$$x_1 = \frac{-\omega_1 + \omega_2}{2} \quad x_2(4 - \omega_2) = 0$$

设 $4 - \omega_2 = 0 \quad \omega_2 = 4$. 则

$$x_1 = \frac{-\omega_1 + 4}{2}$$

并由 $g_2(\boldsymbol{x}^0) = 0$ 得

$$x_2^2 = 4a - 2(-\omega_1 + 4) \geqslant 0 \Rightarrow \omega_1 \geqslant 4 - 2a > 0 \quad (\because 0 < a < 2)$$

由此应有 $g_1(\boldsymbol{x}^0) = 0 \Rightarrow x_1 = a,\ x_2 = 0$

再设 $4 - \omega_2 \neq 0 \Rightarrow x_2 = 0$ 再由 $g_1(\boldsymbol{x}^0) \geqslant 0,\ g_2(\boldsymbol{x}^0) \geqslant 0$ 得

$$-x_1 + a \geqslant 0 \quad \text{and} \quad x_1 - a \geqslant 0$$

故应有 $x_1 = a$.

所以一阶最优性条件可解得唯一的解

$$\boldsymbol{x}^0 = (a,\ 0)^{\mathrm{T}}$$

并由一阶条件得到

$$-\omega_1 + \omega_2 = a$$

这一方程的通解是

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} -2a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t \qquad -\infty \leqslant t \leqslant +\infty$$

再由 $\boldsymbol{\omega} \geqslant \boldsymbol{0}$ 得

$$\begin{cases} t \geqslant 2a \\ t \geqslant 0 \end{cases}$$

这个不等式的解是

$$t = 2a + u \qquad u \geqslant 0$$

所以有

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad u \geqslant 0$$

故符合一阶条件的 $\boldsymbol{\omega}$ 乘子全体是一个顶点在 $(0,\ 2a)^{\mathrm{T}}$ 沿 $(1,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 方向延伸的射线上的点的集合(闭锥).

但如果再考虑二阶条件，

$$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2-\dfrac{1}{2}\omega_2 \end{bmatrix}$$

若要求$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\omega})$半正定(正定)，则应有

$$2-\frac{1}{2}\omega_2 \geqslant 0 \Rightarrow \omega_2 \leqslant 4 \Rightarrow u \leqslant 4-2a$$

最终可以得到

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 4-2a \\ 2a & 4 \end{bmatrix}\boldsymbol{s} \qquad \boldsymbol{s} \geqslant 0 \qquad s_1+s_2=1$$

这即是所有满足一、二阶最优条件的 $\boldsymbol{\omega}$ 乘子的集合.

本例的几何意义见图 6.1.1.

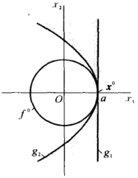


图 6.1.1

图中的阴影区域为可行区域 X，f^0是目标函数取极小值时的等值曲线(圆周曲线)，$g_{1,2}$是约束条件取等号时决定的 X 的边界曲线.

本例中$\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$可以有 2 种情形(对应于 $u=0$，$u>0$)，

$$\hat{I}(\boldsymbol{x}^0) = \{2\} \text{ or } \{1,\ 2\}$$

但这两种情形里都有

$$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} = (0,\ 1)^{\mathrm{T}} t \quad t \in R\}$$

对于 Kuhn - Tucker 条件中其他一些应给予说明的问题还有如在 Kuhn - Tucker 条件的证明中，都是先构造 Lagrange 函数然后再给出证明，但恰恰缺少的就是关于 Lagrange 函数本身的说明；而从应用的角度看，则是对于这 3 个条件能否给予进一步的简洁化表示？特别重要的是还应当对于一般情况下的非线性规划问题，给出局部极小值点处的充要条件及判别方式. 以上所引的关于非线性规划的一、二阶最优性条件，并不是充要条件，而只是必要条件或者只是充分条件；其次，这些条件中所包含的二次型约束正定(半正定)的判别方式，只有(6.1.8)式可以利用 Arrow、Enthoven 提出的加边行列式顺序主子式符号予以判定[1]，而对于(6.1.9)式，则尚没有一般意义上的判别方式，从而，(6.1.9)式所表示的二次型的几何意义也就是不清楚的.

---

〔1〕《非线性规划》上册，M. Avriel，第 142 页.

由此可见，现有文献上以 Kuhn－Tucker 条件为核心的非线性规划极值理论中尚存在许多模糊不清不尽如人意之处. 本章以下的内容即致力于解决这些问题. 在此，不妨先提示出这样一点，要澄清 Kuhn－Tucker 条件（包括已有的其他几个最优性条件）的——它（们）的结论在逻辑上都是正确的——一些细节问题. 要建立起非线性规划极值问题的充要条件、要给出一般形式的约束二次型的判定方式，就必须说明以下 **6 组**线性不等式的构造及相互关系：

1. Lagrange 乘子 $\boldsymbol{\omega}$ 应满足的等式—不等式方程组（一阶必要条件）

2. 线性化锥 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$（由局部极小值点处的紧约束函数构造）

3. 闭切锥 $S(X, \boldsymbol{x}^0)$（由局部极小值点处的全部可行方向向量构造）

4. $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合（由过局部极小值点处的边界曲面的交曲线的切方向向量构造）

5. $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合（由过局部极小值点处的边界曲面的交曲线的切方向向量以及某边界曲面的切方向向量构造）

6. Lagrange 函数在局部极小值点处的法截曲率在目标函数切超平面上的正、负分区的不等式方程组（可由 Dupin 标形构造）

本章以下的叙述即是按上述顺序进行. 这 6 组不等式中，第 2、3 组不等式的相互关系导致了“一阶约束品性”条件，而第 4、5 组不等式与“二阶约束品性”条件密切相关，第 6 组不等式即可导出 Lagrange 函数多重约束 Hessian 矩阵正定（半正定）的判别方式.

为此，先重新构造最小化规划

$$(\text{P1}): \quad \begin{aligned} &\min \quad f(\boldsymbol{x}) \\ &\text{s. t.} \quad g_i(\boldsymbol{x}) \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \cdots, k \end{aligned}$$

并假设所有的约束条件中，不存在下标 i，j，使

$$g_i(\boldsymbol{x}) = -cg_j(\boldsymbol{x}) \quad 1 \leqslant i, j \leqslant k, \ i \neq j \quad c > 0$$

即不等式约束条件中不包含隐式的等式约束. 并给以下一些符号规定，

$$\partial X = \{\boldsymbol{x} \mid g_{i_t}(\boldsymbol{x}) = 0, \ g_i(\boldsymbol{x}) \geqslant 0, \ t = 1, 2, \cdots, d, \ 1 \leqslant d \leqslant k, \\ i = 1, 2, \cdots, k, \ i \neq i_t\}$$

称∂X 是可行集合 X 的边界（点）集合. ∂X 是至少有一个（或更多个）下标 t，使

$$g_t(\boldsymbol{x}) = 0 \quad g_i(\boldsymbol{x}) > 0 \quad i \neq t, \ i = 1, 2, \cdots, k$$

成立的 $\boldsymbol{x}$ 全体的集合，$\partial X \subset X$. 对任意的 $\boldsymbol{x} \in \partial X$，总有 $\delta > 0$，

$$N_\delta(\boldsymbol{x}) \cap X \neq \varnothing \quad N_\delta(\boldsymbol{x}) \cap (R^m - X) \neq \varnothing$$

两式总是同时成立的.

对某个 d，$1 \leqslant d \leqslant k$，及 1，2，…，$k$ 的子序列 i_1，i_2，…，i_d，有，

$$\begin{cases} g_{i_t}(\boldsymbol{x}) = 0 & t = 1, 2, \cdots, d \\ g_i(\boldsymbol{x}) > 0 & i = 1, 2, \cdots, k, \ i \neq i_t \end{cases} \qquad \text{—(6.1.12)}$$

决定的方程组有解，则称(6.1.12)式决定的解 $\boldsymbol{x} \in X$ 的全体为 X 区域的边界曲面. 当 $d = 1$ 时，称这样的边界曲面为一个边界曲面，当 $d > 1$，称为 d 个边界曲面的交曲线(面)或称为 d 个边界曲面的共同曲面.

作这样的规定后，设 $\boldsymbol{x}^0$ 是规划问题(P1)的局部极小值点的判别条件，可以分为二个情形加以分析：

(a) $\boldsymbol{x}^0 \in X - \partial X$. $\boldsymbol{x}^0$ 是 X 的内点，有 $g_i(\boldsymbol{x}^0) > 0 \quad i = 1, 2, \cdots, k$ 这时，因为所有的约束条件在 $\boldsymbol{x}^0$ 处都是松驰的，故要判别这一类(内点)局部极小值点，应等同于无约束条件下的局部极小值点的判别条件，

一阶必要条件：

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{0}$$

二阶充分条件：

$$\boldsymbol{\alpha}^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) \boldsymbol{\alpha} \geqslant 0 \quad \boldsymbol{\alpha} \in R^m$$

即是说，或者(1)：$\boldsymbol{\alpha}^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) \boldsymbol{\alpha} > 0$

或者(2)：$\boldsymbol{\alpha}^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) \boldsymbol{\alpha} = 0$，且有正实数 $\delta > 0$，使 $0 \leqslant t \leqslant \delta$，$f(\boldsymbol{x}^0 + t\boldsymbol{\alpha})$ = 常数

二阶充分条件的几何意义已在前面给出.

(b) $\boldsymbol{x}^0 \in \partial X$. 局部极小值点 $\boldsymbol{x}^0$ 是 X 的边界点. 从而至少有一个(或更多个)不等式约束条件在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处成为等式了.

从集合的意义上可以直接得到 $\boldsymbol{x}^0 \in \partial X$ 且 $\boldsymbol{x}^0$ 是(P1)规划的极小值点的充要条件. 这一条件可以表述成以下形式：

存在正数 $\delta > 0$ 及 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X$ 的一个分割，即有

$$N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X = (N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X^1) \cup (N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X^2) \quad X = X^1 \cup X^2$$

使

(b.1) $\boldsymbol{x}^0$ 是 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X^1$ 上的局部极小值点，即

$$f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{x}^0) \qquad \boldsymbol{x} \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X^1$$

(b.2) $\boldsymbol{x}^0$ 是 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X^2$ 上的局部极小值点，即

$$f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{x}^0) \qquad \boldsymbol{x} \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X^2$$

条件**(b.1)**、**(b.2)**的充要性由局部极小值点的定义直接得到. Kuhn - Tucker 条

件(及其证明)中所使用的分割约略地说即是

$$X^1 = (X - \partial X) \cap N(\boldsymbol{x}^0)$$

$$X^2 = \partial X \cap N(\boldsymbol{x}^0)$$

这时条件(**b. 1**)为**内点**最优条件，条件(**b. 2**)为**边界**最优条件.

因为一般地讲，约束条件下的非线性规划问题所要解决的均是局部极小值点是可行区域 X 的边界点的情形，所以，作以上分割是非常方便于对于问题的分析的.

关于条件(**b. 1**)、(**b. 2**)条件的进一步分析在以下章节中逐步展开.

§6.2 Lagrange 乘子的解空间——非线性规划的核

§6.2.1 Lagrange 乘子的解空间

在本节中先要说明的是一阶最优性条件中的 Lagrange 乘子 $\boldsymbol{\omega}$ 的解空间结构.

相对于规划问题(P1)，重新写出一阶最优性条件，并设一阶约束品性成立，

$$\begin{cases} \nabla f(\boldsymbol{x}^0) - \sum_{i=1}^{k} \omega_i \nabla g_i(\boldsymbol{x}^0) = \mathbf{0} \\ \omega_i g_i(\boldsymbol{x}^0) = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, k \\ \omega_i \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{—(6. 2. 1. 1)}$$

这里 $\boldsymbol{x}^0$ 仍代表(P1)的局部极小值点.

注意到

$$\omega_i g_i(\boldsymbol{x}^0) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

的条件，在松弛约束条件即 $g_j(\boldsymbol{x}^0) > 0 \quad j \notin I(\boldsymbol{x}^0) \Rightarrow$ 取 $\omega_j = 0$. 故(6. 2. 1. 1)式可以写成以下形式

$$\left.\begin{aligned} \nabla f(\boldsymbol{x}^0) &= \sum_i \omega_i \nabla g_i(\boldsymbol{x}^0) \\ \omega_i &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} i \in I(\boldsymbol{x}^0) \qquad \text{—(6. 2. 1. 2)}$$

即只需考虑对应于 $i \in I(\boldsymbol{x}^0)$ 的那些在 $\boldsymbol{x}^0$ 处是紧的即 $g_i(\boldsymbol{x}^0) = 0$ 的约束条件所对应的乘子 ω_i 即可.

用

$$G(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} \nabla g_{i_1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \\ \nabla g_{i_2}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad i_1, i_2, \cdots \in I(\boldsymbol{x}^0)$$

表示所有 $i \in I(\boldsymbol{x}^0)$ 的紧约束条件 $g_i(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 处的梯度(转置)所组成的 Jacobi 矩阵,并规定

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots)^{\mathrm{T}} \quad i_1, i_2, \cdots \in I(\boldsymbol{x}^0)$$

则(6.2.1.2)还可以写成为以下形式的等式—不等式方程组

$$\begin{cases} G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\omega} = \nabla f(\boldsymbol{x}^0) \\ \boldsymbol{\omega} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad \text{—(6.2.1.3)}$$

设

$$I(\boldsymbol{x}^0) = \{i_1, i_2, \cdots, i_v\}$$

则不妨重新编号使 $i_j \to j,\ j = 1, 2, \cdots, v,\ 1 \leqslant v \leqslant k$.

在(6.2.1.3)式中 Jacobi 矩阵 $G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$是 $m \times v$ 阶矩阵,$\boldsymbol{\omega}$ 是 v 维向量. 注意(6.2.1.3)式在 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0) \neq \boldsymbol{0}$ 时,由 Kuhn - Tucker 条件成立就一定有 $\boldsymbol{\omega} \geqslant \boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{\omega} \neq \boldsymbol{0}$ 的解存在.

定义 6.2.1 设 $\boldsymbol{x}^0$ 是可行区域 X 关于(P1)规划的局部极小值点,当 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0) \neq \boldsymbol{0}$ 以及$\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0) \neq 0,\ i \in I(\boldsymbol{x}^0)$ 时,称 $\boldsymbol{x}^0$ 点是正则的. ■

以下设 $\boldsymbol{x}^0$ 是正则的. 随后的分析可以看到,在给出最优性判别条件的推导中,$\boldsymbol{x}^0$ 点是正则的这一条件是不可忽略的.

设 $\qquad 1 \leqslant r = \mathrm{rank}\,(G(\boldsymbol{x}^0)) \leqslant \min(v, m)$

设 $G(\boldsymbol{x}^0)$矩阵的前 $r \times r$ 阶顺序主子矩阵满秩. 并使用以下符号,

$$G_r(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} \nabla g_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \\ \nabla g_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \\ \vdots \\ \nabla g_r^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \end{bmatrix} = G\begin{Bmatrix} 1, 2, \cdots, r \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}(\boldsymbol{x}^0)$$

$$G_{r\times r}(\boldsymbol{x}^0) = G_r(\boldsymbol{x}^0)\begin{Bmatrix} 1, 2, \cdots, r \\ 1, 2, \cdots, r \end{Bmatrix}$$

$$\nabla g_r^j(\boldsymbol{x}^0) = \left(\frac{\partial g_j(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial g_j(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial g_j(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_r}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\nabla f_r(\boldsymbol{x}^0) = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_r}\right)^{\mathrm{T}}$$

规定所有偏导数均在 $x = x^0$ 处取值，可以省略以上诸符号中含的"(x^0)"项，简记为 G、G_r、$G_{r\times r}$、∇g_r^j 和∇f_r.

在(6.2.1.3)式中先从前 m 个等式方程解出其通解，记对应的齐次方程的基础解系矩阵为

$$\Lambda_g = \begin{bmatrix} -(G_{r\times r}^{\mathrm{T}})^{-1}\nabla g_r^{r+1}, -(G_{r\times r}^{\mathrm{T}})^{-1}\nabla g_r^{r+2}, \cdots, -(G_{r\times r}^{\mathrm{T}})^{-1}\nabla g_r^{v} \\ I_{(v-r)} \end{bmatrix} \quad \text{—(6.2.1.4)}$$

Λ_g 是 $v\times(v-r)$ 阶矩阵，(6.2.1.3)式等式方程组的通解是

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} (G_{r\times r}^{\mathrm{T}})^{-1}\nabla f_r \\ \mathbf{0}_{(v-r)} \end{bmatrix} + \Lambda_g \boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \in R^{v-r} \quad \text{—(6.2.1.5)}$$

其中 $\mathbf{0}_{(v-r)}$ 是$(v-r)$维 $\mathbf{0}$ 向量.

将(6.2.1.5)式代入 $\boldsymbol{\omega} \geqslant \mathbf{0}$，得

$$\begin{cases} -\sum_{j=1}^{v-r}(G_{r\times r}^{\mathrm{T}})^{-1}\nabla g_r^{r+j}\cdot t_j \geqslant -(G_{r\times r}^{\mathrm{T}})^{-1}\nabla f_r \\ \boldsymbol{t} \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{—(6.2.1.6)}$$

记

$$C = -(G_{r\times r}^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot[\nabla g_r^{r+1}, \nabla g_r^{r+2}, \cdots, \nabla g_r^{v}]$$

$$\boldsymbol{b} = -(G_{r\times r}^{\mathrm{T}})^{-1}\nabla f_r$$

C 是 $r\times(v-r)$阶矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是 r 维向量，(6.2.1.6)式等价于

$$\begin{cases} C\boldsymbol{t} \geqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{t} \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

由§5 章，(6.2.1.6)式中 $\boldsymbol{t}$ 的解的形式可以表成(5.4.1.24)式的形式，

$$\boldsymbol{t} = \Phi_+ \boldsymbol{s} + D_+ \boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{s}、\boldsymbol{u} \geqslant \mathbf{0} \qquad \sum_i s_i = 1 \ (\text{或 } 0 \leqslant \sum_i s_i \leqslant 1)$$

其中 Φ_+、D_+ 都是行向量总维数为 $v-r$ 的非负矩阵. 从而有，

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \mathbf{0}_{(v-r)} \end{bmatrix} + \Lambda_g\Phi_+ \boldsymbol{s} + \Lambda_g D_+ \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{s}、\boldsymbol{u} \geqslant 0 \quad \sum_i s_i = 1 \ (\text{或 } 0 \leqslant \sum_i s_i \leqslant 1)$$

显然上式总能简化成

$$\boldsymbol{\omega} = \Phi_\omega \boldsymbol{s} + \Lambda_g D_+ \boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{s}, \boldsymbol{u} \geqslant \mathbf{0} \quad \sum_i s_i = 1 \quad \text{—(6.2.1.7)}$$

其中 Φ_ω 矩阵由

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0}_{(v-r)} \end{bmatrix} + \Lambda_g \Phi_+ s \qquad s \geqslant \boldsymbol{0} \qquad \sum_i s_i = 1\ (\text{或}\ 0 \leqslant \sum_i s_i \leqslant 1)$$

的和化简而来. Φ_ω 矩阵相当于(5.4.1.18)式定义的 Φ_+^2 矩阵. 且仅当 $-\boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{0}$ 时,才可能有 $0 \leqslant \sum_i s_i \leqslant 1$ 的情形,否则在 $-\boldsymbol{b} \ngeqslant \boldsymbol{0}$ 时,只能有 $\sum_i s_i = 1$,并可知,这时一定要有

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0}_{(v-r)} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varphi}^j \geqslant \boldsymbol{0}$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}^j$ 是 $\Lambda_g \Phi_+$ 矩阵(和)的第 j 列向量.

由于 Kuhn - Tucker 条件的存在,以上结论很易理解,举例可见上一节的 2 例.

这里附带予以说明, $\boldsymbol{b} = -(G_{r\times r}^{\mathrm{T}})^{-1} \nabla f_r$ 也有可能是 r 维 $\boldsymbol{0}$ 向量. 但 ∇f_r 在 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0) \neq 0$ 的正则性条件下是不可能为 $\boldsymbol{0}$ 向量的. 否则,由(6.2.1.3)式等式方程组解的存在性,就要导出 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = 0$ 的结论. 由此可知,在 $\boldsymbol{x}^0$ 点是正则的条件下,对应于矩阵 $G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$ 中的任一个极大线性无关行向量组 $\boldsymbol{g}_{i_j}^{\mathrm{T}}$, $j = 1, 2, \cdots, r$ 的下标 i_j 所对应的 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$ 向量中的分量 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_{i_j}}$, $j = 1, 2, \cdots, r$ 不可能全部为 0,其中 $\boldsymbol{g}_{i_j}^{\mathrm{T}}$ 是指 $G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$ 矩阵的第 i_j 行向量.

在(6.2.1.7)式中的 Φ_ω、$\Lambda_g D_+$ 矩阵都是非负的,并且,以下总假设 Φ_ω 是最简的故而在形式上是唯一的. Φ_ω(和 $\Lambda_g D_+$)矩阵是 v 行向量组成的矩阵.

将(6.2.1.7)式代回到(6.2.1.3)式得

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \cdot \Phi_\omega s + G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \cdot \Lambda_g D_+ \boldsymbol{u} \qquad s、\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad \sum_i s_i = 1$$

由于 $\boldsymbol{u}$ 可取为 $\boldsymbol{0}$ 向量以及 s 作为权重因子向量的取法可知应有

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \cdot \boldsymbol{\omega}^j \qquad j = 1, 2, \cdots, \qquad \text{—(6.2.1.8)}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}^j$ 是 Φ_ω 的第 j 列向量,以及

$$G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \cdot \Lambda_g D_+ = 0 \qquad \text{—(6.2.1.9)}$$

可以想见的是,在绝大多数情况下,在 $\Lambda_g D_+ \neq 0$ 时,要能够在 $\|\boldsymbol{u}\| \to +\infty$ 时所构造出来的 Lagrange 乘子 $\boldsymbol{\omega}$(按(6.2.1.7)式),都能满足一、二阶最优性条件是不可能的. 换句话说,即使在 $\Lambda_g D_+ \neq 0$ 的情形下,在二阶最优性条件约束下通常 $\|\boldsymbol{u}\|$ 的取法是有上界的(见上节例 6.1.2).

由于(6.2.1.8)式的存在,我们可以不去考虑 $\Lambda_g D_+ \boldsymbol{u}$ 一项的影响. 这对于本书以下的分析没有什么影响,而只讨论 Φ_ω 矩阵(或其任一列向量 $\boldsymbol{\omega}^j$).

当 Jacobi 矩阵 $G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$ 可逆时,由一阶最优性条件,由(6.2.1.3)式,一定

要有

$$\boldsymbol{\omega} = [G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)]^{-1} \nabla f(\boldsymbol{x}^0) \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_\omega = [G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)]^{-1} \nabla f(\boldsymbol{x}^0)$$

即 Φ_ω 矩阵是 $v \times 1$ 阶的，或者说 Φ_ω 矩阵就是 v 维向量.

当 $G(\boldsymbol{x}^0)$ 矩阵是行向量线性相关的，则 Φ_ω 矩阵的列向量阶数就可以是大于 1 的.

当 $G(\boldsymbol{x}^0)$ 是行向量线性相关的，$G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$ 矩阵即是列向量线性相关的，设 i_1，i_2，…，i_r 是 1，2，…，v 的子序列，且记

$$\{j_1, j_2, \cdots, j_{v-r}\} = \{1, 2, \cdots, v\} - \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$$

并设 $G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$ 的列向量 $\nabla g_{i_j}(\boldsymbol{x}^0)$，$j = 1, 2, \cdots, r$ 线性无关. 注意到由(6.2.1.3)式，应成立

$$G(\boldsymbol{x}^0) \cdot G^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\omega} = G(\boldsymbol{x}^0)\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$$

故(省略"$(\boldsymbol{x}^0)$"符号)作方程

$$G\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix} \cdot G^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = G\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}\nabla f$$

用

$$\widetilde{G}\{i_1, i_2, \cdots, i_r\} = G\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix} G^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}$$

则 $\widetilde{G}\{\cdot\}$ 是由线性无关向量组构造出来的 Gram 矩阵，正定可逆. 有

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}(i_1, i_2, \cdots, i_r) = \widetilde{G}^{-1}\{i_1, i_2, \cdots, i_r\} G\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}\nabla f \tag{6.2.1.10}$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}(i_1, i_2, \cdots, i_r)$ 表示(6.2.1.10)式的解 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$ 向量的取值与线性无关向量组的(下标)取法有关. $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}(i_1, i_2, \cdots, i_r)$ 的取值可能是非负的，但也可能不是非负的.

记 $\boldsymbol{\omega}(j_1, j_2, \cdots, j_{v-r})$ 是在选定(极大)线性无关向量组 $\nabla g_{i_j}(\boldsymbol{x}^0)$ 后的余下的列向量(组) $\nabla g_{j_k}(\boldsymbol{x}^0)$，$k = 1, 2, \cdots, v-r$ 可能对应的乘子(子)向量. 那么，$\boldsymbol{\omega}(i_1, i_2, \cdots, i_r)$ 则是与 $\nabla g_{i_j}(\boldsymbol{x}^0)$ 对应的乘子(子)向量. 再次利用(6.2.1.3)式，可以有

$$\begin{aligned} G^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega} = {} & G^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}\boldsymbol{\omega}(i_1, i_2, \cdots, i_r) + \\ & + G^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix} j_1, j_2, \cdots, j_{v-r} \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}\boldsymbol{\omega}(j_1, j_2, \cdots, j_{v-r}) = \nabla f \end{aligned} \tag{6.2.1.11}$$

并且可知存在线性相关系数矩阵 $W(i_1, i_2, \cdots, i_r)$(为$(v-r)\times r$ 阶),使

$$G^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix} j_1, j_2, \cdots, j_{v-r} \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix} = G^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}\cdot W^{\mathrm{T}}\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$$

成立. 故在(6.2.1.11)式的等号两边分别用 $G\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}$左乘,得

$$\widetilde{G}\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}\,\boldsymbol{\omega}(i_1, i_2, \cdots, i_r) + \widetilde{G}\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}W^{\mathrm{T}}\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}\cdot$$
$$\cdot\,\boldsymbol{\omega}(j_1, j_2, \cdots, j_{v-r}) = G\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}\nabla f$$

上式等号两边同乘以$\widetilde{G}^{-1}\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$,并利用(6.2.1.11)式的结果得

$$\boldsymbol{\omega}(i_1, i_2, \cdots, i_r) = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}(i_1, i_2, \cdots, i_r) - W^{\mathrm{T}}\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}\boldsymbol{\omega}(j_1, j_2, \cdots, j_{v-r}) \qquad \text{—(6.2.1.12)}$$

注意上式中 $\boldsymbol{\omega}(i_1, i_2, \cdots, i_r)$、$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}(i_1, i_2, \cdots, i_r)$二者的意义区别. $\boldsymbol{\omega}(i_1, i_2, \cdots, i_r)$是指一阶最优性条件中得到的 Lagrange 乘子向量中的子向量,而 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}(i_1, i_2, \cdots, i_r)$是由(6.2.1.10)式决定的. $\boldsymbol{\omega}(i_1, i_2, \cdots, i_r)$是非负的,而 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}(i_1, i_2, \cdots, i_r)$则不一定. 并还应指出,$\boldsymbol{\omega}(i_1, i_2, \cdots, i_r)$(或 $\boldsymbol{\omega}(j_1, j_2, \cdots, j_{v-r})$)具有一定的随意性,即允许我们在保证(6.2.1.3)式成立的前提下予以取值.

推论 6.2.1.1 当(6.2.1.3)式成立即一阶最优性条件成立,一定有以上意义下的下标子列 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 存在,且使这一子列按(6.2.1.10)式决定的 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}(i_1, i_2, \cdots, i_r) \geqslant 0$. ■

证明: 当(6.2.1.3)式成立,即有(且记 $\omega_i^0 = \omega_i$、$\nabla g_i^0(\boldsymbol{x}^0) = \nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)$)

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \sum_{i=1}^{v}\omega_i^0\,\nabla g_i^0(\boldsymbol{x}^0) \qquad \text{—(6.2.1.13)}$$

先设 $\omega_i^0 > 0,\ i = 1, \cdots, v$. 不妨设向量$\nabla g_i^0(\boldsymbol{x}^0)$的秩为 $r \leqslant v$, 故又有一组不全为 0 的数 ξ_i,使

$$\nabla g_v^0(\boldsymbol{x}^0) = \sum_{i=1}^{v-1}\xi_i\,\nabla g_i^0(\boldsymbol{x}^0) \qquad \text{—(6.2.1.14)}$$

不失一般性,设 ξ_i 中的前 s 个数 $\xi_i \leqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant s \leqslant v-1$,将上式写成以下形式

$$\sum_{i=1}^{s}\xi_i'\,\nabla g_i^0(\boldsymbol{x}^0) + \nabla g_v^0(\boldsymbol{x}^0) = \sum_{i=s+1}^{v-1}\xi_i\,\nabla g_i^0(\boldsymbol{x}^0) \quad \xi_i' = -\xi_i \geqslant 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant s \qquad \text{—(6.2.1.15)}$$

并规定 $\xi'_v = 1$. 设

$$\frac{\omega_k^0}{\xi'_k} = \min\left(\frac{\omega_1^0}{\xi'_1}, \frac{\omega_2^0}{\xi'_2}, \cdots, \frac{\omega_s^0}{\xi'_s}, \frac{\omega_v^0}{\xi'_v}\right) < +\infty \qquad \text{—(6.2.1.16)}$$

则记

$$\begin{cases} \omega_i^1 = \omega_i^0 - \xi'_i \dfrac{\omega_k^0}{\xi'_k} \geqslant 0 & i = 1, 2, \cdots, s, v \\ \omega_i^1 = \omega_i^0 + \xi_i \dfrac{\omega_k^0}{\xi'_k} \geqslant 0 & i = s+1, s+2, \cdots, v-1 \end{cases} \qquad \text{—(6.2.1.17)}$$

显然有

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \sum_{i=1}^{v} \omega_i^1 \nabla g_i^0(\boldsymbol{x}^0) \quad \omega_i^v \geqslant 0$$

并且,ω_i^1 系数中的 $\omega_k^1 = 0$,即$\nabla g_k^0(\boldsymbol{x}^0)$项被消去了. 故对 ω_i^1、$\nabla g_i^0(\boldsymbol{x}^0)$重新编排下标,可以有

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \sum_{j=1}^{v-1} \omega_j^1 \nabla g_j^1(\boldsymbol{x}^0) \quad \omega_j^1 \geqslant 0 \qquad \text{—(6.2.1.18)}$$

其中

$$\begin{cases} \omega_j^1 = \omega_i^1 & i = 1, 2, \cdots, k-1; j = i \\ \omega_j^1 = \omega_{i-1}^1 & i = k+1, k+2, \cdots, v; j = i-1 \end{cases} \qquad \text{—(6.2.1.19)}$$

$$\begin{cases} \nabla g_j^1(\boldsymbol{x}^0) = \nabla g_i^0(\boldsymbol{x}^0) & i = 1, 2, \cdots, k-1; j = i \\ \nabla g_j^1(\boldsymbol{x}^0) = \nabla g_{i-1}^0(\boldsymbol{x}^0) & i = k+1, k+2, \cdots, v; j = i-1 \end{cases} \qquad \text{—(6.2.1.20)}$$

当 $v-1 > r$,则继续以上的各步骤,可得到

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \sum_{h=1}^{v-2} \omega_h^2 \nabla g_h^2(\boldsymbol{x}^0) \quad \omega_h^2 \geqslant 0$$

等等(这里 ω_h^2 的上标"2"不是幂指数). 直至(比如说第 p 次)可消去所有线性相关的$\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)$项,得到

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \sum_{t=1}^{r} \omega_t^p \nabla g_t^p(\boldsymbol{x}^0) \quad \omega_t^p \geqslant 0 \qquad \text{—(6.2.1.21)}$$

其中 $\nabla g_t^p(\boldsymbol{x}^0)$, $t = 1, 2, \cdots, r$ 是线性无关的. 显然上式总对应于某个下标子列 $i_1, i_2, \cdots, i_r$,使

$$\omega_t^p = \omega_{i_t} \quad \nabla g_t^p(\boldsymbol{x}^0) = \nabla g_{i_t}(\boldsymbol{x}^0) \qquad \text{—(6.2.1.22)}$$

令

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}(i_1, i_2, \cdots, i_r) = (\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_r})^{\mathrm{T}} \geqslant \mathbf{0}$$

有

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \sum_{j=1}^{r} \omega_{i_j} \nabla g_{i_j}(\boldsymbol{x}^0) \qquad \text{—(6.2.1.23)}$$

即得以上结论.

现再设(6.2.1.13)式中的 $\omega_i^0 \geqslant 0$，即 ω_i^0 中有若干个为 0 的情形. 先对下标 i 重新编号，使 $\omega_{i_k}^0 > 0$ 的下标 $i_k \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$ 为

$$\hat{I}(\boldsymbol{x}^0) = \{1, 2, \cdots, v'\}$$

这里 $v' < v$. 从而可得到

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \sum_{i=1}^{v'} \omega_i^0 \nabla g_i^0(\boldsymbol{x}^0) \quad \omega_i^0 > 0 \qquad \text{—(6.2.1.13a)}$$

(6.2.1.13a)式形式上等价于(6.2.1.13)式. 此时，若 $\nabla g_i^0(\boldsymbol{x}^0)$ 向量组是线性无关的，则已得到以上结论. 否则，设此向量组的秩为 $r' \leqslant r$，便有一组不全为 0 的数 ξ_i，使

$$\nabla g_{v'}^0(\boldsymbol{x}^0) = \sum_{i=1}^{v'-1} \xi_i \nabla g_i^0(\boldsymbol{x}^0) \qquad \text{—(6.2.1.14a)}$$

如此便可以再导出(6.2.1.15a)～(6.2.1.23)式，这只需将(6.2.1.13)～(6.2.1.23)式中的 v、r 符号用 v'、r' 代替即可.

这样便知存在下标子列 $i_1, i_2, \cdots, i_r$，且使按(6.2.1.10)式决定的 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(i_1, i_2, \cdots, i_r) \geqslant \mathbf{0}$.

这个结论也可以看成是推论 5.1.2.6 的结论. 这里给出的证明也就是推论 5.1.2.6 的直接证明. 由此可知，$\tilde{\boldsymbol{\omega}}(i_1, i_2, \cdots, i_r)$ 就是(6.2.1.6)式解空间的极点(向量).

记下标子序列 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 使 $\nabla g_{i_j}(\boldsymbol{x}^0)$ 线性无关，$j = 1, 2, \cdots, r$ 且使(6.2.10)式决定的 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(i_1, i_2, \cdots, i_r) \geqslant \mathbf{0}$ 的 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(i_1, i_2, \cdots, i_r)$ 为 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^+(i_1, i_2, \cdots, i_r)$. 则(6.2.12)式可表为

$$\boldsymbol{\omega}(i_1, i_2, \cdots, i_r) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^+(i_1, i_2, \cdots, i_r) - \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}\boldsymbol{\omega}(j_1, j_2, \cdots, j_{v-r}) \qquad \text{—(6.2.1.24)}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}(j_1, j_2, \cdots, j_{v-r}) \geqslant \mathbf{0}$ 且其取值应在 R_+^{v-r} 空间正象限的某一子集上以保证 $\boldsymbol{\omega}(i_1, i_2, \cdots, i_r)$ 非负. 显而易见，(6.2.1.24)表示的是一个以 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^+(i_1, i_2, \cdots,$

i_r)为顶点的 R^r_+ 空间上的闭锥. 当对$\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)$向量组中的所有的极大线性无关向量组 $\nabla g_{i_j}(\boldsymbol{x}^0)$、$\nabla g_{i_t}(\boldsymbol{x}^0)$、…，$j$、$t=1, 2, \cdots, r$，构造出对应的$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}(i_j)$、$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}(i_t)$、…向量，就可得到其中的一个非负子向量组记为$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^+(i_a)$、$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^+(i_b)$、…. 设$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^+(\cdot)$这样的向量共有 k'个. 这里

$$1 \leqslant k' \leqslant \frac{v!}{r!(v-r)!}$$

并设从这 k'个$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^+(\cdot)$向量中作最简处理(如剔除可由其他向量的正线性组合表示的那个$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^+(\cdot)$)后的 k 个$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^+(\cdot)$向量，则可知，一阶最优条件中的 Lagrange 乘子解集合中一定包含有以下凸组合

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_i^k \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^+(\cdot)s_i \qquad s_i \geqslant 0 \quad \sum_i^k s_i = 1$$

其中 $\sum$ 下的$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^+(\cdot)$ 共有 k 个.

因为凸组合的最简形式具有唯一性[1]，故知(6.2.1.7)式中的矩阵

$$\Phi_\omega = [\boldsymbol{\omega}^1, \boldsymbol{\omega}^2, \cdots, \boldsymbol{\omega}^k] \quad \boldsymbol{\omega}^j = (\omega_1^j, \omega_2^j, \cdots, \omega_v^j)^{\mathrm{T}}$$

$$\omega_i^j = \begin{cases} \omega_{i_t}^+ & 当\ i = i_t \quad t = 1, 2, \cdots, r \\ 0 & 当\ i \neq i_t \end{cases} \qquad \text{—(6.2.1.25)}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}^j$就是前一式中的$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^+(\cdot)$，$\omega_i^j$是 $\boldsymbol{\omega}^k$ 的分量.

Φ_ω 是 $v \times k$ 阶非负矩阵. (6.2.1.25)式给出了 Φ_ω 矩阵的意义，同时，也给出了 Φ_ω 矩阵的另一种解法. 并且可知，在 $G(\boldsymbol{x}^0)$矩阵是 $m \times m$ 阶满秩矩阵时，(6.2.1.11)式中的 $W^{\mathrm{T}}\{\cdot\}$矩阵(项)不存在，从而

$$\boldsymbol{\omega}(1, 2, \cdots, r) = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}(1, 2, \cdots, r) = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^+(1, 2, \cdots, r), \ r = m$$

及 $\Phi_\omega = \boldsymbol{\omega}(1, 2, \cdots, r)$，即 Lagrange 乘子是唯一的. 以下称 Φ_ω 矩阵的列向量 $\boldsymbol{\omega}^j$为基乘子向量[2].

例 6.2.1.1 由例 6.1.1，可得在极小值点 $\boldsymbol{x}^0 = (2, 2, 3)^{\mathrm{T}}$ 处，紧约束是 $\nabla g_{1,2,3}(\boldsymbol{x}^0)$，得到

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla g_1(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla g_3(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

---

〔1〕 见§5.9节.

〔2〕 **重要说明**：$\boldsymbol{\omega}^j$成为基乘子向量，还应满足由 $\boldsymbol{\omega}^j$决定的$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合下，$\boldsymbol{x}^0$ 点使二阶约束品性(Ⅱ)成立的条件，对这一条件的意义在以下各节中会逐步加以说明.

即 $v=3$，Lagrange 乘子 $\boldsymbol{\omega}$ 中的分量 $\omega_{4,5,6}=0$. 向量组 $\nabla g_{1,2,3}(\boldsymbol{x}^0)$ 的秩 $r=2$.

$$\widetilde{G}\{1,2\}=\begin{bmatrix}-4 & -4 & 0\\ -4 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & -4\\ -4 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32 & 20\\ 20 & 17\end{bmatrix}$$

$$G\left\{\begin{matrix}1,2\\1,2,3\end{matrix}\right\}\cdot\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix}-4 & -4 & 0\\ -4 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ -2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\ 10\end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}(1,2)=\frac{1}{144}\begin{bmatrix}17 & -20\\ -20 & 32\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16\\ 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ \hline 2\\ 0\end{bmatrix}=\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^+(1,2)$$

同理可知 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^+(1,3)=\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^+(1,2)$，而

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^+(2,3)=\begin{bmatrix}\frac{4}{11}\\ \frac{6}{11}\\ 0\end{bmatrix}$$

由此即得 $\Phi_\omega=[\boldsymbol{\omega}^1,\boldsymbol{\omega}^2]$

$$\boldsymbol{\omega}^1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{\omega}^2=\begin{bmatrix}0\\ \frac{4}{11}\\ \frac{6}{11}\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

例 6.2.1.2 由例 6.1.2 已知极小值点 $\boldsymbol{x}^0=(a,0)^{\mathrm{T}}$，有

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix}2a\\ 0\end{bmatrix}\quad \nabla g_1(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}\quad \nabla g_2(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

现在 $v=2$，$\nabla g_{1,2}(\boldsymbol{x}^0)$向量组的秩 $r=1$.

可得

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}(1)=-2a<0\qquad \widetilde{\boldsymbol{\omega}}(2)=2a=\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^+(2)$$

故 $\Phi_\omega=[\boldsymbol{\omega}^1]$，且

$$\boldsymbol{\omega}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2a \end{bmatrix}$$

现在将 $\Phi_\omega = [\boldsymbol{\omega}^j]$ 矩阵的列向量 $\boldsymbol{\omega}^j$ 与二阶最优性条件(或充分条件)结合起来分析,那么,是否是 $\boldsymbol{\omega}^j$, $j=1, 2, \cdots, k$ 个列向量都能符合二阶条件的要求呢? 回答是不一定的.如下例可见.

例 6.2.1.3

$$\min \quad f(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 - (x_2 - d)^2 \qquad \text{其中 } a, b, c, d > 0$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = \quad ax_1^3 + x_2 \geqslant 0 \\ g_2(\boldsymbol{x}) = -bx_1 + x_2 \geqslant 0 \\ g_3(\boldsymbol{x}) = \quad c \quad - x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$d > \frac{c}{2}(1+s) \quad s = \max\left(\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{2}{3}}, \frac{1}{b^2}\right)$$

检验 $\boldsymbol{x}^0 = (0, 0)^{\mathrm{T}}$ 是否为以上规划的局部极小值点.

在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处, $g_3(\boldsymbol{x}^0) > 0$ 是松弛约束,而 $g_{1,2}(\boldsymbol{x}^0) = 0$ 是紧的,

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2d \end{bmatrix} \quad \nabla g_1(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} -b \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\nabla g_{1,2}(\boldsymbol{x}^0)$ 向量组的秩是 2, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^+(\cdot)$ 有唯一解,可得

$$\Phi_\omega = [\boldsymbol{\omega}^1] = \begin{bmatrix} 2d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

且由 Lagrange 函数

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) = -x_1^2 - (x_2 - d)^2 - \omega_1(ax_1^3 + x_2) - \omega_2(-bx_1 + x_2) - \omega_3(c - x_2)$$

可得其二阶导数组成的 Hessian 矩阵

$$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

是负定的.并且由定义可知集合

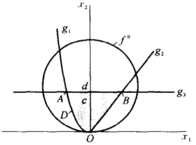
$$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{ \boldsymbol{z} \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 0 \quad z_1, z_2 \in R \right. \right\} = \{(0, 0)^{\mathrm{T}}\}$$

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{ \boldsymbol{z} \left| \begin{matrix} z_2 = 0 \\ -bz_1 + z_2 \geqslant 0 \end{matrix} \quad z_1, z_2 \in R \right. \right\} = \left\{ \boldsymbol{z} \left| \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} t \quad t \geqslant 0 \right. \right\}$$

则由二阶必要条件，现在不存在 $z \neq 0$　$z \in \hat{Z}^1(x^0)$ 从而可以有理由认为 x^0 点符合二阶必要条件(这即等价于 ω^1 列向量符合二阶必要条件)[1]. 然而，现在有 $z \neq 0$ 且 $z \in \hat{\hat{Z}}^1(x^0)$，且由于$\nabla_x^2 L(x^0, \omega)$负定，故只能有

$$z^T \nabla^2 L(x^0, \omega) z = -2t^2 < 0 \quad z \neq 0 \quad z \in \hat{\hat{Z}}^1(x^0) \quad t > 0$$

故 x^0 点不满足二阶充分条件. 但由于在有些文献上(如在 M. Avriel 那里)，二阶充分条件是以"严格局部极小值点的二阶充分条件"形式出现，故在以上的二阶条件判别之下，仍不能明确判定 x^0 的属性(即还应检验是否可能存在 $x^0 = (0, 0)^T$ 是可行区域的弱局部极小值点的情形). 需要进一步予以分析.



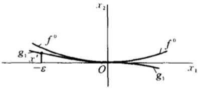


图 6.2.1.1

图 6.2.1.1 的(a)给出了本例的可行区域 X(阴影区域). f^0是指

$$f^0: f(x) = -d^2$$

决定的圆周曲线. (a)图所显示的关系容易造成错觉，使人认为 $x^0 = (0, 0)^T$ 确系(全局)最小值点. 但事实上 x^0 不是任何意义上的局部极小值点. 可以验证这一点.

任取正数 $\delta > 0$，取 $0 < \varepsilon < c$，作

$$x' = (-\varepsilon, a\varepsilon^3) \in X$$

并令 $(\varepsilon^2 + a^2\varepsilon^6)^{\frac{1}{2}} = \|x'\| < \delta \Rightarrow x' \in N_\delta(x^0) \cap X$. 显然 x'位于 $g_1(x) = 0$ 的曲线上. 则

$$f(x') = -(-\varepsilon)^2 - (a\varepsilon^3 - d)^2 = -\varepsilon^2(1 + a^2\varepsilon^4 - 2ad\varepsilon) - d^2$$

令 ε 充分接近于 0，总可以使

---

[1] 当$\hat{\hat{Z}}^1(x^0)$集合中不存在 $z \neq 0$ 的向量，即可认为二阶充分条件成立的例子，见《非线性规划》上册，M. Avriel，第 48 页例 3.2.2. 显然这样的判据也可移用于关于$\hat{Z}^1(x^0)$集合的二阶必要条件上来.

$$1 + a^2\varepsilon^4 - 2ad\varepsilon > 0 \quad \left(如\ 0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2ab}\right)$$

从而就有

$$f(\boldsymbol{x}') < f(\boldsymbol{x}^0) = -d^2$$

如图 6.2.1.1 的(b)为原点附近的放大图. 这是因为在靠近坐标系原点处的负横半轴区域，作为立方曲线的 $g_1(\boldsymbol{x}) = 0$ 曲线总位于圆周曲线 f^0 的下方(同时又位于横轴的上方)，即立方曲线 g_1 比任何半径的、圆心在 x_2 正半轴上并过原点的圆周曲线都更贴近于(负)的 x_1 轴. 所以，g_1 曲线上的 $\boldsymbol{x}'$ 点，则一定可以有以上结果. 故 $\boldsymbol{x}^0$ 点不是可行区域的局部极小值点.

实际上，在本例中给定一定的参数选择，则(a)图中的 $A = \left(-\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{3}},\ c\right)$、$B = \left(\frac{c}{b},\ c\right)$ 及 $D = \left(-\frac{2}{3a},\ d - \frac{1}{2}\right)$ 点可成为局部极小值点. 如设 $c = d$，可证 A、B 均为局部极小值点. 设

$$d > \frac{1}{2} \qquad a > \frac{4}{3}$$

可知 D 点也是局部极小值点.

§ 6.2.2　非线性规划的核

由例 6.2.1.3 可知 Φ_ω 矩阵的列向量 $\boldsymbol{\omega}^j$ 不一定都是能满足一、二阶必要、充分条件的 Lagrange 乘子. 但以下会说明，若 $\boldsymbol{x}^0$ 点是可行区域 X 的局部极小值点，且在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处一、二阶约束品性成立，并存在乘子 $\boldsymbol{\omega}$ 使 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的一阶、二阶必要(充分)条件成立，那么，矩阵 Φ_ω 中必有至少 1 个列向量 $\boldsymbol{\omega}^{j'}$，使由 $\boldsymbol{\omega}^{j'}$ 构造的 Lagrange 函数 $L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\omega}^{j'})$ 在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 处，满足一阶、二阶最优性条件. 对这一结论，此处仅给以简要的论述.

首先，容易理解(P1)规划问题，如果其约束函数 $g_i(\boldsymbol{x}^0) = 0,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ v$，且 $\boldsymbol{x}^0$ 又是一个局部极小值点，那么，若梯度向量组 $\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)$ 的秩 $r = m$，则由隐函数定理，$\boldsymbol{x}^0$ 是方程组

$$g_i(\boldsymbol{x}^0) = 0 \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

的解(在适当的下标编号下这总可以作到)，$\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)$ 线性无关，所以，$\boldsymbol{x}^0$ 点是可行区域的一个尖点. 以下将说明，在 $\boldsymbol{x}^0$ 点为 X 可行区域的尖点时，集合 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$、$\hat{\hat{Z}}(\boldsymbol{x}^0)$ 中不含有非 0 的向量 $\boldsymbol{z}$. 在此情况下，传统上二阶最优性条件可被设为是

成立的. 其次,当向量组 $\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)\quad i \in I(\boldsymbol{x}^0)$ 的秩 $r < m$, 设 $\nabla g_{i_j}(\boldsymbol{x}^0)$, $j = 1, 2, \cdots, d$ 是一组线性无关的向量,其中 $1 \leqslant d \leqslant r$, 则

$$g_{i_j}(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, d$$

方程组给出了一条过 $\boldsymbol{x}^0$ 的曲线 $g(\boldsymbol{x};\ i_1, i_2, \cdots, i_d)$. 这样的曲线可能有许多条. 要使 $\boldsymbol{x}^0$ 点成为可行区域的一个局部极小值点,那么,$\boldsymbol{x}^0$ 点必然(至少)是其中一条曲线 $g(\boldsymbol{x};\ i_1, i_2, \cdots, i_d)$上的局部极小值点. 若否,则 $\boldsymbol{x}^0$ 不是任一条这样的曲线$g(\boldsymbol{x};\ i_1, i_2, \cdots, i_d)$上的局部极小值点,即是说,设

$$g(\boldsymbol{x};\ i_1, i_2, \cdots, i_d) = 0 \quad \text{且}\ g(\boldsymbol{x}^0;\ i_1, i_2, \cdots, i_d) = 0$$

是这样的曲线的方程,对任意小的正数 $\delta > 0$ 都有

$$g(\boldsymbol{x};\ i_1, i_2, \cdots, i_d) = 0 \quad \text{and} \quad \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0 \| < \delta$$

的 $\boldsymbol{x}$,并使 $f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}^0)$ 成立.

但由于 $\boldsymbol{x}^0$ 点满足一、二阶最优性条件的假设,那么,由一、二阶最优性条件中已含有的一、二阶约束品性的要求,应至少有一个下标子列$\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$所决定的交曲线

$$g(\boldsymbol{x};\ i_1, i_2, \cdots, i_r) \subset X \quad \boldsymbol{x} \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0)$$

这样,应得到 $\boldsymbol{x}^0$ 也不是 $g(\boldsymbol{x};\ i_1, i_2, \cdots, i_r)$曲线上的局部极小值点,从而便有矛盾.

所以,$\boldsymbol{x}^0$ 是可行区域 X 的局部极小值点,$\boldsymbol{x}^0$ 必定是(至少)一条 $g(\boldsymbol{x};\ i_1, i_2, \cdots, i_r)$曲线的局部极小值点. 由此结论即可得到 $\boldsymbol{x}^0$ 可能是以下规划的局部极小值点.

设已知(P1)规划的局部极小值点是 $\boldsymbol{x}^0$,且 $\boldsymbol{x}^0$ 也是 $g(\boldsymbol{x};\ i_1, i_2, \cdots, i_d)$曲线上的局部极小值点,那么,构造规划(P0),

$$(\text{P0}):\qquad \begin{cases} \min & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & g_{i_j}(\boldsymbol{x}) \geqslant 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, d \end{cases}$$

则 $\boldsymbol{x}^0$ 也是(P0)规划的局部极小值点.

再由下标序列 $i_1, i_2, \cdots, i_d$ 的意义即知,向量组$\nabla g_{i_j}(\boldsymbol{x}^0)$是线性无关的,并且在(P0)规划中可知有 Lagrange 乘子向量 $\boldsymbol{\omega}^0 = (\omega_{i_j})\quad j = 1, 2, \cdots, d$, 使

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \sum_{j=1}^{d} \omega_{i_j} \nabla g_{i_j}(\boldsymbol{x}^0)$$

且 $\boldsymbol{\omega}^0$ 满足二阶最优性条件. 与 Φ_ω 矩阵的意义相对照,马上就可以理解,这里的乘子向量 $\boldsymbol{\omega}^0$ 就是 Φ_ω 矩阵中的某一列向量 $\boldsymbol{\omega}^{j'}$.

定义 6.2.2.1 设 $\boldsymbol{x}^0$ 是规划(P1)问题的局部极小值点. 则在 $\boldsymbol{x}^0$ 对应的 Φ_ω 矩阵列向量中存在的满足一阶、二阶最优性条件的列向量 $\boldsymbol{\omega}^{j'}=(\omega_1^{j'}, \omega_2^{j'}, \cdots, \omega_v^{j'})^{\mathrm{T}}$ 中所有 $\omega_{i_t}^{j'}>0$ 的乘子所对应的约束条件 $g_{i_t}(\boldsymbol{x})\geqslant 0$, 及(原)目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 可构造以下规划,

$$(\mathrm{P0})\qquad \begin{cases}\min & f(\boldsymbol{x})\\ \mathrm{s.\,t.} & g_{i_t}(\boldsymbol{x})\geqslant 0\quad t=1,2,\cdots\end{cases}$$

则(P0)规划也以 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0$ 为其局部极小值点. 称(P0)规划是(P1)规划在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的核规划. ■

$\boldsymbol{x}^0$ 点处的核规划具有两个基本性质,其一是规划问题的各个约束函数在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的梯度向量(组)是线性无关的. 这一性质决定了核规划的约束条件不会超过 m 个;其二则是约束函数对应的(唯一的)Lagrange 乘子均大于 0,且乘子可由(6.2.1.10)式决定.

设核规划的约束条件由

$$g_j(\boldsymbol{x})\geqslant 0\qquad j\in i(\boldsymbol{x}^0)$$

其中 $i(\boldsymbol{x}^0)\subseteq I(\boldsymbol{x}^0)$. 记核规划所决定的 Lagrange 乘子为 $\boldsymbol{\omega}^h$. 由上可知 $\boldsymbol{\omega}^h>0$. 再由以上的分析可知,将 $\boldsymbol{\omega}^h$ 拓展到原规划上是完全可以的,令 $\boldsymbol{\omega}$ 是原规划的乘子向量,可取

$$\omega_j=\begin{cases}\omega_j^h & \text{当 } j\in i(\boldsymbol{x}^0)\\ 0 & \text{当 } j\in I(\boldsymbol{x}^0)-i(\boldsymbol{x}^0)\end{cases}\qquad j=1,2,\cdots,v$$

由 ω_j 作为分量组成的 $\boldsymbol{\omega}$ 一定是原规划(P1)问题的符合一阶最优性条件的乘子. 由这个乘子 $\boldsymbol{\omega}$ 在原(P1)规划问题中即可决定二阶最优性条件中的集合 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$、$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$.

利用以上的分析,可以有以下推论.

推论 6.2.2.1 设 $\boldsymbol{x}^0$ 是(P1)规划问题的局部极小值点. 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点存在一个由(P1)规划问题的约束条件简化而成的核规划的充分条件是,由核规划所决定的乘子 $\boldsymbol{\omega}^h$ 拓展成的(P1)原规划的乘子 $\boldsymbol{\omega}$ 决定的集合 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)=\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$. ■

关于这一推论的说明,在下一节中会有叙述. 由此可见,当 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)\neq\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 时,核规划有可能不存在. 这里所说的核规划不存在的意思是指,原(P1)规划的局部极小值点 $\boldsymbol{x}^0$,在以上所指的 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$、$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 不相同时,$\boldsymbol{x}^0$ 可能不是(P0)形式的规划的局部极小值点. 但以下会看到,反之,可以有

系 6.2.2.1 若 $\boldsymbol{x}^0$ 点是(P1)形式规划问题中所得到某个(P0)形式的规划问题的局部极小值点,那么,$\boldsymbol{x}^0$ 一定也就是原(P1)规划问题的局部极小值点. ■

这个推论的意义在于在任一个一般的规划问题(P1)的局部极小值点 $\boldsymbol{x}^0$ 处，当 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)=\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$，就总是存在(至少)一个也以 $\boldsymbol{x}^0$ 为局部极小值点的核规划(P0)，从而，就 $\boldsymbol{x}^0$ 点成为可行区域的局部极小值点这一基本属性上，(P0)规划是与(P1)规划等价的. 但由于(P0)规划的约束条件在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0$ 点处的梯度向量是线性无关的，从而极大地方便了对于 $\boldsymbol{x}^0$ 点的邻域的几何性质的分析，也使得在实际运用 Kuhn－Tucker 定理时具有了更为准确与清晰的判别形式.

当然也应指出，(P0)核规划与(P1)原规划仅在 $\boldsymbol{x}^0$ 是各自规划可行区域的局部极小值点这一属性上是等价的. 除非(P1)规划本身就是核规划，一般地，原规划的可行区域与核规划的可行区域是不同的. 核规划与原规划的等价性，仅在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处有效.

对于上一节的例 6.1.1，已知 $\boldsymbol{x}^0=(2,\ 2,\ 3)^{\mathrm{T}}$ 是原规划的局部极小值点. 由那里的分析已知，在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处，存在以下 2 个核规划，

$$(\mathrm{P0})_1 \qquad \min\ f(\boldsymbol{x}) \qquad \text{s.t.}\quad g_1(\boldsymbol{x})=8-x_1^2-x_2^2\geqslant 0$$

$$(\mathrm{P0})_2 \qquad \min\ f(\boldsymbol{x}) \qquad \text{s.t.}\begin{cases} g_2(\boldsymbol{x})=10-4x_1-x_2\geqslant 0\\ g_3(\boldsymbol{x})=8-x_1-3x_2\geqslant 0\end{cases}$$

这 2 个规划问题均以 $\boldsymbol{x}^0$ 点为其局部极小值点.

而对于例 6.1.2，$\boldsymbol{x}^0=(a,\ 0)^{\mathrm{T}}$ 是原规划的局部极小值点，在 $\boldsymbol{x}^0$ 点对应的核规划是

$$(\mathrm{P0}) \qquad \min\ f(\boldsymbol{x}) \qquad \text{s.t.}\quad g_2(\boldsymbol{x})=x_1+\frac{1}{4}x_2^2-a\geqslant 0\quad (0<a<2)$$

利用核规划的定义，还可以对等式、不等式混合约束构成的规划问题(P)给出一个拓展性的推论，以解释等式约束所对应的 Lagrange 乘子的意义.

像通常所做的转换，用以下的不等式约束来替代(P)规划的等式约束：

$$g_{k+j}(\boldsymbol{x})=h_j(\boldsymbol{x})\geqslant 0\qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ p \qquad —(6.2.2.1)$$

$$g_{k+p+j}(\boldsymbol{x})=-h_j(\boldsymbol{x})\geqslant 0\qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ p \qquad —(6.2.2.2)$$

并将(P)规划问题写成以下形式：

$$(\mathrm{P}_h):\qquad \min\ f(\boldsymbol{x}) \qquad \text{s.t.}\begin{cases} g_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0 & i=1,\ 2,\ \cdots,\ k\\ g_{k+j}(\boldsymbol{x})\geqslant 0 & j=1,\ 2,\ \cdots,\ p\\ g_{k+p+j}(\boldsymbol{x})\geqslant 0 & j=1,\ 2,\ \cdots,\ p\end{cases}$$

对照一阶必要性条件，可知在原规划(P)的一阶必要条件中等式约束对应的 Lagrange 乘子 ζ_j，在(P_h)规划形式下应当有以下关系，

$$\zeta_j = \omega_{k+j} - \omega_{k+p+j} \quad j = 1, 2, \cdots, p \quad \zeta_j \in R \qquad —(6.2.2.3)$$

其中 ω_{k+j}、ω_{k+p+j} 是(P_h)形式的规划问题中对应下标的约束函数所对应的乘子，且 ω_{k+j}、$\omega_{k+p+j} \geqslant 0$.

注意到梯度向量间存在负线性相关性，

$$\nabla g_{k+p+j}(\boldsymbol{x}^0) = -\nabla g_{k+j}(\boldsymbol{x}^0) \quad j = 1, 2, \cdots, p$$

若设向量组 $\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)$、$\nabla g_{k+j}(\boldsymbol{x}^0)$，$i = 1, 2, \cdots, k$、$j = 1, 2, \cdots, p$ 的秩是 $r = r^0 + r^+ + r^-$，其中 r^0 是指向量组 $\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)$，$i = 1, 2, \cdots, k$ 中的 r^0 个向量与向量组 $\nabla g_{k+j}(\boldsymbol{x}^0)$，$j = 1, 2, \cdots, p$ 中的 r^+ 个向量以及在 $\nabla g_{k+p+j}(\boldsymbol{x}^0)$，$j = 1, 2, \cdots, p$ 中的 r^- 个向量可组成极大线性无关向量组.

为简化叙述，不妨再设以下规划

$$(P_h0) \qquad \min \quad f(\boldsymbol{x})$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} g_{i_t}(\boldsymbol{x}) \geqslant 0 & t = 1, 2, \cdots, r_1 \leqslant r^0 \\ g_{k+j_s}(\boldsymbol{x}) \geqslant 0 & s = 1, 2, \cdots, r_2 \leqslant r^+ \\ g_{k+p+j_h}(\boldsymbol{x}) \geqslant 0 & h = 1, 2, \cdots, r_3 \leqslant r^- \end{cases}$$

是原规划(P)在 $\boldsymbol{x}^0$ 局部极小值点处的一个核规划[1]. 则由核规划的性质，(P_h0)规划中的乘子

$$\begin{cases} \omega_{i_t} > 0 \\ \omega_{k+j_s} > 0 \\ \omega_{k+p+j_h} > 0 \end{cases}$$

那么，原规划(P)问题中在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处等式约束条件所对应的乘子 ζ_j，由下式决定，

$$\begin{cases} \zeta_{j_s} = \omega_{k+j_s} > 0 & s = 1, 2, \cdots, r_2 \\ \zeta_{j_h} = -\omega_{k+p+j_h} < 0 & h = 1, 2, \cdots, r_3 \\ \zeta_j = 0 & j \neq j_s、j_h,\ j = 1, 2, \cdots, p \end{cases} \qquad —(6.2.2.4)$$

与(6.2.2.3)式相比较，此即表示 ω_{k+j}、ω_{k+p+j} 中可以理解为当 $\omega_{k+j} > 0 \Rightarrow \omega_{k+p+j} = 0$ 或者相反 $\omega_{k+p+j} > 0 \Rightarrow \omega_{k+j} = 0$ 再或者 $\omega_{k+j} = \omega_{k+p+j} = 0$. 由此即知，当我们将等式约束 $h_j(\boldsymbol{x}) = 0$ 理解为(6.2.2.1～2)这 2 个不等式时，那么，从核

[1] 附带指出，由核规划的性质，$j_s \neq j_h$，$s = 1, 2, \cdots, r_2$，$h = 1, 2, \cdots, r_3$.

规划意义上看，$h_j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 与 $-h_j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 在核规划中，只有其中一个是有效的（即其对应的乘子大于 0），另一个可以省略（即其对应的乘子可取为 0），或者二个均可省略.

例 6.2.2.1 规划问题(P)为[1]

$$\min \quad f(\boldsymbol{x}) = x_1$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = 16 - (x_1 - 4)^2 - x_2^2 \geqslant 0 \\ h_1(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 \end{cases}$$

可知这一规划的局部极小值点有 2 个

$$\boldsymbol{x}^{01} = (0,\ 0)^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}^{02} = (6.4,\ 3.2)^{\mathrm{T}}$$

在 $\boldsymbol{x}^{01}$ 处的乘子是 $\omega_1 = \dfrac{1}{8}$，$\zeta_1 = 0$，在 $\boldsymbol{x}^{02}$ 点处的乘子是 $\omega_1 = \dfrac{3}{40}$ $\zeta_1 = \dfrac{1}{5}$. 且在 $\boldsymbol{x}^{01}$、$\boldsymbol{x}^{02}$ 处 $\nabla g_1(\boldsymbol{x}^{01})$、$\nabla h_1(\boldsymbol{x}^{01})$ 以及 $\nabla g_1(\boldsymbol{x}^{02})$、$\nabla h_1(\boldsymbol{x}^{02})$ 向量组均是线性无关的. 故知，$\boldsymbol{x}^{01}$ 处的核规划是

$$\min \quad f(\boldsymbol{x}) = x_1$$

$$\text{s.t.} \quad g_1(\boldsymbol{x}) = 16 - (x_1 - 4)^2 - x_2^2 \geqslant 0$$

而在 $\boldsymbol{x}^{02}$ 点的核规划是

$$\min \quad f(\boldsymbol{x}) = x_1$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = 16 - (x_1 - 4)^2 - x_2^2 \geqslant 0 \\ g_{l+1}(\boldsymbol{x}) = h_1(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 \geqslant 0 \end{cases}$$

可见，在 $\boldsymbol{x}^{01}$ 的核规划中，等式约束可以消去，在 $\boldsymbol{x}^{02}$ 核规划中，等式约束可用不等式 $h_1(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 完全替代.

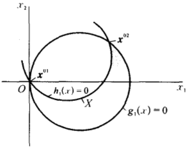


图 6.2.2.1

图 6.2.2.1 画出了原规划问题(P)的可行区域图. 其中 X 是原规划问题的可行区域. 图中用阴影表示的则是 $\boldsymbol{x}^{02}$ 点处的核规划的可行区域（局部）.

本节结束时，再对(6.2.1.10)式及 Φ_ω 矩阵的列向量的几何意义给出一个简要说明.

由(6.2.1.10)式可得到（在核规划意

[1] 引自《非线性规划》上册，M. Avriel，第 39 页～第 41 页例 3.1.4.

义上），

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=G^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix}i_1, i_2, \cdots, i_r\\1, 2, \cdots, m\end{Bmatrix}\widetilde{G}^{-1}\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}G\begin{Bmatrix}i_1, i_2, \cdots, i_r\\1, 2, \cdots, m\end{Bmatrix}\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$$

简写为

$$\nabla f=G^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1}G\cdot\nabla f \qquad \text{—(6.2.2.5)}$$

记 $$\hat{G}=G^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1}G\Rightarrow\nabla f=\hat{G}\cdot\nabla f$$

则$\hat{G}$是幂等的 Hermite 矩阵即正交投影矩阵. $\hat{G}$矩阵及(6.2.2.5)式表示，构造以G^{T}为基的子空间 L，$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$向量沿 $L^{\perp}$ 方向(即正交于 L 的方向)投影到 L，刚好还是$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$，故应有

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\in L$$

又由于(6.2.1.10)式，在 $\boldsymbol{x}^0$ 是局部极小值点时，

$$(GG^{\mathrm{T}})^{-1}G\cdot\nabla f=\boldsymbol{\omega}>\boldsymbol{0}$$

所以，$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$必要位于

$$\boldsymbol{y}=G^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}\quad \boldsymbol{h}\geqslant\boldsymbol{0}$$

组成的闭凸锥内. 而由 §5.8 节可知，$\boldsymbol{y}=G^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}$，$\boldsymbol{h}\geqslant\boldsymbol{0}$ 决定的集合刚好就是不等式组

$$G\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{x}\in R^m$$

决定的解空间的正法锥. 所以，$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$向量在 $\boldsymbol{x}^0$ 是局部极小值点时，一定要是 $G\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 解空间的正法锥中的向量.

现在再回到(6.2.1.13)～(6.2.1.13a)式的分析，在那里所说明的即是，若记

$$L=\{\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{y}=G^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}\quad \boldsymbol{h}\geqslant\boldsymbol{0}\}$$

知 $$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\in L$$

则几何上 L 是顶点在 R^m 原点的闭凸锥，过向量$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$的终点作与$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$正交的超平面 L_f，那么，L 与 L_f 的交集是一个凸组合. 这个凸组合的顶点是 $\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)t$，$t\geqslant 0$ 与 L_f 的交点. $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$即是这个凸组合中的一个点[1]. 那么，$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$一定能用凸组合中不多于 m 个顶点组成的(子)凸组合线性表出. 这些以不多于 m 个顶点所组成的(子)凸组合(可以将$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$以正线性组合方式表出)，

[1] 这里隐含了假设 $\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)\neq 0$，但这不影响以下的结论. 见本节附录.

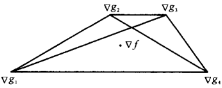


图 6.2.2.2

即构成了 x^0 点的核规划. 这可由右图 6.2.2.2 予以说明.

设 $m=3$, L 正法锥在 L_f 截平面上的图形如图 6.2.2.2. 则 $\nabla f(x^0)$ 可由下标为 $i=1,2,4$ 和 $i=1,3,4$ 的 $\nabla g_i(x^0)$ 向量以正线性组合的方式表出. x^0 点的核规划即是

$$\begin{cases}\min & f(x)\\ \text{s.t.} & g_i(x)\geqslant 0\quad i=1,2,4\end{cases}\qquad \begin{cases}\min & f(x)\\ \text{s.t.} & g_i(x)\geqslant 0\quad i=1,3,4\end{cases}$$

这就是核规划的几何意义. 而在正线性组合表出形式

$$\nabla f(x^0)=\sum_i \omega_i \nabla g_i(x^0)\quad i=1,2,4 \text{ or } i=1,3,4$$

中的乘子 ω_i 就是 Φ_ω 矩阵列向量中的正数分量. 且由于在 L_f 平面上的 ∇g_i, $i=1,2,4$(或 $i=1,3,4$) 顶点组成的凸组合必是一个单纯形, 所以 ω_i 乘子是唯一的, 即 Φ_ω 矩阵的最简形式一定也是唯一的. 反过来说, 这即是任何一个 $\nabla g_j(x^0)$ 向量组, 如果这一向量组的向量个数 >3, 且含有 $\nabla g_i(x^0)$, $i=1,2,4$ 或 $i=1,3,4$ 子向量组, 那么, 由线性组合

$$\nabla f(x^0)=\sum_j \omega_j \nabla g_j(x^0)$$

就总能化简为

$$\nabla f(x^0)=\sum_i \omega_i \nabla g_i(x^0)\quad i=1,2,4 \text{ or } i=1,3,4$$

附注: L 正法锥与 L_f 截平面的交集凸组合顶点在 L_f 子空间上的坐标表示

一般地设 $y\in R^m$, 将 y 理解为从 R^m 空间坐标原点出发的指向 $(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 点的向量 $\vec{y}$. 过 y 点, 作与 $\vec{y}$ 正交的超平面 L_y.

$$L_y=\{\alpha\mid \alpha=\Lambda_y z\quad z\in R^{m-1}\}$$

$$\Lambda_y=\begin{bmatrix}-\dfrac{y_2}{y_1}, & -\dfrac{y_3}{y_1}, & \cdots, & -\dfrac{y_m}{y_1}\\ & I_{(m-1)} & & \end{bmatrix}_{m\times(m-1)}\qquad (\text{设 } y_1\neq 0)$$

设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 是 $m\times n$ 阶实矩阵. 将 At, $t\geqslant 0$ 理解为决定了 n 条由 R^m 坐标系原点出发的射线 l_j,

$$l_j = \boldsymbol{a}^j t_j \quad t_j \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

其中 $\boldsymbol{a}^j$ 是 A 的第 j 列向量.

如果 l_j 与 L_y 相交,则其交点坐标即由 $\boldsymbol{z}_j$ 表示,这表示在 L_y 子空间上建立了 $Oz_1z_2\cdots z_{m-1}$ 坐标系. 且从

$$\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\alpha}^j = \boldsymbol{a}^j t_j \quad 及 \quad \boldsymbol{\alpha}^j = \Lambda_y \boldsymbol{z}_j \qquad —(6.2.2.6)$$

得到方程组

$$\boldsymbol{a}^j t_j - \Lambda_y \boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{y}$$

可写成为

$$\begin{bmatrix} a_{1j} & \dfrac{y_2}{y_1} & \dfrac{y_3}{y_1} & \cdots & \dfrac{y_m}{y_1} \\ a_{2j} & -1 & & & \boldsymbol{0} \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{1m} & \boldsymbol{0} & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_j \\ z_{1j} \\ \vdots \\ z_{(m-1)j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \qquad —(6.2.2.7)$$

用归纳法可证以下形式的矩阵 B 之行列式的表达式:

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & -1 & & \boldsymbol{0} \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{m1} & \boldsymbol{0} & & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{m-1} \cdot \left\{ b_{11} + \sum_{i=1}^{m-1} b_{(i+1)1} \cdot b_{1(i+1)} \right\}$$

将此结果运用于(6.2.2.7)式,可得,当

$$a_{1j} + \sum_{i=1}^{m-1} a_{(i+1)j} \frac{y_{i+1}}{y_1} \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}^j \neq 0$$

时(6.2.2.7)式有唯一解. 这里的几何意义很清楚.

设 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^j \neq 0$,则逆矩阵 B^{-1} 的第 1 行元素是 B_{1j},

$$\begin{aligned} B_{11} &= (-1)^{m-1} / |B| \\ B_{12} &= (-1)^{m-1} b_{12} / |B| \\ B_{13} &= (-1)^{m-1} b_{13} / |B| \\ &\vdots \end{aligned}$$

再将此结果运用到(6.2.2.7)式,即得

$$t_j = \frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}^j} \qquad —(6.2.2.8)$$

故 $t_j > 0$ 的充要条件是 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^j > 0$.

将这里分析的结果运用到非线性规划的一阶最优性条件中,将$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$看成是这里的 $\boldsymbol{y}$,Jacobi 矩阵

$$G^{\mathrm{T}} = [\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0),\ \nabla g_2(\boldsymbol{x}^0),\ \cdots,\ \nabla g_k(\boldsymbol{x}^0)]$$

看成是这里的矩阵 A,L_y 截平面用 L_f 符号表示.则

记 $\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0) = \nabla g^+(\boldsymbol{x}^0)$ 当$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\cdot\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0) > 0$,记$\nabla g_j^+(\boldsymbol{x}^0)$ 决定的 t_j 为 t_j^+.

向量$\nabla g_j^+(\boldsymbol{x}^0)$决定的射线 $l_j = \nabla g_j^+(\boldsymbol{x}^0)t_j$ 都在 L_y 超平面上有交点,且交点坐标由 $\boldsymbol{z}_j^+$ 按以上(6.2.2.7)决定.

将(6.2.2.8)代入(6.2.2.7)式可得

$$z_{ij} = a_{(i+1)j}t_j - y_{i+1} \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1 \qquad \text{—(6.2.2.9)}$$

并注意到若令

$$\boldsymbol{a}^j = \boldsymbol{y} \Rightarrow a_{(i+1)j} = y_{i+1} \quad t_j = 1 \Rightarrow z_{ij} = 0$$

即 $\boldsymbol{y}$ 点在 L_y 截平面坐标系上是 $Oz_1z_2\cdots z_{m-1}$ 的原点.

注意 $\boldsymbol{y}$ 与$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$的对应性质,故$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$在 L_f 截平面上 $Oz_1z_2\cdots z_{m-1}$ 坐标系的坐标是原点,并设$\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0)$中的任一个均有

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\cdot\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0) \neq 0$$

且记 $\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0) = \nabla g^-(\boldsymbol{x}^0)$ 当$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\cdot\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0) < 0$,记$\nabla g_j^-(\boldsymbol{x}^0)$ 对应的 t_j 为 t_j^-,向量$\nabla g_j^-(\boldsymbol{x}^0)$决定的射线 l_j 在 L_f 截平面上的坐标为 $\boldsymbol{z}_j^-$.

将 $\boldsymbol{y}$ 看成是$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$,$\boldsymbol{a}^j$ 看成是$\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0)$.取一组权数

$$s_j^+,\ s_j^- \geqslant 0 \qquad \sum_j s_j^+ + \sum_j s_j^- = 1$$

利用(6.2.2.6)式的关系,有

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) + \sum_j s_j^+\boldsymbol{\alpha}_+^j + \sum_j s_j^-\boldsymbol{\alpha}_-^j = \sum_j s_j^+t_j^+\nabla g_j^+(\boldsymbol{x}^0) + \sum_j s_j^-t_j^-\nabla g_j^-(\boldsymbol{x}^0)$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_+^j = \Lambda_y\boldsymbol{z}_j^+ \quad \boldsymbol{\alpha}_-^j = \Lambda_y\boldsymbol{z}_j^-$$

故

$$\sum_j s_j^+\boldsymbol{\alpha}_+^j + \sum_j s_j^-\boldsymbol{\alpha}_-^j = \Lambda_y\Big(\sum_j s_j^+\boldsymbol{z}_j^+ + \sum_j s_j^-\boldsymbol{z}_j^-\Big)$$

记 $\boldsymbol{z}_f$ 是$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$在 L_f 截平面上交点的坐标,那么,由一阶最优性条件,应有

$$\sum_j s_j^+\boldsymbol{z}_j^+ + \sum_j s_j^-\boldsymbol{z}_j^- = \boldsymbol{z}_f = \boldsymbol{0}$$

故得

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \sum_j s_j^+ t_j^+ \nabla g_j^+(\boldsymbol{x}^0) + \sum_j s_j^- t_j^- \nabla g_j^-(\boldsymbol{x}^0)$$

由于 s_j^+、$s_j^- \geqslant 0$，$t_j^+ > 0$，$t_j^- < 0$. 故若 $\boldsymbol{x}^0$ 是局部极小值点，必只能有

$$\omega_j^+ = s_j^+ t_j^+ \geqslant 0$$

$$\omega_j^- = s_j^- t_j^- \geqslant 0 \Rightarrow s_j^- = 0 \quad \omega_j^- = 0$$

便得

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \sum_j \omega_j^+ \nabla g_j^+(\boldsymbol{x}^0) \qquad —(6.2.2.10)$$

由于 $\omega_j^- = 0$，即得到在一阶条件中，所有$\nabla g_j^-(\boldsymbol{x}^0)$对应的约束条件 $g_j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$（在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处）是可以省略的. 这就是在用(P_h)规划来替换等式—不等式混合约束的(P)规划时，$h_j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 与 $-h_j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 形式的约束条件一定可以(至少)省略其中一个的原因.

现在考虑$\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0)$向量组中含有

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \cdot \nabla g_j(\boldsymbol{x}^0) = 0$$

的情形. 首先指出，在以下的分析中会具体说明能够运用一阶最优性条件的必要前提是不能是所有的$\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0)$都是与$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$正交的. 道理很明显，此时(6.2.2.10)式仅能在 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{0}$ 时成立，这时 $\boldsymbol{x}^0$ 点是否是局部极小值点一般不再能使用 Lagrange 乘子法而应直接使用无约束条件下的极值判别方法. 再由以上的结论，不用再考虑$\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0)$向量组中可能含有的$\nabla g_j^-(\boldsymbol{x}^0)$向量，而简单地设$\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0)$向量组由$\nabla g_j^+(\boldsymbol{x}^0)$与$\nabla g_j^0(\boldsymbol{x}^0)$组成. 这里，记

$$\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0) = \nabla g_j^0(\boldsymbol{x}^0) \qquad \text{当} \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \cdot \nabla g_j(\boldsymbol{x}^0) = 0$$

注意，按以上关于 L_f 截平面的定义，$\nabla g_j^0(\boldsymbol{x}^0)$与 L_f 截平面没有交点（即(6.2.2.7)式无解）. 但这只要修改关于 L_f 截平面的定义即可解决. 对此仅用以下图示予以说明.

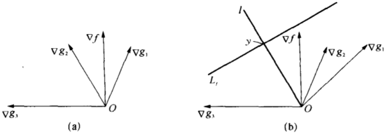


图 6.2.2.3

在图 6.2.2.3 中,∇g_3 是与∇f 正交的而 $\nabla g_{1,2}=\nabla g_{1,2}^{+}$. 其中(a)图的意思是说,若$\nabla f$ 可以由∇g_1^{+}, ∇g_2^{+} 的正线性组合表出,那么,可以直接令$\nabla g_3(\boldsymbol{x}^0)$对应的乘子 $\omega_3=0$, 即约束条件 $g_3(\boldsymbol{x})\geqslant 0$ 可以略去. 若否,即如(b)图所示,∇f 不能由∇g_1^{+}, ∇g_2^{+} 的正线性组合表出,则可取从原点出发的直线 l,使$\nabla g_{1,2,3}$及∇f均不与 l 正交,这显然总是可取到的,然后,令 L_f 是与 l 正交的截平面,并可以以上方法求得射线 $l_j=\nabla g_j t_j \quad j=1,2,3,\ t_j>0$ 与 L_f 的交点坐标 $\boldsymbol{z}_j$,以及 $l_f=\nabla f\cdot t_f$ 射线与 L_f 的交点坐标 $\boldsymbol{z}_f$. 以下的分析基本与上文类同. 在图(b)所示情况下,最终可得

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=\frac{s_1t_1}{t_f}\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0)+\frac{s_2t_2}{t_f}\nabla g_2(\boldsymbol{x}^0)+\frac{s_3t_3}{t_f}\nabla g_3(\boldsymbol{x}^0)$$

其中 $s_{1,2,3}\geqslant 0,\ s_1+s_2+s_3=1$.

显然就核规划的意义讲,可得

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=\frac{s_2t_2}{t_f}\nabla g_2(\boldsymbol{x}^0)+\frac{s_3t_3}{t_f}\nabla g_3(\boldsymbol{x}^0)\quad s_{2,3}>0\quad s_2+s_3=1$$

从而

$$\omega_1=0\quad \omega_2=\frac{s_2t_2}{t_f}\quad \omega_3=\frac{s_3t_3}{t_f}$$

即为核规划意义上的 Lagrange 乘子.

这里,记 l 与 L_f 的交点为 $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}\in R^m$. 现$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$(或其延长线)与 L_f 的交点 $\boldsymbol{z}_f$ 不再是 $Oz_1z_2\cdots z_{m-1}$ 坐标系的原点. 由(6.2.2.9)式可得

$$\boldsymbol{z}_f=\begin{bmatrix} f_2'(\boldsymbol{x}^0)t_f-y_2\\ f_3'(\boldsymbol{x}^0)t_f-y_3\\ \vdots\\ f_m'(\boldsymbol{x}^0)t_f-y_m\end{bmatrix}\qquad t_f=\frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\nabla f(\boldsymbol{x}^0)}>0\qquad f_j'(\boldsymbol{x}^0)=\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}$$

则

$$\Lambda_y\boldsymbol{z}_f=\begin{bmatrix} -\left(\sum_2^m\frac{y_j}{y_1}f_j'(\boldsymbol{x}^0)t_f-\sum_2^m\frac{y_j}{y_1}\right)\\ f_2'(\boldsymbol{x}^0)t_f-y_2\\ \vdots\\ f_m'(\boldsymbol{x}^0)t_f-y_m\end{bmatrix}$$

注意到

$$\sum_2^m\frac{y_j}{y_1}f'(\boldsymbol{x}^0)t_f-\sum_2^m\frac{y_j}{y_1}=\frac{1}{y_1}((\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\nabla f(\boldsymbol{x}^0)-y_1f_1'(\boldsymbol{x}^0))t_f-(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-y_1^2))$$

$$=-(f_1'(\boldsymbol{x}^0)t_f-y_1)$$

故

$$\Lambda_y\boldsymbol{z}_f=t_f\cdot\nabla f(\boldsymbol{x}^0)-\boldsymbol{y}$$

则仍可取一组权数 s_j^+、$s_j^0\geqslant 0$ $\sum_j s_j^+ + \sum_j s_j^0=1$,(利用(6.2.2.6)式)作

$$\boldsymbol{y}+\sum_j s_j^+\boldsymbol{\alpha}_+^j+\sum_j s_j^0\boldsymbol{\alpha}_0^j=\sum_j s_j^+t_j^+\boldsymbol{a}_+^j+\sum_j s_j^0t_j^0\boldsymbol{a}_0^j$$

将 $\boldsymbol{a}_+^j$、$\boldsymbol{a}_0^j$ 分别对应于$\nabla g_j^+(\boldsymbol{x}^0)$、$\nabla g_j^0(\boldsymbol{x}^0)$,并从

$$\sum_j s_j^+\boldsymbol{\alpha}_+^j+\sum_j s_j^0\boldsymbol{\alpha}_0^j=\Lambda_y\cdot\left(\sum_j s_j^+\boldsymbol{z}_j^+ + \sum_j s_j^0\boldsymbol{z}_j^0\right)$$

有

$$\sum_j s_j^+\boldsymbol{z}_j^+ + \sum_j s_j^0\boldsymbol{z}_j^0=\boldsymbol{z}_f\Rightarrow\sum_j s_j^+\boldsymbol{\alpha}_+^j+\sum_j s_j^0\boldsymbol{\alpha}_0^j=t_f\nabla f(\boldsymbol{x}^0)-\boldsymbol{y}$$

即可得到

$$t_f\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=\sum_j s_j^+t_j^+\nabla g_j^+(\boldsymbol{x}^0)+\sum_j s_j^0t_j^0\nabla g_j^0(\boldsymbol{x}^0)$$

取 $\omega_j^+=s_j^+t_j^+\geqslant 0\quad \omega_j^0=s_j^0t_j^0\geqslant 0$

这就是

$$t_f\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=\sum_j\omega_j^+\nabla g_j^+(\boldsymbol{x}^0)+\sum_j\omega_j^0\nabla g_j^0(\boldsymbol{x}^0)\qquad -(6.2.2.11)$$

这即是 **Fritz John** 最初的成果的形式.但注意,这里 t_f 是大于 0 的.

§6.3 线性化锥、闭切锥、正法锥——一阶约束品性

§6.3.1 一阶约束品性与闭切锥引理

仍然考虑规划问题(P1),局部极小值点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的线性化锥是

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0)=\{\boldsymbol{z}\mid\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}\geqslant 0\quad i\in I(\boldsymbol{x}^0)\}\qquad -(6.3.1.1)$$

用 $S(X,\boldsymbol{x}^0)$表示 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的闭切锥.用符号 A'表示集合 A 的正法锥.一阶约束品性是指在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处成立

$$(Z^1(\boldsymbol{x}^0))'=(S(X,\boldsymbol{x}^0))'\qquad -(6.1.2)$$

或 $$Z^1(\boldsymbol{x}^0) = S(X, \boldsymbol{x}^0) \qquad —(6.1.4)$$

由正法锥的定义即可知道，

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) = S(X, \boldsymbol{x}^0) \Rightarrow (Z^1(\boldsymbol{x}^0))' = (S(X, \boldsymbol{x}^0))' \qquad —(6.3.1.2)$$

以下考虑能否成立

$$(Z^1(\boldsymbol{x}^0))' = (S(X, \boldsymbol{x}^0))' \Rightarrow Z^1(\boldsymbol{x}^0) = S(X, \boldsymbol{x}^0) \qquad —(6.3.1.3)$$

的问题.

由§5.8节的分析可知，(6.3.1.3)式即对应于那里所说的“反演问题”. 可简要地重述一下那里的结论.

当 $\boldsymbol{y} \in (Z^1(\boldsymbol{x}^0))' = (S(X, \boldsymbol{x}^0))'$，并注意到 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$、$S(X, \boldsymbol{x}^0)$都是以坐标系原点为顶点的锥，因此它们只能是某个形如 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 不等式组的解集合. 并且若 $\boldsymbol{y}$ 可表成为

$$\boldsymbol{y} = \widetilde{A}\boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{h} \in R_+^n$$

的形式，其中$\widetilde{A}$是一个 $m \times n$ 阶矩阵，则由推论 5.8.2.1，总能够反演出一个矩阵 A，使 $\boldsymbol{y}$ 是不等式方程组

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

的解集合 $P(A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 的正法锥的向量，并且，不论$\widetilde{A}$矩阵的列向量是否是线性相关的，所反演出的矩阵 A(在最简形式意义上)是唯一的，即解集合 $P(\cdot)$是唯一的. 所以，应当有

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) = P(\cdot) = S(X, \boldsymbol{x}^0)$$

即(6.3.1.3)式成立. 这一情形所对应的是 $A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ 为相容方程组.

当 $\boldsymbol{y} \in (Z^1(\boldsymbol{x}^0))' = (S(X, \boldsymbol{x}^0))'$，并且 $\boldsymbol{y}$ 可表成为

$$\boldsymbol{y} = \widetilde{B}\boldsymbol{s} + \widetilde{A}\boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{s} \in R^k \quad \boldsymbol{h} \in R_+^n$$

的形式，其中$\widetilde{B}$为 $m \times k$ 阶矩阵、$\widetilde{A}$为 $m \times n$ 阶矩阵. 那么，$\boldsymbol{y}$ 是等式、不等式方程组

$$\begin{cases} \widetilde{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ \widetilde{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

的解集合(记为 $P(\widetilde{A}^{\mathrm{T}}, \widetilde{B}^{\mathrm{T}})$)的正法锥的向量. 并且解集合 $P(\widetilde{A}^{\mathrm{T}}, \widetilde{B}^{\mathrm{T}})$具有唯一性. 因此，若计不等式组

$$A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

的解 $P(A)=Z^1(\boldsymbol{x}^0)$，由 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$的定义这样表述是可以的，那么，总有

$$P(\widetilde{A}^{\mathrm{T}},\ \widetilde{B}^{\mathrm{T}})=P(A)$$

成立.从而(6.3.1.3)式依旧是成立的.而这里所对应的情形即是 $A\boldsymbol{x}>\mathbf{0}$ 为矛盾方程组.

所以(6.3.1.3)式总是成立的.从几何意义上讲，可参见图 5.8.1.3，则(6.3.1.2)式的意思是说，若已知 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)=S(X,\ \boldsymbol{x}^0)$ 比如说是图中的阴影区域 P，那么，P 的正法锥 P'由 $b^{1,2}u_{1,2}$与$\widetilde{b}^{1,2}u_{1,2}$这 4 条射线之间的两两正交关系，可唯一地被确定从而有(6.3.1.2)式；反之，若已知 $(Z^1(\boldsymbol{x}^0))'=(S(X,\ \boldsymbol{x}^0))'$，比如图中的 P'区域(含阴影区域在内)，那么，基于同样理由，亦可唯一地确定出 P 即阴影区域，从而(6.3.1.3)式成立.由此即知(6.1.2)与(6.1.4)完全等价.

但(6.1.4)要求的一阶约束品性即在局部极小值点 $\boldsymbol{x}^0$ 处可行区域 X 的线性化锥等于闭切锥这一品性的成立并非是无条件的.为说明这一点应说明闭切锥的性质以及给出其构造.

为此先说明当 $\boldsymbol{x}^0$ 是可行区域 X 的局部极小值点时，在 $\boldsymbol{x}^0$ 邻域内的可行方向向量 $\boldsymbol{z}$ 的性状.由于 $\boldsymbol{x}^0$ 是局部极小值点，那么，对于充分小的正数 θ，必有 $f(\boldsymbol{x}^0+\theta\boldsymbol{z})\geqslant f(\boldsymbol{x}^0)$. 这里 $\boldsymbol{z}$ 是可行方向向量.可知这样的 $\boldsymbol{z}\in Z^1(\boldsymbol{x}^0)$. 因为若 $\boldsymbol{z}\notin Z^1(\boldsymbol{x}^0)$，即是说有某个 $k\in I(\boldsymbol{x}^0)$，使

$$\nabla g_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}<0$$

成立.由 $g_k(\boldsymbol{x})$的可微性假设，有

$$g_k(\boldsymbol{x}^0+\theta\boldsymbol{z})=g_k(\boldsymbol{x}^0)+\nabla g_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\cdot\theta\boldsymbol{z}+\theta\varepsilon_k(\theta)$$

其中 $\varepsilon_k(\theta)\to 0$，当 $\theta\to 0$. 因此，当 $\theta\to 0$ 时，有 $\nabla g_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\cdot\theta\boldsymbol{z}+\theta\varepsilon_k(\theta)<0$ 并且因为 $g_k(\boldsymbol{x}^0)=0$，便从前一式得到对于任意小的 θ 成立

$$g_k(\boldsymbol{x}^0+\theta\boldsymbol{z})<0$$

但这即与 $\boldsymbol{z}$ 是可行方向向量的定义相矛盾.所以，必有对于所有的 $i\in I(\boldsymbol{x}^0)$，成立

$$\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}\geqslant 0$$

即知 $\boldsymbol{z}\in Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ [1].

闭切锥引理 向量 $\boldsymbol{z}$ 包含在闭切锥 $S(X,\ \boldsymbol{x}^0)$中的充要条件是：存在一列收敛于$\boldsymbol{x}^0$的向量 $\{\boldsymbol{x}^k\}\subset X$，并存在一列非负数$\{a^k\}$，使序列$\{a^k(\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{x}^0)\}$收敛

[1] 以上关于 $\boldsymbol{x}^0$ 点处可行方向向量 $\boldsymbol{z}\in Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 的论述，引自《非线性规划》上册，M. Avriel，第26～27 页.

于 z.

■

由这一引理可以知道，令 $\boldsymbol{\alpha}$ 是一个单位向量 $\|\boldsymbol{\alpha}\| = 1$，并设存在一个收敛于 $\boldsymbol{x}^0$ 的点列 $\{\boldsymbol{x}^k\} \subset X$，$\boldsymbol{x}^k \neq \boldsymbol{x}^0$，有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^0}{\|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^0\|} = \boldsymbol{\alpha} \qquad —(6.3.1.4)$$

就说点列 $\{\boldsymbol{x}^k\}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向收敛于 $\boldsymbol{x}^0$. 于是可行集合 X 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的闭切锥，包含 $\boldsymbol{\alpha}$ 的非负倍数的所有向量. 并由以上引理应有 $\boldsymbol{\alpha} \in S(X, \boldsymbol{x}^0)$. 所以反过来说，由 $\boldsymbol{\alpha} \in S(X, \boldsymbol{x}^0)$ 即可推出存在一列 $\{\boldsymbol{x}^k\} \subset X$，且 $\{\boldsymbol{x}^k\}$ 沿 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向收敛于 $\boldsymbol{x}^0$[1].

这里的意思是说，如果(6.3.1.4)式成立，则可取到一数列 $\{a^k\}$，

$$a^k = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^0\|} \quad (\boldsymbol{x}^k \to \boldsymbol{x}^0 \quad k \to +\infty)$$

则

$$\lim_{k\to\infty}(a^k(\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^0)) = \boldsymbol{\alpha}$$

故 $\boldsymbol{\alpha} \in S(X, \boldsymbol{x}^0)$. 当取

$$a^k = \frac{t}{\|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^0\|} \quad t > 0$$

则可在假设条件

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{x}^0 \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^0}{\|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^0\|} = \boldsymbol{\alpha}$$

之下得到

$$\lim_{k\to\infty}(a^k(\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^0)) = t \cdot \boldsymbol{\alpha}$$

故知 $t\boldsymbol{\alpha} \in S(X, \boldsymbol{x}^0)$. 即当 $\boldsymbol{\alpha} \in S(X, \boldsymbol{x}^0)$，则任取 $t > 0$，$t\boldsymbol{\alpha} \in S(X, \boldsymbol{x}^0)$.

另外，可知有 $\boldsymbol{0} \in S(X, \boldsymbol{x}^0)$. 因为可以取一列 $t_n > 0$，且 $t_n \to 0$，$n \to \infty$，由于 $S(X, \boldsymbol{x}^0)$ 是闭集，$t_n\boldsymbol{\alpha} \in S(X, \boldsymbol{x}^0)$，当 $\boldsymbol{\alpha} \in S(X, \boldsymbol{x}^0)$. 故取任一 $\boldsymbol{\alpha} \in S(X, \boldsymbol{x}^0)$，都可以有

$$\lim_{n\to\infty} t_n\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0} \in S(X, \boldsymbol{x}^0)$$

以上便是闭切锥的基本性质.

§ 6.3.2 闭切锥的构造——一阶约束品性不成立的情形

由上已可知，当一个(P1)规划，其可行集合 X 是一个单点集合

[1] 由闭切锥引理至此的内容，引自《非线性规划》上册，M. Avriel，第 34～36 页，符号有所改动.

$$X = \{\boldsymbol{x}^0\}$$

那么显然只能有

$$S(X, \boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{0}\}$$

但 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的线性化锥 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 却往往不是一个单点集，即常可以有

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) \neq S(X, \boldsymbol{x}^0)$$

例 6.3.2.1 给定约束[1]

$$g_1(\boldsymbol{x}) = 1 - (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 5)^2 \geqslant 0$$

$$g_2(\boldsymbol{x}) = 1 - (x_1 - 2)^2 - \left(\frac{x_2}{4}\right)^2 \geqslant 0$$

$$g_3(\boldsymbol{x}) = x_1 - 2 \geqslant 0$$

则 $X = \{\boldsymbol{x}^0\}$，$\boldsymbol{x}^0 = (2, 4)^{\mathrm{T}}$，即可行集合 X 是单点集合，

$$S(X, \boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{0}\}$$

图 6.3.2.1 给出了可行集合 X 的表示. 其中 $g_1(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 的区域是图中圆的内部阴影区域 g_1，而 $g_2(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 则是椭圆部分的阴影区域 g_2. 这 2 个区域只在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处相切. $g_3(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 是过 $\boldsymbol{x}^0$ 点垂直线的右半平面. 所以可行集合为 $\boldsymbol{x}^0$ 单点集合.

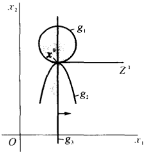


图 6.3.2.1

但由线性化锥 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 的定义，$Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 中的元素 $\boldsymbol{z}$ 是以下不等式方程组的解. 注意到 $I(\boldsymbol{x}^0) = \{1, 2, 3\}$，得

$$G(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

有

$$G(\boldsymbol{x}^0) \cdot \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0}$$

解之，得到

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad u \geqslant 0$$

故

[1] 引自《非线性规划》上册，M. Avriel，第 56 页，第 3.0 题.

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0)=\left\{\boldsymbol{z}\,\middle|\,\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u\quad u\geqslant 0\right\}$$

或者说

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{z}\quad \boldsymbol{z}\in Z^1(\boldsymbol{x}^0)$$

即是图 6.3.2.1 中从 $\boldsymbol{x}^0$ 出发且指向 x_1 正方向的水平射线就是 Z^1. 所以

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0)\neq S(X,\ \boldsymbol{x}^0)$$

容易理解,若求出$(S(X,\ \boldsymbol{x}^0))'$,应当是

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{0}\geqslant 0\quad \boldsymbol{y}\in(S(X,\ \boldsymbol{x}^0))'$$

故$(S(X,\ \boldsymbol{x}^0))'$中包含从 $\boldsymbol{x}^0$ 出发的任意方向的方向向量 $\boldsymbol{y}$. 换句话说,$(S(X,\ \boldsymbol{x}^0))'$是整个坐标平面.

而由

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\geqslant \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{z}\in Z^1(\boldsymbol{x}^0)\quad \boldsymbol{y}\in(Z^1(\boldsymbol{x}^0))'$$

可得属于正法锥$(Z^1(\boldsymbol{x}^0))'$的方向向量 $\boldsymbol{y}$ 应是

$$y_1\geqslant 0$$

不等式组的解. 可知

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}h\quad -\infty\leqslant t\leqslant+\infty\quad h\geqslant 0$$

由此方向向量作 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{y}$ 给出的是 g_3 垂直线的右半平面[1]. 显然

$$(Z^1(\boldsymbol{x}^0))'\neq(S(X,\ \boldsymbol{x}^0))'$$

当然,我们也可以构造出 $X=\{\boldsymbol{x}^0\}$ 单点集,同时又有

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0)=S(X,\ \boldsymbol{x}^0)$$

的例子. 比如,在例 6.3.2.1 的约束条件中添加上以下约束条件

$$g_4(\boldsymbol{x})=-x_1+x_2-2\geqslant 0$$

易知,此时,仍有 $X=\{\boldsymbol{x}^0\}$,但可有

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0)=S(X,\ \boldsymbol{x}^0)=\{\boldsymbol{0}\}$$

---

[1] 可以将这里的 $(S(X,\ \boldsymbol{x}^0))'$、$(Z^1(\boldsymbol{x}^0))'$ 分别看成是顶点在 $\boldsymbol{x}^0$ 的 2 个闭锥,$(S(X,\ \boldsymbol{x}^0))'$ 即为全平面,而$(Z^1(\boldsymbol{x}^0))'$ 则为半平面.

可行集合 X 为一个点 $\boldsymbol{x}^0$ 的情形——还可以拓展为 X 集合是离散点的集合 $X=\{\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^M\}$ 的情形——虽然也是一般规划问题的特例，但在此情形下，是用不着再考虑 $\boldsymbol{x}^0$ 点(或 $\boldsymbol{x}^i$ 点)的最优性条件的，因为 $\boldsymbol{x}^0$ 点(或 $\boldsymbol{x}^i$)点就是 X 的局部极小值点(同时也是 X 的局部极大值点). 所以可以将这些情形排除在外. 具体地讲，本书以下部分仅考虑规划问题(P1)的可行集合 X 是 Euclid 空间 R^m 的连通子集的情形. 换句话说，仅当可行集合 X 是 Euclid 空间的连通子集时，对 $\boldsymbol{x}^0 \in X$ 的点作 Kuhn - Tucker 条件的检验才是有一般意义的.

定义 6.3.2.1 若规划(P1)的可行集合 X 是 Euclid 空间 R^m 的连通子集(并且至少有 $\boldsymbol{x}^1$、$\boldsymbol{x}^2 \in X$, $\boldsymbol{x}^1 \neq \boldsymbol{x}^2$)，则称 X 为规划(P1)的可行区域. ■

由连通集的性质可知，若 $E \subset R^m$ 是连通集，则任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$, 都可以用一条位于 E 内的由有限条直线段组成的折线相连接[1]，即 Euclid 空间的连通子集均是道路连通的.

推论 6.3.2.1 设 X 是规划(P1)的可行区域，$\boldsymbol{x}^0 \in X$ 是局部极小值点，则闭切锥 $S(X, \boldsymbol{x}^0)-\{\boldsymbol{0}\} \neq \varnothing$. ■

证明: 因为 X 是(P1)的可行区域，由定义 6.3.2.1，有 $\boldsymbol{x}^1 \in X$, $\boldsymbol{x}^1 \neq \boldsymbol{x}^0$，且 $\boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{x}^1$ 之间可用一条折线连接. 设这条折线是由 M 个直线段 l_i, $i=1, 2, \cdots, M$ 连成. l_i 可表成

$$l_i: \boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}_{i-1} + b\boldsymbol{x}_i \quad a, b \in [0, 1] \quad a+b=1 \quad \boldsymbol{x}_i \in X$$

其中令 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{x}_M = \boldsymbol{x}^1$.

设 $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}^0$，若否就可以剔除 $\boldsymbol{x}_1$，重新对下标编号令 $\boldsymbol{x}_2$ 为 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_3$ 为 $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots$. 就可以有 $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}^0$，否则再次剔除 $\boldsymbol{x}_1$，并继续对下标重新编号，最终，要么找到原始下标编号 $\boldsymbol{x}_i$ 序列中的某个 $\boldsymbol{x}_k$, $1 \leqslant k \leqslant M-1$ 有 $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{x}^0$，且在现在的下标编号 $\boldsymbol{x}_i$ 序列中这个 $\boldsymbol{x}_k$ 已被编为 $\boldsymbol{x}_1$；要么就是原始下标编号 $\boldsymbol{x}_i$ 序列中的 $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}^0$, $i=1, 2, \cdots, M-1$，故现在 $M=1$，且 $\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}_1$，由上已设的 $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}^1 \neq \boldsymbol{x}^0$. 故而，我们总可以设 $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}^0$ 成立.

再由连通性，应有

$$l_1: \boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}^0 + b\boldsymbol{x}_1 \subset X, \ a, b \in [0, 1] \quad a+b=1$$

故可作

$$\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{x}^0 + \frac{1}{k}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}^0) \in X \quad k=1, 2, \cdots$$

当 $k \to \infty$ $\quad \boldsymbol{x}^k \to \boldsymbol{x}^0$. 再作

---

[1] 《数学词典》谷超豪主编. 第 317 页“连通集”(*conected sets*). 上海辞书出版社，1992 年.

$$z^1 = \frac{x_1 - x^0}{\| x_1 - x^0 \|} \neq 0 \quad (\because\ x_1 \neq x^0)$$

$$a^k = \frac{k}{\| x_1 - x^0 \|} > 0$$

有

$$\lim_{k \to \infty} (a^k (x^k - x^0)) = z^1$$

由闭切锥引理即得 $z^1 \in S(X,\ x^0)$ 且 $z^1 \neq 0$. 即证.

从几何上讲,闭切锥 $S(X,\ x^0)$的元素可以用以下方式确定:将坐标系的原点平移至 x^0,取 X 中的一个点列 $\{x^k\} \subset X$ 作从 x^0 点出发指向 x^k 的射线族 l_k,则在 $x^k \to x^0$ 时,l_k 就趋近于一条属于 $S(X,\ x^0)$的射线 l. 见下图示[1].

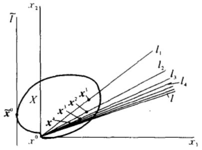


图 6.3.2.2

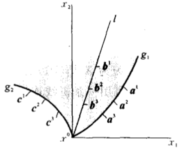


图 6.3.2.3

再如,对于如图 6.3.2.3 所示,其上的阴影区域为可行区域 X. X 的边界由 $g_{1,2}$ 曲线组成. 任取 $x \in X$,若作

$$x^N = x^0 + \frac{1}{N}(x - x^0) \quad \text{对任意 } N \geq 1 \quad \text{有 } x^N \in X \text{—(6.3.2.1)}$$

则表示连接 x^0 与 x 的直线段(全部)属于 X. 这就可取点列

$$x^k = x^0 + \frac{1}{k}(x - x^0) \quad k = 1,\ 2,\ \cdots$$

有 $x^k \in X$ 且 $x^k \to x^0$ 当 $k \to \infty$. 如图中的射线 l 上的点列$\{b^i\}$. 并且,记

$$\frac{x^k - x^0}{\| x^k - x^0 \|} = \frac{x - x^0}{\| x - x^0 \|} = \beta$$

则方向向量 $\beta \in S(X,\ x^0)$. 易于理解,X 的(拟)凸边界(如 g_1)上的点 a^i,也符合(6.3.2.1)式,即

〔1〕 引自《非线性规划》上册,M. Avriel,第 36 页及图 3.5.

$$\boldsymbol{x}_i^N = \boldsymbol{x}^0 + \frac{1}{N}(\boldsymbol{a}^i - \boldsymbol{x}^0) \in X \quad N \geqslant 1$$

仅对于如 g_2 所示的凹曲线组成的边界上的点 $\boldsymbol{c}^i$,(6.3.2.1)式就不成立了.因此,现在放松关于方向向量 $\boldsymbol{z}$ 的定义,规定 $\boldsymbol{z}$ 总是指

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0 \qquad \boldsymbol{x} \in X$$

在这个定义中,不再要求

$$a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}^0 \in X \quad a, b \in [0, 1], a + b = 1$$

故取 g_1、g_2 边界上的点列 $\{\boldsymbol{a}^i\}$、$\{\boldsymbol{c}^i\}$,有

$$\boldsymbol{a}^i \to \boldsymbol{x}^0, \ \boldsymbol{c}^i \to \boldsymbol{x}^0 \quad i \to \infty$$

再作

$$\boldsymbol{\beta}_a^i = \frac{\boldsymbol{a}^i - \boldsymbol{x}^0}{\|\boldsymbol{a}^i - \boldsymbol{x}^0\|} \quad \boldsymbol{\beta}_c^i = \frac{\boldsymbol{c}^i - \boldsymbol{x}^0}{\|\boldsymbol{c}^i - \boldsymbol{x}^0\|}$$

则

$$\lim_{i\to\infty} \boldsymbol{\beta}_a^i = \left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\right)^+ \qquad \lim_{i\to\infty} \boldsymbol{\beta}_c^i = \left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\right)^-$$

其中

$$\left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\right)^- = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_1 < 0}} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \quad \text{且 } g_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) = 0$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\right)^+ = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_1 > 0}} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \quad \text{且 } g_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) = 0$$

即 $\left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\right)^-$ 是隐函数

$$g_2(x_1, x_2) = 0$$

决定的曲线

$$x_2 = f_2(x_1)$$

在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处即坐标系原点处的左导数.同理,$\left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\right)^+$ 是隐函数

$$g_1(x_1, x_2) = 0$$

决定的曲线

$$x_2 = f_1(x_1)$$

在坐标系原点处的右导数. 由于 $g_{1,2}$ 曲线二阶可导，故

$$\boldsymbol{\beta}_a = \left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\right)^+ \quad \boldsymbol{\beta}_c = \left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\right)^-$$

存在，由闭切锥引理，

$$\boldsymbol{\beta}_a, \boldsymbol{\beta}_c \in S(X, \boldsymbol{x}^0)$$

最终可得图 6.3.2.3 中的可行区域 X 的闭切锥 $S(X, \boldsymbol{x}^0)$ 的图形如图 6.3.2.4 所示(阴影区域). $S(X, \boldsymbol{x}^0)$ 是由射线 l_1、l_2 所夹成的且顶点在坐标系原点的锥. l_1、l_2 射线的方向向量就是 $\boldsymbol{\beta}_a$ 和 $\boldsymbol{\beta}_c$，即 $l_{1,2}$ 其实就是 $g_{1,2}$ 边界曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的(半)切线.

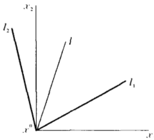


图 6.3.2.4

很明显，在图 6.3.2.3 情形下，由不等式组

$$\begin{cases} \nabla g_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant 0 \\ \nabla g_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant 0 \end{cases}$$

决定的线性化锥 $Z^1(\boldsymbol{x}^0) = S(X, \boldsymbol{x}^0)$.

将以上的分析推广到任意维 Euclid 空间 R^m 上. 设 X 是可行区域，$X \subset R^m$，则由上文所述，可取到 $\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1 \in X, \boldsymbol{x}^1 \neq \boldsymbol{x}^0$，且 $a\boldsymbol{x}^0 + b\boldsymbol{x}^1 \in X, a, b \in [0, 1]$ $a + b = 1$ 作

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^0}{\| \boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^0 \|} \neq \boldsymbol{0} \qquad \text{—(6.3.2.2)}$$

以及方程

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0$$

的解

$$\boldsymbol{\alpha} = \Lambda\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R^{m-1} \qquad \text{—(6.3.2.2a)}$$

其中 Λ 为基础解系矩阵.

则

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\alpha}t + \boldsymbol{\beta}s \quad t, s \in R$$

对所有的 $\boldsymbol{u} \in R^{m-1}, t, s \in R$

上式可遍取 R^m 空间的点. 这里，若取定一个向量 $\boldsymbol{u}$，则上式仍然是决定了一个 R^m 空间上的截平面 L，且 $L \cap X$ 非空. 同时，在 L 上定义了一个原点在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的

正交坐标系 Ots.

由

$$g_i(\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{\alpha}t+\boldsymbol{\beta}s)=0 \quad i\in I(\boldsymbol{x}^0) \qquad —(6.3.2.4)$$

决定了约束函数 $g_i(\boldsymbol{x})=0$ 与 L 截平面的交曲线 g_i. 且先假设

$$\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}=0 \quad \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta}=0 \qquad —(6.3.2.5)$$

两式不同时成立. 故若

$$\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}\neq 0$$

由(6.3.2.2)式

$$\frac{\partial g_i}{\partial t}=\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}\neq 0$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial s}=\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta}$$

(6.3.2.2)式可决定(在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的邻域内)存在以下形式的函数

$$t=t_i(s)$$

反之,若 $\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta}\neq 0$, 则可知存在以下形式的函数

$$s=s_i(t)$$

这两种形式本质上是一样的. 故以下仅以 $s=s_i(t)$ 形式为例.

取 $t_n\to 0 \quad n\to\infty$, 则在 $s=s_i(t)$ 中代入 t_n,

$$s=s_i(t_n)$$

不一定是单值的. 但由隐函数定理,令 $t_n\to 0$ 时(6.3.2.4)式决定的 $g_i(\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{\alpha}t+\boldsymbol{\beta}s)$ 过 $\boldsymbol{x}^0$ 点, $s=s_i(t_n)$ 可决定单值(且唯一)的函数 $s=s_i(t)$ 形式. 规定

$$s_i(t_n)=s_n^i$$

$s_i(t_n)$在 $t_n\to 0$ 时总是单值的.

则有

$$t_n\to 0 \quad s_n^i\to 0 \quad n\to\infty$$

作

$$\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{\alpha}t_n+\boldsymbol{\beta}s_n^i \quad \text{且 } g_i(\boldsymbol{x}_n)=0 \quad (\text{当 } t_n\to 0)$$

$$\boldsymbol{z}_n^i=\frac{\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}^0}{\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}^0\|}=\frac{\boldsymbol{\alpha}t_n+\boldsymbol{\beta}s_n^i}{\|\boldsymbol{\alpha}t_n+\boldsymbol{\beta}s_n^i\|}$$

可知

$$\| \boldsymbol{\alpha} t_n + \boldsymbol{\beta} s_n^i \| = \left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta} \left(\frac{s_n^i}{t_n} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot t_n$$

故

$$z_n^i = \frac{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \left(\dfrac{s_n^i}{t_n} \right)}{\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta} \left(\dfrac{s_n^i}{t_n} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \qquad —(6.3.2.6)$$

由于

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_n^i}{t_n} = \lim_{t_n \to 0} \frac{s_n^i}{t_n} = \left. \frac{\mathrm{d} s_i(t)}{\mathrm{d} t} \right|_{t=0} = -\frac{\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \boldsymbol{\alpha}}{\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \boldsymbol{\beta}} \qquad —(6.3.2.7)$$

故

$$\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{z}_n^i = \frac{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \left. \dfrac{\mathrm{d} s_i(t)}{\mathrm{d} t} \right|_{t=0}}{\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta} \left[\left. \dfrac{\mathrm{d} s_i(t)}{\mathrm{d} t} \right|_{t=0} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}} = \boldsymbol{z}^i \qquad —(6.3.2.8)$$

存在.并且显然有 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}^0 \quad n \to \infty$.故若 $\{\boldsymbol{x}_n\} \subset X$，就有

$$\boldsymbol{z}^i \in S(X, \boldsymbol{x}^0)$$

其次，不论是否有 $\{\boldsymbol{x}_n\} \subset X$，以下性质总成立，

$$L_i: \quad \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \boldsymbol{z}^i = 0 \qquad —(6.3.2.9)$$

由(6.3.2.7)、(6.3.2.8)直接可得此结果.所以，由(6.3.2.8)式决定的方向向量 $\boldsymbol{z}^i$ 必定是

$$g_i(\boldsymbol{x}) = 0$$

决定的曲面在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 点处的切平面 L_i 上从 $\boldsymbol{x}^0$ 点出发的方向向量.

作由 L 截平面上 Ots 坐标系中 $\dfrac{\mathrm{d} s_i(t)}{\mathrm{d} t}$ 构成的直线 l_i(即 $s_i = s(t)$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的切线)，

$$l_i: \quad s_i = \left(\left. \frac{\mathrm{d} s_i(t)}{\mathrm{d} t} \right|_{t=0} \right) \cdot t \quad i \in I(\boldsymbol{x}^0) \qquad —(6.3.2.10)$$

显然 l_i 的法方向即是 L_i 的法方向在 L 截平面上的投影方向，故

$$\nabla l_i = (\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha},\ \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}} \qquad —(6.3.2.11)$$

给出了 l_i 在 Ots 坐标系上的法方向.

其次,如果(6.3.2.5)式成立,则即说明 Ots 平面就与 $g_i(\boldsymbol{x})=0$ 决定的曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的切平面重合. 如图 6.3.2.1 中 $\tilde{\boldsymbol{x}}^0$ 点处 $\tilde{l}$ 切线.

对所有的 $i \in I(\boldsymbol{x}^0)$ 所对应的 $g_i(\boldsymbol{x})$ 约束函数作出以上的切线 l_i,或可判定 Ots 平面与 $g_i(\boldsymbol{x})=0$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的切平面 l_i 重合,就可在 Ots 坐标系上得到以下图示. 在图 6.3.2.5 中,标示出各个 l_i 以及箭头所示的法方向 ∇l_i. 由坐标轴 s 的取法,s 正半轴原点邻域,即对应于 $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1]$ 的 s 的取值区间,总是属于 X 可行区域的,故各个 l_i 总是围绕 s 正半轴夹成一个属于可行区域 X 的锥. 这个锥在图中均用(灰色)阴影区域表示. 这个阴影区域表示的锥就是 $S(X, \boldsymbol{x}^0)$ 与截平面 L 的交集合. 以下用 Sts 表示此交集合. 注意 s 轴的正半轴一定属于 $S(X, \boldsymbol{x}^0)$.

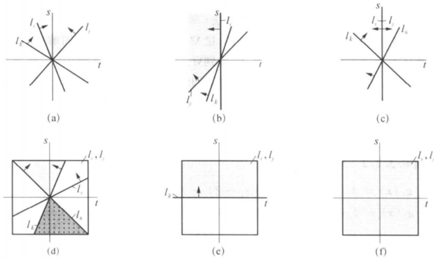


图 6.3.2.5

图 6.3.2.5 中给出了(a)～(f)共 6 种类型. 这 6 种类型已经涵盖了可行区域 X 在 $\boldsymbol{x}^0$ 的邻域的边界曲面非轴对称时所有可能的情形,虽然具体图形上仍可以存在一些差异. 其中(a)、(b)这 2 种类型,构成交集合(锥)的 l_i, l_j 射线的方向向量是线性无关的,l_k 表示是其他过 $\boldsymbol{x}^0$ 点的约束函数 $g_k(\boldsymbol{x})=0$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的切平面与 Ots 坐标平面的交线. l_k 可以由 l_i, l_j 的正线性组合表出,故在构成锥 Sts 上,l_k 是冗余的约束条件. (a)、(b)的区别仅在于在(b)中 l_i 与 s 轴重合(另一种情形则可以是与 t 轴重合). (c)～(f)所示的情形与(a)、(b)的区别在于 l_i, l_j 所对应的约束条件的梯度向量 $\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)$、$\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0)$ 现在是负线性相关的. 因此,由(6.3.2.8)式中的 $\boldsymbol{z}^i$ 这样的方向向量总位于 $\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}^i=0$ 决定的超平面上,现在,$\boldsymbol{z}^i(\boldsymbol{z}^j)$ 一定位于

$$\begin{cases}\nabla g_i^{\mathrm T}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}\geqslant 0\\ \nabla g_j^{\mathrm T}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}\geqslant 0\end{cases}$$

决定的超平面上. 且由于$\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)$、$\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0)$负线性相关,故这一不等式组等价于等式方程组,并决定了一个超平面. 而这个超平面与 Ots 的交集 l_i, l_j 就一定是重合的,但是有相反的法方向. 这即是说 Sts 集合一定位于这一超平面上. 当取 t 轴与 l_i, l_j 所在超平面正交,就可有(c)的图形,当取 t 轴与超平面重合,就有(d)~(f)的图形. 在(c)、(d)图形中,由其他约束条件 $g_{k,h,s}(\boldsymbol{x})=0$ 决定的曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切平面与 Ots 坐标平面的交线 $l_{k,h,s}$ 在 l_i, l_j 所在超平面上构造出了一个锥 Sts. 而在(e)、(f)中, Sts 可以是 l_i, l_j 所在的超平面上的半平面甚或是全平面.

在上文中指出,由(6.3.2.7)~(6.3.2.8)式构造的方向向量 $\boldsymbol{z}^i$ 是否是 $S(X, \boldsymbol{x}^0)$ 中的向量,取决于选取的 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是否属于可行区域 X. 现在,由(6.3.2.5)图,以及线性不等式组的解法(参见图 5.5.1.1 及其说明),对于由(6.3.2.11)式决定的各个 l_i 的法方向向量 ∇l_i, $i\in I(\boldsymbol{x}^0)$, 可由图解的方式(在 Ots 坐标平面上)或可在全部的∇l_i 中找到∇l_i, ∇l_j 向量,使其他的∇l_k 向量可由∇l_i, ∇l_j 的正线性组合表出,这样,总能确定出 Sts 集合. 对所有的与 s 轴正交的方向(t 轴)所确定的 Ots 坐标平面确定出对应的 Sts 集合,从而可确定全部的 $\boldsymbol{z}^i$, $i\in I(\boldsymbol{x}^0)$ 向量中,那个 $\boldsymbol{z}^i\in S(X, \boldsymbol{x}^0)$ 则全体这样的 Sts 集合的并就是 $S(X, \boldsymbol{x}^0)$集合.

例 6.3.2.2 约束条件如下

$$g_1(\boldsymbol{x})=4-(x_1-2)^2-(x_2-2)^2-(x_3-2)^2-(x_1-2)^2\geqslant 0$$
$$g_2(\boldsymbol{x})=4-(x_1-1)^2-(x_2-1)^2-(x_3-1)^2-(x_1-1)^2\geqslant 0$$

取 $\boldsymbol{x}^0=(2,2,2,0)^{\mathrm T}$ 构造原点在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的 Ots 坐标系.

任取 $\boldsymbol{x}^1$,使 $g_1(\boldsymbol{x}^1)\geqslant 0$, $g_2(\boldsymbol{x}^1)\geqslant 0$. 如 $\boldsymbol{x}^1=(1,1,1,2)^{\mathrm T}$.

取
$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{x}^1-\boldsymbol{x}^0=(-1,-1,-1,2)^{\mathrm T}$$

由
$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}=0$$

得
$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}-1&-1&2\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{u}\in R^3$$

任取一个 $\boldsymbol{u}$,如取 $\boldsymbol{u}=(1,1,1)^{\mathrm T}$. 得

$$\boldsymbol{\alpha}=(0,1,1,1)^{\mathrm T}$$

由
$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{\alpha}t+\boldsymbol{\beta}s$$

得

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2 & -s\\ 2+t & -s\\ 2+t & -s\\ t & +2s\end{bmatrix} \qquad \text{—(a)}$$

此即 Ots 坐标平面上的点 $\boldsymbol{x}$ 的 t，s 坐标表示.

将(a)式代入 $g_1(\boldsymbol{x})=0$，得

$$-7s^2+8s-3t^2+4t=0 \qquad \text{—(b)}$$

得 $g_1(\boldsymbol{x})=0$ 与 Ots 平面交曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点(即 $t=s=0$)处的切线斜率及切线方程 l_1，

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2} \quad l_1:\ s=-\frac{1}{2}t,\ t\leqslant 0,$$

从而得到[1]

$$\boldsymbol{z}^1=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{\alpha}t+\boldsymbol{\beta}s=\left(\boldsymbol{\alpha}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}\right)t=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}\\ 0\end{bmatrix}t \quad t\leqslant 0$$

$\boldsymbol{z}^1$ 即是 Ots 坐标平面上的 l_1 半直线在 R^m 坐标系上的表示.

同理，将(a)式代入 $g_2(\boldsymbol{x})=0$ 得

$$-7s^2+10s-3t^2-2t=0 \qquad \text{—(c)}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{5} \quad l_2:\ s=\frac{1}{5}t \quad t\geqslant 0$$

---

〔1〕 从(b)式中解出 $s=\frac{4}{7}-\frac{1}{\sqrt{7}}\left(\frac{76}{21}-\left(\sqrt{3}t-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 函数. 且由于 $s\geqslant 0$ 半轴属于闭切锥的性质，故要求 $t\to 0$，这一函数的取值使 $s(t)\geqslant 0$，即可知应要求 $t\to 0$ 时，有

$$\left(\sqrt{3}t-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\geqslant\frac{4}{3} \quad (t\to 0)$$

由此即知这一 $s(t)$ 函数的导数在 $t\leqslant 0$ 且 $t\to 0$ 时给出了闭切锥 $S(X,\boldsymbol{x}^0)$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的半切线斜率的值.

$$z^2 = \left(\boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{5}\boldsymbol{\beta}\right)t = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix} t \quad t \geqslant 0$$

显然 $\boldsymbol{z}^1, \boldsymbol{z}^2 \in S(X, \boldsymbol{x}^0)$.

$$Sts = -t_1\boldsymbol{z}^1 + t_2\boldsymbol{z}^2 \quad t_1, t_2 \geqslant 0$$

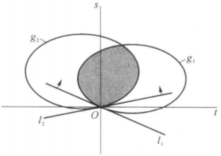


图 6.3.2.6

而(b)，(c)方程组显然是过 Ots 坐标原点的椭圆方程. Ots 坐标平面上的图形如图 6.3.2.6. 其中的阴影区域即为 $Sts = X \cap Ots$. 且容易验证，

$$\nabla g_{1,2}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \cdot \boldsymbol{z}^{1,2} = 0$$

成立.

在上文中已指出了，当可行区域 X 为单点集合时，可能出现

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) \neq S(X, \boldsymbol{x}^0)$$

的情形. 以下将说明，当出现图 6.3.2.5 中的(e)、(c)所示的情形，且又不存在 l_k、l_h 这样的交线时，也将出现

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) \neq S(X, \boldsymbol{x}^0)$$

的情形. 为了简化分析，并注意到 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$、$S(X, \boldsymbol{x}^0)$均是锥的性质，可以只考虑 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$、$S(X, \boldsymbol{x}^0)$的**方向锥**. 方向锥用对应集合符号加下标 ξ 表示.

$$Z_\xi^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{\xi} \mid \boldsymbol{\xi} \in Z^1(\boldsymbol{x}^0),\ \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = 1\}$$

$$S_\xi(X, \boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{\xi} \mid \boldsymbol{\xi} \in S(X, \boldsymbol{x}^0),\ \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = 1\}$$

任一锥集合的几何特征完全由其方向锥决定.

由图 6.3.2.3、图 6.3.2.4 的说明以及关于过 $\boldsymbol{x}^0$ 点 Ots 坐标平面上 Sts 集合的分析，可以这样来构造方向锥 $S_\xi(X, \boldsymbol{x}^0)$，取 $\delta > 0$，作集合

$$Z_\xi(\boldsymbol{x}^0, \delta) = \mathrm{cl}\left\{\boldsymbol{\xi} \left| \boldsymbol{\xi} = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\|} \quad \boldsymbol{x} \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X,\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^0 \right.\right\}$$

—(6.3.2.12)

其中 cl 是取闭包运算. 显然

$$\lim_{\delta\to 0} Z_\xi(\boldsymbol{x}^0, \delta) = S_\xi(X, \boldsymbol{x}^0) \qquad —(6.3.2.13)$$

而线性化锥的方向锥可以直接定义成

$$Z_\xi^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{\xi} \mid \nabla g_i^{\mathrm T}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\xi} \geqslant 0 \quad i \in I(\boldsymbol{x}^0) \quad \boldsymbol{\xi}^{\mathrm T}\boldsymbol{\xi} = 1\} \qquad —(6.3.2.14)$$

考虑 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域处在 Ots 坐标平面上具有以下图 6.3.2.7 的形状，其中 $g_{i,j}$ 是约束函数 $g_{i,j}(\boldsymbol{x}^0)=0$ 与Ots平面的交曲线. l_δ 是 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0)$ 集合与 Ots 平面的交线，不妨取 $\delta = \dfrac{1}{k}$, $k>1$. Ots 坐标系的 s 轴由方向向量

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^0}{\|\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^0\|} \quad \boldsymbol{x}^1 \in X$$

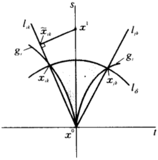


图 6.3.2.7

决定. 故 $\boldsymbol{x}^1$ 位于 s 轴正半轴上. 图中阴影区域是

$$Sts(\delta) = (N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X) \cap Ots$$

记 g_i 与 l_δ 的交点为 $\boldsymbol{x}_{ik}$，并记 l_{ik}是 Ots 坐标平面上的以下直线

$$l_{ik}:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}_{ik} t \quad t \geqslant 0$$

其中

$$\boldsymbol{\beta}_{ik} = \frac{\boldsymbol{x}_{ik} - \boldsymbol{x}^0}{\|\boldsymbol{x}_{ik} - \boldsymbol{x}^0\|}$$

若记 l_{ik} 与 t 轴的夹角(以 t 轴逆时针转动至与 l_{ik} 重合所决定)为 θ_{ik}，则 $\theta_{ik} > \dfrac{\pi}{2}$，且记

$$\boldsymbol{\beta}_{ik} = (\cos\theta_{ik}, \sin\theta_{ik})^{\mathrm T}$$

l_{ik}是 g_i 曲线上的割线，规定 l_{ik} 射线具有法方向∇l_{ik}，

$$\nabla l_{ik} = \frac{\boldsymbol{x}^1 - \tilde{\boldsymbol{x}}_{ik}}{\|\boldsymbol{x}^1 - \tilde{\boldsymbol{x}}_{ik}\|}$$

其中$\tilde{\boldsymbol{x}}_{ik}$是 $\boldsymbol{x}^1$ 在 l_{ik}上的正投影点. 易知

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_{it} = \boldsymbol{\beta}_{ik} \cdot t_{ik} \quad t_{ik} = s^1 \cdot \sin\theta_{ik}$$

其中 s^1 是 $\boldsymbol{x}^1$ 点在 Ots 坐标系上对应的 s 轴上的坐标，且

$$\boldsymbol{x}^1 = (t^1, s^1)^{\mathrm T} \quad t^1 = 0,\ s^1 > 0$$

故

$$\| \boldsymbol{x}^1 - \tilde{\boldsymbol{x}}_{ik} \| = \| (0, s^1)^{\mathrm{T}} - (\cos\theta_{ik}, \sin\theta_{ik})^{\mathrm{T}} \cdot s^1 \sin\theta_{ik} \|$$

$$= \sqrt{\cos^2\theta_{ik}} \cdot s^1$$

因为 $\| \boldsymbol{x}^1 - \tilde{\boldsymbol{x}}_{ik} \| > 0$, $\cos\theta_{ik} < 0 \left(\because \theta_{ik} > \dfrac{\pi}{2} \right)$，故

$$\| \boldsymbol{x}^1 - \tilde{\boldsymbol{x}}_{ik} \| = -\cos\theta_{ik} \cdot s^1$$

即有

$$\nabla l_{ik} = (\sin\theta_{ik}, -\cos\theta_{ik})^{\mathrm{T}}$$

同理，对 g_j 曲线上的 $\boldsymbol{x}_{jk}$ 点作 l_{jk} 割线，并注意到有 $\theta_{jk} < \dfrac{\pi}{2}$，可得 l_{jk} 的法方向是

$$\nabla l_{jk} = (-\sin\theta_{jk}, \cos\theta_{jk})^{\mathrm{T}}$$

设 g_i，g_j 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处即在 Ots 坐标系原点处相切. 则令

$$k \to \infty \Rightarrow \delta \to 0$$

就有 l_{ik}，l_{jk} 最终与 s 正半轴重合即 θ_{ik}、$\theta_{jk} \to \dfrac{\pi}{2}$，且

$$\lim_{k\to\infty} \nabla l_{ik} = (1, 0)^{\mathrm{T}} \quad \lim_{k\to\infty} \nabla l_{jk} = (-1, 0)^{\mathrm{T}}$$

显然，这里在 Ots 坐标平面上

$$Z_{\xi}(\boldsymbol{x}^0, \delta) = \left\{ \boldsymbol{\xi} \middle| \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{ik} & \cos\theta_{jk} \\ \sin\theta_{ik} & \sin\theta_{jk} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \quad u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2\cos(\theta_{ik} - \theta_{jk}) = 1 \right\}$$

也可以更简单地表示成

$$Z_{\xi}(\boldsymbol{x}^0, \delta) = \{ (\cos\theta, \sin\theta)^{\mathrm{T}} \mid \theta_{jk} \leqslant \theta \leqslant \theta_{ik} \}$$

故在 Ots 坐标平面上

$$S_{\xi}(X, \boldsymbol{x}^0) = \lim_{\delta\to 0} Z_{\xi}(\boldsymbol{x}^0, \delta) = \{ (0, 1)^{\mathrm{T}} \}$$

$S_{\xi}(X, \boldsymbol{x}^0)$ 的图形即如图 6.3.2.5 的(c)去掉 l_k、l_h 直线那样. 法方向相反的 $l_{i,j}$ 半切线与 s 轴正半轴重合.

但另一方面，构造线性化锥

$$\begin{cases} \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\xi} \geqslant 0 \\ \nabla g_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\xi} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \xi_1 \geqslant 0 \\ -\xi_1 \geqslant 0 \end{matrix} \Rightarrow \xi_1 = 0 \quad (\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = 1)$$

即得

$$Z_\xi^1(\boldsymbol{x}^0) = \{(0,\ 1)^{\mathrm{T}},\ (0,\ -1)^{\mathrm{T}}\}$$

所以在这里的 Ots 坐标平面上

$$Z_\xi^1(\boldsymbol{x}^0) \neq S_\xi(X,\ \boldsymbol{x}^0)$$

或者说，闭切锥 $S(X,\ \boldsymbol{x}^0)$ 与 Ots 坐标平面的交集是 s 正半轴而线性化锥 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 与 Ots 坐标平面的交集却是 s 正、负半轴，故 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 与 $S(X,\ \boldsymbol{x}^0)$ 不可能相等. 注意，$Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 中的向量 $(0,\ -1)^{\mathrm{T}}$ 不是可行方向向量也不是一列可行方向向量的极限. 此例即表明当 $Z^1(\boldsymbol{x}^0) \neq S(X,\ \boldsymbol{x}^0)$ 时，就可以出现 $\boldsymbol{z} \in Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 但 $\boldsymbol{z}$ 不是可行方向向量也不是一列可行方向向量的极限的情形.

对以上所分析的情形，可引用以下具体例示.

例 6.3.2.3 规划问题如下[1]

$$\min \quad -x_1$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = (1-x_1)^3 - x_2 \geqslant 0 \\ g_2(\boldsymbol{x}) = x_1 \geqslant 0 \\ g_3(\boldsymbol{x}) = x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

本例 X 可行区域如下图(暂不考虑 $g_4(\boldsymbol{x})=0$ 直线).

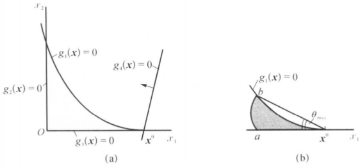


图 6.3.2.8

极小值点是 $\boldsymbol{x}^0 = (1,\ 0)^{\mathrm{T}}$. 图 6.3.2.8 的(a)图中的阴影区域为规划的可行区域. (b)图是极小值点邻域的放大图示. 弧 $\widehat{ab}$ 是 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0)$ 在 X 区域内的边界. 用 $\boldsymbol{x}_{a,b}$ 表示(b)图中 a、b 点的坐标，有

$$\boldsymbol{x}_a = (1-\delta,\ 0)^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}_b = (x_1^b,\ x_2^b)^{\mathrm{T}}$$

---

[1] 引自《非线性规划》上册，M. Avriel，第 29 页. 但此例应属于 Kuhn－Tucker，见《泛函分析与最优化理论》王日爽编著，北京航空航天大学出版社，2003 年，第 254 页.

应有
$$x_2^b = (1 - x_1^b)^3$$

由 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0)$ 的定义，易知 $x_1^b > 1 - \delta$. 取 $0 < \delta < 1$，有

$$x_2^b < (1 - (1 - \delta))^3 = \delta^3$$

记点 $\boldsymbol{x}^0$ 与 $\boldsymbol{b}$ 点的连线与 x_1 轴的（锐角）夹角为 $\theta_{\max}$，则应有

$$x_2^b = \delta \sin\theta_{\max} < \delta^3 \Rightarrow \sin\theta_{\max} < \delta^2$$

得
$$\theta_{\max} < \arcsin\delta^2$$

由此可将 X 区域在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的锥 $Z_\xi(\boldsymbol{x}^0, \delta)$ 表示为

$$Z_\xi(\boldsymbol{x}^0, \delta) \subseteq \{(-\cos\theta, \sin\theta)^{\mathrm{T}} \mid 0 \leqslant \theta < \arcsin\delta^2\}$$

则闭切锥

$$S_\xi(X, \boldsymbol{x}^0) = \lim_{\delta\to 0} Z_\xi(\boldsymbol{x}^0, \delta) = \lim_{\delta\to 0}\{(-\cos\theta, \sin\theta)^{\mathrm{T}} \mid 0 \leqslant \theta < \arcsin\delta^2\}$$
$$= \{(-\cos\theta, \sin\theta)^{\mathrm{T}} \mid 0 \leqslant \theta < \lim_{\delta\to 0}\arcsin\delta^2\}$$

得

$$S_\xi(X, \boldsymbol{x}^0) = \{(-1, 0)^{\mathrm{T}}\}$$

即闭切锥是一个单元素集.

但在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处，易知 $g_2(\boldsymbol{x}^0) = 1 > 0$ 是松弛约束，可以不予考虑. 对 $g_{1,3}(\boldsymbol{x})$ 约束有

$$\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \nabla g_3(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由此即得线性化锥

$$Z_\xi^1(\boldsymbol{x}^0) = \{(-1, 0)^{\mathrm{T}}, (1, 0)^{\mathrm{T}}\}$$

即有

$$Z_\xi^1(\boldsymbol{x}^0) \neq S_\xi(X, \boldsymbol{x}^0)$$

附带可以指出，此时亦有

$$(Z^1(\boldsymbol{x}^0))' \neq (S(X, \boldsymbol{x}^0))'$$

注意到

$$S(X, \boldsymbol{x}^0) = \left\{\boldsymbol{z} \,\middle|\, \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad u \geqslant 0\right\}$$

记 $\boldsymbol{y} \in (S(X, \boldsymbol{x}^0))'$，应有

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\geqslant 0 \Rightarrow -y_1\geqslant 0$$

得

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}v \quad t\in R,\ v\geqslant 0$$

故$(S(X,\ \boldsymbol{x}^0))'$是$Oy_1y_2$平面上$-y_1$轴所在的半平面.

另由

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0)=\left\{\boldsymbol{z}\,\middle|\,\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u \quad u\in R\right\}$$

可得，$\boldsymbol{y}\in(Z^1(\boldsymbol{x}^0))'$，即应有

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=0\Rightarrow y_1=0$$

故

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}t \quad t\in R$$

所以$(Z^1(\boldsymbol{x}^0))'$中的$\boldsymbol{y}$全部在Oy_1y_2坐标系的y_2轴上.即

$$(Z^1(\boldsymbol{x}^0))'\neq(S(X,\ \boldsymbol{x}^0))'$$

将例 6.3.2.3 的规划问题稍作拓展，可以看到更丰富一些的情形.

例 6.3.2.4 约束条件拓展如下：

$$\begin{aligned}
g_1(\boldsymbol{x})&=(1-x_1)^3-x_3\geqslant 0\\
g_2(\boldsymbol{x})&=x_1\geqslant 0\\
g_3(\boldsymbol{x})&=x_2\geqslant 0\\
g_4(\boldsymbol{x})&=x_3\geqslant 0
\end{aligned}$$

取$\boldsymbol{x}^0=(1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$考虑$Z^1(\boldsymbol{x}^0)$、$S(X,\ \boldsymbol{x}^0)$.

本例规划可行区域X的图形见图 6.3.2.9. 曲面g_1是曲线l_g平移形成的边界面（即直纹曲面），

$$l_g:\ x_3=(1-x_1)^3$$

g_1曲面与Ox_1x_2平面在$x_1=1$直线即l_0直线处相切，与Ox_2x_3平面相交于$x_3=1$直线处. X可行区域是R^3_+象限与g_1曲面组成的曲面三角棱柱，其侧面如阴影区域所示.

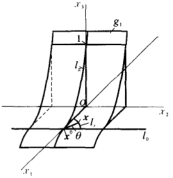


图 6.3.2.9

建立原点在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的极坐标系. 对 $\delta>0$, 设 $\boldsymbol{x}\in N_\delta(\boldsymbol{x}^0)\cap g_1$, l_r 是 Ox_1x_2 平面上以 $\boldsymbol{x}^0$ 为圆心以 δ 为半径的圆周. $\boldsymbol{x}$ 在 Ox_1x_2 的正投影点落在 l_r 上, 且过此正投影点的半径与 l_0 线的夹角为 θ. 由约束条件的要求, 应有 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

$\boldsymbol{x}$ 的极坐标表示是

$$x_1=1-\delta\sin\theta \quad x_2=\delta\cos\theta \quad x_3=(1-(1-\delta\sin\theta))^3=\delta^3\sin^3\theta$$

故

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0=(-\delta\sin\theta,\ \delta\cos\theta,\ \delta^3\sin^3\theta)^{\mathrm{T}}$$

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0\|=(1+\delta^4\sin^6\theta)^{\frac{1}{2}}\cdot\delta$$

则

$$Z_\xi(\boldsymbol{x}^0,\delta)=\left\{\boldsymbol{\xi}\,\middle|\,\boldsymbol{\xi}=\frac{(-\sin\theta,\ \cos\theta,\ \delta^2\sin^3\theta)^{\mathrm{T}}}{(1+\delta^4\sin^6\theta)^{\frac{1}{2}}},\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\lim_{\delta\to0}Z_\xi(\boldsymbol{x}^0,\delta)=\left\{(-\sin\theta,\ \cos\theta,\ 0)^{\mathrm{T}}\,\middle|\,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}=S_\xi(X,\boldsymbol{x}^0)$$

故 $S(X,\boldsymbol{x}^0)$ 是 Oz_1z_2 平面上的 $\frac{1}{4}$ 坐标平面(第Ⅱ象限平面).

线性化锥则由 $\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0)$、$\nabla g_3(\boldsymbol{x}^0)$ 和 $\nabla g_4(\boldsymbol{x}^0)$ 决定.

$$\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}\quad \nabla g_3(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\quad \nabla g_4(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

解不等式组

$$\begin{cases}-z_3\geqslant0\\ z_2\geqslant0\\ z_3\geqslant0\end{cases}$$

得

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0)=\left\{\boldsymbol{z}\,\middle|\,\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}u\quad t\in R,\ u\geqslant0\right\}$$

故 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 是 Oz_1z_2 平面上的半平面(即第Ⅰ、Ⅱ象限半平面). 即有

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0)\neq S(X,\boldsymbol{x}^0)$$

容易理解，若在本例中 $g_3(\boldsymbol{x}) = x_2 \geqslant 0$ 不存在，就应有

$$S_\xi(X, \boldsymbol{x}^0) = \{(-\sin\theta, \cos\theta, 0)^{\mathrm{T}} \mid 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$$

$$Z_\xi^1(\boldsymbol{x}^0) = \{(-\sin\theta, \cos\theta, 0)^{\mathrm{T}} \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$$

即 $S(X, \boldsymbol{x}^0)$ 现在是 Oz_1z_2 的半平面，$Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 则是 Oz_1z_2 全平面.

§6.3.3 局部极小值点 x^0 是约束曲面上的拐点、鞍点

——线性化锥与闭切锥不等的条件

以上已讨论了闭切锥(及其方向锥)的构造，以及导致一阶约束品性不能成立，即线性化锥与闭切锥不等的几个示例. 以下将进一步讨论在什么样的条件下，线性化锥与闭切锥就不会相等.

一些文献上将造成例 6.3.2.3(及例 6.3.2.4)中 $Z^1(\boldsymbol{x}^0) \neq S(X, \boldsymbol{x}^0)$ 的原因归结为极小值点 $\boldsymbol{x}^0$ 是 X 可行区域的尖点[1]. 但这样的说法并非确切. 将例 6.3.2.3 中，第 1 个约束条件改成以下形式

$$g_1(\boldsymbol{x}) = (1 - x_1)^3 - (x_2 + a) \geqslant 0 \qquad 0 < a < 1$$

其余不变. 则局部极小值点现在是

$$\boldsymbol{x}^0 = (1 - a^{\frac{1}{3}}, 0)^{\mathrm{T}}$$

新的 $g_1(\boldsymbol{x}) = 0$ 曲线相当于原曲线向下作了一个平移. 仍旧利用图 6.3.2.8 表示新的规划问题的几何意义. 可见 $\boldsymbol{x}^0$ 点仍是一个尖点. 继续利用上例的符号，现在图 6.3.2.8 的(b)图中，b 点的坐标应满足

$$x_2^b + a = (1 - x_1^b)^3$$

即

$$x_2^b = (1 - x_1^b)^3 - a$$

从而

$$\operatorname{tg}\theta_{\max} = \frac{x_2^b}{(1 - a^{\frac{1}{3}}) - x_1^b} = \frac{(1 - x_1^b)^3 - a}{(1 - a^{\frac{1}{3}}) - x_1^b}$$

令 $\delta \to 0 \Rightarrow x_1^b \to 1 - a^{\frac{1}{3}}$，故

$$\operatorname{tg}\theta_{\max} \to \frac{(1 - (1 - a^{\frac{1}{3}}))^3 - a}{(1 - a^{\frac{1}{3}}) - (1 - a^{\frac{1}{3}})} = \frac{0}{0}$$

利用 L'Hospital 法则即得

---

[1] 见前注[1]中的《泛函分析与最优化理论》，第 255 页.

$$\lim_{\delta \to 0} \operatorname{tg} \theta_{\max} = \left. \frac{-3(1-x_1^b)^2}{-1} \right|_{x_1^b \to 1-a^{\frac{1}{3}}} = 3a^{\frac{2}{3}}$$

故在 $\delta \to 0$ 时,

$$S_\xi(X, \boldsymbol{x}^0) = \{(-\cos\theta, \sin\theta)^{\mathrm{T}} \mid 0 \leqslant \theta \leqslant \operatorname{arctg}(3a^{\frac{2}{3}})\}$$

另一方面,在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处,

$$\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} -3(1-x_1)^3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3a^{\frac{2}{3}} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla g_3(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由线性化锥的定义,解以下不等式方程组,

$$\begin{cases} -3a^{\frac{2}{3}}\xi_1 - \xi_2 \geqslant 0 \\ \xi_2 \geqslant 0 \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1 \end{cases}$$

可知有 $\xi_2 \geqslant 0 \Rightarrow \xi_1 < 0$ 且

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} \geqslant -3a^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \left|\frac{\xi_2}{\xi_1}\right| \leqslant 3a^{\frac{2}{3}}$$

规定

$$\left|\frac{\xi_2}{\xi_1}\right| = \operatorname{tg}\theta$$

即知 $$0 \leqslant \theta \leqslant \operatorname{arctg}(3a^{\frac{2}{3}})$$

令 $$\xi_1 = -\cos\theta \quad \xi_2 = \sin\theta$$

即知

$$Z_\xi^1(\boldsymbol{x}^0) = \{(-\cos\theta, \sin\theta)^{\mathrm{T}} \mid 0 \leqslant \theta \leqslant \operatorname{arctg}(3a^{\frac{2}{3}})\}$$

所以 $$Z_\xi^1(\boldsymbol{x}^0) = S_\xi(X, \boldsymbol{x}^0)$$

因此极小值点 $\boldsymbol{x}^0$ 是一个尖点并不就一定有该点处的线性化锥与闭切锥不相等的情形. 稍加思索就知道,在规划问题的约束条件均为线性不等式时,其端点一般地都是尖点,且在这些尖点处,线性化锥等于闭切锥是常见的情形.

为排除类似前一例中所出现的情形,就导致关于一阶约束品性的探讨. 为此可以继续对例 6.3.2.3 予以分析.

以上利用 $g_1(\boldsymbol{x})=0$ 曲线向下平移，消除了

$$Z_\xi^1(\boldsymbol{x}^0)\neq S_\xi(X,\ \boldsymbol{x}^0)$$

的情形．但这却又使原规划问题发生了变动．我们也可以保持原规划问题实质不变而通过添加新的约束条件的方法保证局部极小值点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的线性化锥与闭切锥相等．例如在例 6.3.2.3 中添加约束条件

$$g_4(\boldsymbol{x})=-kx_1+hx_2+k\geqslant 0\quad (k>0,\ h\geqslant -k)$$

这里 $g_4(\boldsymbol{x})=0$ 是过 $\boldsymbol{x}^0=(1,\ 0)^{\mathrm{T}}$ 点且不与 x_1 轴重合的任意直线，如图 6.3.2.8 的(a)图中的 $g_4(\boldsymbol{x})=0$ 直线，其上的箭头所指方向为法方向．

在添加约束条件 $g_4(\boldsymbol{x})\geqslant 0$ 后，并没有对原规划的可行区域 X 造成实质性的改变，局部极小值点仍只有取 $\boldsymbol{x}^0=(1,\ 0)^{\mathrm{T}}$ [1]．由线性化锥的定义及

$$\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\quad \nabla g_3(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\quad \nabla g_4(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix}-k\\h\end{bmatrix}$$

解以下不等式方程组

$$\begin{cases}-\xi_2\geqslant 0\\ \xi_2\geqslant 0\\ -k\xi_1+h\xi_2\geqslant 0\\ \xi_1^2+\xi_2^2=1\end{cases}$$

即得 $\xi_2=0\Rightarrow\xi_1=-1$．故

$$Z_\xi^1(\boldsymbol{x}^0)=\{(-1,\ 0)^{\mathrm{T}}\}=S_\xi(X,\ \boldsymbol{x}^0)$$

成立．

对于例 6.3.2.3，由于添加 $g_4(\boldsymbol{x})\geqslant 0$ 的约束条件，原规划问题的可行区域并没有因此产生变化，但 $\boldsymbol{x}^0$ 点处原先存在的

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0)\neq S(X,\ \boldsymbol{x}^0)$$

的情形即转变成了

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0)=S(X,\ \boldsymbol{x}^0)$$

的情形．此即表明当规划问题的局部极小值点 $\boldsymbol{x}^0$ 处存在

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0)\neq S(X,\ \boldsymbol{x}^0)$$

时，不能简单地归结为“尖点”、“非凸”等原因．

---

[1] 这一结论对于任意的 $k>0$，$h\geqslant -k$ 参数都是成立的．

以上给出的示例中，导致线性化锥与闭切锥不等的曲面（$g_1(\boldsymbol{x}) = 0$），尚只是低维空间上的（如例 6.3.2.3）亦或只是直纹曲面（如例 6.3.2.4）并且均是非轴对称曲面. 以下给出更一般具有轴对称性质的约束曲面.

例 6.3.3.1 约束条件

$$g_1(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - x_3 \geqslant 0 \qquad a, b > 0$$

$$g_2(\boldsymbol{x}) = \qquad x_3 \geqslant 0$$

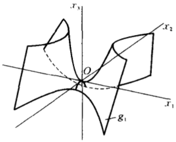


图 6.3.3.1

这里 $g_1(\boldsymbol{x})$ 是 R_3 空间上的鞍面，原点是其鞍点. g_1 曲面见图 6.3.3.1. 注意鞍面是轴对称的.

设 $\boldsymbol{x}^0 = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. 则

$$\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0) = (0, 0, -1)^{\mathrm{T}}$$

$$\nabla g_2(\boldsymbol{x}^0) = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$$

故线性化锥就是 Ox_1x_2 平面.

求解 $S(X, \boldsymbol{x}^0)$. 作极坐标系，对 $\delta > 0$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 有

$$x_1 = \delta\cos\theta \quad x_2 = \delta\sin\theta \quad x_3 = \delta^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) \geqslant 0$$

故
$$-\frac{b}{a} \leqslant \operatorname{tg}\theta \leqslant \frac{b}{a}$$

有
$$\begin{cases} -\operatorname{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\right) \leqslant \theta \leqslant \operatorname{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\right) \\ \pi - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\right) \leqslant \theta \leqslant \pi + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\right) \end{cases} \qquad \text{—(a)}$$

作
$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0 = \left(\delta\cos\theta, \delta\sin\theta, \delta^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\right)^{\mathrm{T}}$$

则
$$\boldsymbol{\xi} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\boldsymbol{z}}{\|\boldsymbol{z}\|} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)^{\mathrm{T}}$$

其中 θ 由(a)式决定. 便得 $S_\xi(X, \boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{\xi}\}$.

可见 $S(X, \boldsymbol{x}^0) \neq Z^1(\boldsymbol{x}^0)$. 且因为现在 g_1 曲面是以 x_3 轴为对称轴的曲面，由(a)式可知，记

$$S_\xi^1(X, \boldsymbol{x}^0) = \left\{(\cos\theta, \sin\theta, 0)^{\mathrm{T}} \,\middle|\, -\mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \leqslant \theta \leqslant \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)\right\}$$

$$S_\xi^2(X, \boldsymbol{x}^0) = \left\{(\cos\theta, \sin\theta, 0)^{\mathrm{T}} \,\middle|\, \pi - \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \leqslant \theta \leqslant \pi + \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)\right\}$$

有
$$S_\xi(X, \boldsymbol{x}^0) = S_\xi^1(X, \boldsymbol{x}^0) \cup S_\xi^2(X, \boldsymbol{x}^0)$$

而 $S_\xi^1(X, \boldsymbol{x}^0)$、$S_\xi^2(X, \boldsymbol{x}^0)$是顶点在原点位于 Ox_1x_2 平面上的 2 个(对顶)锥. 其图形见图 6.3.3.2.

其中

$$\theta' = \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

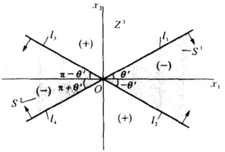


图 6.3.3.2

左、右半平面上的阴影区域所示的锥即分别为 $S^1(X, \boldsymbol{x}^0)$、$S^2(X, \boldsymbol{x}^0)$而 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$则是全平面. 这里 S^1、S^2 所示的之所以是 2 个锥,是因为它们不能用同一组线性不等式表示出来. 如 S^1 可由 l_1, l_2 所表示的射线作为棱线表示,S^2 则只能由 l_3, l_4 作为棱线来表示. l_1 与 l_4(l_2 与 l_3)虽然处于一条直线上,但却具有相反的法方向. 故若设 l_1、l_4 所在直线为 L_1, l_2、l_3 所在直线为 L_2,且设

$$L_1: x_2 = kx_1 \quad L_2: x_2 = -kx_1 \quad k = \frac{b}{a}$$

则决定 S^1 的不等式是

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 \geqslant 0 \\ kx_1 - x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

而决定 S^2 的不等式是

$$\begin{cases} -kx_1 - x_2 \geqslant 0 \\ -kx_1 + x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

所以 $S^2(X, \boldsymbol{x}^0) = -S^1(X, \boldsymbol{x}^0)$[1], 即为对顶锥.

如果类似以上的作法,取 s 轴为 x_1 轴,t 轴为 x_2 轴,构造 Ots 平面,则得到的图形(相对于图 6.3.2.5 而言)就是一个新的(造成 $Z^1(\boldsymbol{x}^0) \neq S(X, \boldsymbol{x}^0)$的)类

[1] 如果将这 2 组不等式合在一起,则只能是完全矛盾的不等式组,故只有平凡解.

型，相当于图 6.3.2.5 的(d)中去掉 l_s 直线，并将 l_k、l_h 直线所夹的斑点阴影区域表示的锥也包含在 $S(X, \boldsymbol{x}^0)$ 之中的情形.

注意在前 2 个示例中，$g_1(\boldsymbol{x}) = 0$ 曲面(线)在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处均与另一个约束函数的切平面相切并表现为**拐点**，在这个示例中 $g_1(\boldsymbol{x}) = 0$ 曲面也具有相类似的几何性状. 只不过现在 $\boldsymbol{x}^0$ 点呈现为**鞍点**. 由于在 2 维空间中，曲线拐点的特征是二阶导数为 0，而在高维空间中，利用法截平面的分析已知，曲面的法截曲线的二阶导数即为曲面的法曲率，故对应于二阶导数为 0 即应等价地理解为曲面的法曲率为 0.

在本例中，可证 g_1 鞍面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的法曲率即在 L_1、L_2 直线方向上为 0. 这可由

$$\nabla^2 g_1(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

及拟特征值多项式

$$\begin{vmatrix} \mu - \frac{2}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu + \frac{2}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\left(\mu - \frac{2}{a^2}\right)\left(\mu + \frac{2}{b^2}\right) = 0$$

得拟特征值

$$\mu_1 = \frac{2}{a^2} > 0 > \mu_2 = -\frac{2}{b^2}$$

以及 Ox_1x_2 平面上任意方向上的法曲率（因为 $\| \nabla g_1(\boldsymbol{x}^0) \| = 1$）$\kappa_1 = -\mu_1$，$\kappa_2 = -\mu_2$，

$$\kappa_{\kappa_1}(\varphi) = -(\cos^2\varphi \cdot \mu_1 + \sin^2\varphi \cdot \mu_2) \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

可知，当

$$\varphi - \begin{cases} \pm \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \\ \pi \pm \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

时

$$\kappa_{g_1}(\varphi) = 0$$

所以，在图 6.3.3.2 中的阴影区域内，$\kappa_{g_1}(\varphi) < 0$，而在阴影区域外 $\kappa_{g_1}(\varphi) > 0$. 由法曲率符号的意义即知，曲面 g_1 在阴影区域内，以 $\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0) = (0, 0, -1)^{\mathrm{T}}$ 方向看来是“严格上凸”的(这里的“上”的方向即指$\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0)$方向)，所以，在图 6.3.3.2 的阴影区域中标上了“－”号，而在阴影区域以外则标上“＋”号.

当然，这里的“严格上凸”仅是指以法曲率符号所表示的曲面法截曲线的凸性. 因此，这一凸性的几何意义与曲面在一点处的严格凸性还是有差异的. 法截曲线的凸性仅指曲面一点处沿某一切方向上的凸性状，而曲面的严格凸性则是指曲面在一点的邻域内沿任意切方向上的凸性状.

注意到法曲率符号为“＋”时，从几何上讲，就表示曲面的法截曲线与曲面的法方向向量同在曲面切平面的同一侧(即切平面的正半空间一侧)，而法曲率符号为“－”时，则法截曲线与法方向就在切平面的异侧.

故在本例中，图 6.3.3.2 中阴影区域的 g_1 曲面是与$\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0)$方向在切平面异侧的曲面. 现在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切平面就是 Ox_1x_2 平面，故阴影区域对应的曲面 g_1 就是位于 $x_3 \geqslant 0$ 半空间上的曲面部分，即满足约束条件 $g_2(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 的那部分曲面. 由此即知，图 6.3.3.2 中的阴影区域就是本例可行区域 X 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的闭切锥 $S(X, \boldsymbol{x}^0)$.

在§3.4.1 节中，已就任一曲面 f 在其上一点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的拟特征值或法曲率的符号在过 $\boldsymbol{x}^0$ 的切超平面上的分区(即 Dupin 标形)的方法给出了具体的说明. 并且，现在曲面的切平面是 2 维平面，易知，在 2 维平面上，法曲率分区可用(3.4.1.22a)式给出的线性近似锥来表示.

由那里的方法，对于本例中曲面 g_1 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的法曲率为 0 的方向，以 R^3 空间坐标系表示的形式是

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{\alpha}^0 = \begin{bmatrix} \pm \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \pm \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla g_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) = 0$$

把这 $\boldsymbol{\alpha}^0$ 看成是R^3空间中从原点出发的射线的方向向量——这可决定 4 条射线——则这些射线与 x_1 轴的夹角(以 R^3_+ 象限为例)就是

$$\theta' = \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

这就是图 6.3.3.2 中的情形.

且由于现在本例规划中 $g_2(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 的存在(并且 $g_2(\boldsymbol{x}^0) = 0$ 成立),故 $S(X, \boldsymbol{x}^0)$就应等于 $g_1(\boldsymbol{x}) = 0$ 决定的鞍面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的拟特征值 $\mu \geqslant 0$ 的方向的 g_1 曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点切平面上的分区. 因此,我们可以利用约束曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的法曲率(或拟特征值)符号的分区来综合地描述产生 $Z^1(\boldsymbol{x}^0) \neq S(X, \boldsymbol{x}^0)$ 的情形. 更多的内容可见以下的例 6.3.3.2.

记

$$\text{int}\, P(A) = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \in R^m\}$$

是不等式方程组 $A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 解集合的内点集合,则线性化锥的内点集合(表示为方向锥)可表成

$$\text{int}\, P(G(\boldsymbol{x}^0)) = \{\boldsymbol{z} \mid G(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \quad \boldsymbol{z} \in R^m,\ \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} = 1\}$$

推论 6.3.3.1 当(P1)规划决定的

$$\text{int}\, P(G(\boldsymbol{x}^0)) \neq \varnothing \Rightarrow Z^1(\boldsymbol{x}^0) = S(X, \boldsymbol{x}^0)$$

反之未必. ■

证明: 因为当 $\text{int}\, P(G(\boldsymbol{x}^0)) \neq \varnothing$,则有 $\boldsymbol{\xi} \in \text{int}\, P(G(\boldsymbol{x}^0)) \quad \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = 1$,对充分小的 $\delta > 0$,作

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\xi}t \quad 0 < t < \delta \Rightarrow \boldsymbol{x} \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0)$$

这时总有

$$g_i(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\xi}t) > 0 \quad i \in I(\boldsymbol{x}^0)$$

因为对 $g_i(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\xi}t)$ 作 Taylor 展开,有

$$g_i(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\xi}t) = g_i(\boldsymbol{x}^0) + \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\xi}t + \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\nabla^2 g_i(\boldsymbol{x}^0 + \theta_i\boldsymbol{\xi}t)\boldsymbol{\xi} \cdot \frac{t^2}{2} \quad 0 < \theta_i < 1$$

由于 $g_i(\boldsymbol{x})$二阶可微,所以总有

$$M_i = |\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\nabla^2 g_i(\boldsymbol{x}^0 + \theta_i\boldsymbol{\xi}t)\boldsymbol{\xi}| < +\infty$$

且由 $\boldsymbol{\xi} \in \text{int}\, P(G(\boldsymbol{x}^0))$,有

$$\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\xi} > 0 \quad i \in I(\boldsymbol{x}^0)$$

以及

$$g_i(\boldsymbol{x}^0) = 0 \quad i \in I(\boldsymbol{x}^0)$$

故取

$$0 < \delta < 2\frac{\min\limits_{i \in I(\boldsymbol{x}^0)}(\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\xi})}{\max\limits_{i \in I(\boldsymbol{x}^0)}(M_i)} \quad \text{及}\ 0 < t < \delta$$

就总有

$$g_i(\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{\xi}t)=\left(\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\nabla^2 g_i(\boldsymbol{x}^0+\theta\boldsymbol{\xi}t)\boldsymbol{\xi}\cdot\frac{t}{2}\right)\cdot t>0 \quad i\in I(\boldsymbol{x}^0)$$

而对于 $j\notin I(\boldsymbol{x}^0)$，则当 δ 充分小，由 $g_j(\boldsymbol{x})$ 的连续性也总有

$$g_j(\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{\xi}t)>0$$

故

$$\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{\xi}t\in X.$$

由 $Z_\xi(\boldsymbol{x}^0,\delta)$ 的定义知

$$\boldsymbol{\xi}\in Z_\xi(\boldsymbol{x}^0,\delta)\Rightarrow \mathrm{int}\,P(G(\boldsymbol{x}^0))\subset Z_\xi(\boldsymbol{x}^0,\delta)$$

令 $\delta\to 0$，即有

$$\mathrm{int}\,P(G(\boldsymbol{x}^0))\subset S_\xi(X,\boldsymbol{x}^0)$$

另一方面，上文已说明 $S(X,\boldsymbol{x}^0)$ 的边界上的元素 $\boldsymbol{z}$，总是某个下标 i，使

$$\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}=0 \quad i\in I(\boldsymbol{x}^0)$$

成立的元素（见关于图 6.3.2.3 及以下的说明及(6.3.2.9)式）．故若取

$$\boldsymbol{z}\in \mathrm{int}\,S_\xi(X,\boldsymbol{x}^0)\Rightarrow \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}>0 \quad i\in I(\boldsymbol{x}^0)$$

即知

$$\mathrm{int}\,S_\xi(X,\boldsymbol{x}^0)\subseteq \mathrm{int}\,P(G(\boldsymbol{x}^0))$$

此即是说，取闭包后总有

$$\mathrm{cl}(\mathrm{int}\,P(G(\boldsymbol{x}^0)))=S_\xi(X,\boldsymbol{x}^0)$$

但

$$\mathrm{cl}(\mathrm{int}\,P(G(\boldsymbol{x}^0)))=Z_\xi^1(\boldsymbol{x}^0)$$

故有以上结论之前半部分．

反之，若有

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0)=S(X,\boldsymbol{x}^0)$$

不一定有 $\mathrm{int}\,P(G(\boldsymbol{x}^0))\neq\varnothing$．如图 6.3.2.5 中的(c)～(e)即为如此，即有以上推论．

因此，一些文献中将 $\mathrm{int}\,P(G(\boldsymbol{x}^0))$ 非空当作 $\boldsymbol{x}^0$ 点的“正则”条件，但其实质意义仍只是保证 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)=S(X,\boldsymbol{x}^0)$ 条件成立．

系 6.3.3.2 当(P1)规划约束函数 $g_i(\boldsymbol{x})$ $i\in I(\boldsymbol{x}^0)$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的 Jacobi 矩阵 $G(\boldsymbol{x}^0)$ 是行向量线性无关的，则 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)=S(X,\boldsymbol{x}^0)$． ■

因为此时 $G(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} > 0$ 恒有非平凡解，故 $\mathrm{int}\, P(G(\boldsymbol{x}^0)) \neq \varnothing$.

系 6.3.3.3 当(P1)规划问题的可行区域 X 在 $\boldsymbol{x}^0$ 是凸(或拟凸)的，则 $Z^1(\boldsymbol{x}^0) = S(X, \boldsymbol{x}^0)$. ■

利用原点在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的 Ots 坐标平面(截平面)方法易知，X 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域内是凸(或拟凸)的，$\mathrm{int}\, P(G(\boldsymbol{x}^0)) \neq \varnothing$.

由以上的分析即知，

推论 6.3.3.4 当

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) \neq S(X, \boldsymbol{x}^0)$$

时必只能有

$$\mathrm{int}\, P(G(\boldsymbol{x}^0)) = \varnothing$$ ■

这即是说一阶约束品性不成立的必要条件是

$$G(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} > 0$$

是矛盾方程组. 这等价于说，决定线性化锥 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 的只能是类似

$$\begin{cases} \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = 0 \\ \nabla g_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant 0 \end{cases} \quad i \neq j \quad i, j \in I(\boldsymbol{x}^0) \quad \boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$$

这样的方程组. 从而 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 只能是 R^m 空间上的某个超平面上的子集合(锥). 并且由于此时 $S(X, \boldsymbol{x}^0)$ 也只能是这个超平面上的子集合，所以取原点在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的 Ots 坐标平面，则 s 轴应位于这个超平面上，若取 t 轴与此超平面正交，则出现

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) \neq S(X, \boldsymbol{x}^0)$$

的 2 种情形：

当 X 可行区域在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域是非轴对称的曲面，只能是 $S(X, \boldsymbol{x}^0)$ 为 s 轴的正半轴，而 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 则为 s 轴的正、负半轴的情形，即由上文已详细分析过的情形.

在这种情况下，由以上的分析，在(P1)规划形式下，当线性化锥与闭切锥(在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处)不相等时，充要条件是在某个以 $\boldsymbol{x}^0$ 点为原点的(并适当选择 t 轴的正交方向所形成的)Ots 坐标平面上，线性化锥是 s 轴(正、负半轴)，而闭切锥则只是 s 正半轴. 这里 t 轴的方向可选取为与 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 正交的方向.

图 6.3.3.3 的(a)～(b)给出了 $\boldsymbol{x}^0$ 为极小值点时出现这样情形的全部可能图形. 其中 Ots 坐标系表示原点为 $\boldsymbol{x}^0$ 的 Ots 平面. g_i，g_j(以及 g_i'、g_j')曲线表示 $g_i(\boldsymbol{x}) = 0$，$i \in I(\boldsymbol{x}^0)$ 约束函数决定的曲面与 Ots 平面的交曲线. 阴影区域为可行区域 X 与 Ots 平面的交集合. 曲线(直线)上的箭头所指方向表示曲线(直线)的法方向.

若 $Z^1(\boldsymbol{x}^0) \neq S(X, \boldsymbol{x}^0)$，则由于 X 可行区域非轴对称，阴影区域就不能含有

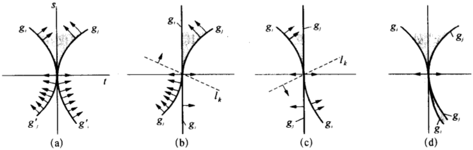


图 6.3.3.3

s 负半轴. 因此,在 Ots 平面上 X 可行区域的边界 g_i, g_j 不能同时为直线;其次以阴影区域表示的 Ots 平面上的可行区域不能是凸或拟凸的;再次,Ots 坐标系上不能有如上图中(b)、(c)所示的 l_k 直线(虚线表示不存在). 这里,l_k 直线是指某个约束函数 $g_k(\boldsymbol{x}) = 0$, $k \in I(\boldsymbol{x}^0)$,在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 处的切平面与 Ots 平面的交线. 因为如果存在 l_k 这样的直线(其上的箭头是代表法方向),那么,在(b)这样的情形下(在(a)也一样),必有 $Z^1(\boldsymbol{x}^0) = S(X, \boldsymbol{x}^0)$, 即线性化锥与闭切锥现在必只能都是 s 正半轴;而在(c)这样的条件下,则可行区域 X 必只能是 $\boldsymbol{x}^0$ 单点集,不在所要讨论之列. 由此即知当 $Z^1(\boldsymbol{x}^0) \neq S(X, \boldsymbol{x}^0)$ 时, 在 Ots 平面上的可行区域 X(边界)必定是凹(或拟凹)的. (a)图中的阴影区域是凹的,(b)图中的则可看成是拟凹的.

且由于此时 $S(X, \boldsymbol{x}^0)$ 为 s 正半轴,故阴影区域的边界 g_i、g_j 在 Ots 坐标系原点处必相切且法方向相反,或者说,必有

$$\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0) = -t\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0) \quad t > 0$$

$$\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta} = 0$$

$$\nabla g_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta} = 0$$

成立. 这里的 $\boldsymbol{\beta}$ 由(6.3.2.2)式决定.

设 $\boldsymbol{x}^0$ 点是正则的,即 $f(\boldsymbol{x})$, $g_i(\boldsymbol{x})$, $i \in I(\boldsymbol{x}^0)$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处均是可定向的.

考虑图 6.3.3.3 的(a). 由于 $\boldsymbol{x}^0$ 点正则,所以可以推知,g_i、g_i' 只能是某一个约束函数 $g_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad i \in I(\boldsymbol{x}^0)$ 与 Ots 平面的交曲线. 否则,若 g_i、g_j' 是某一个约束函数 $g_{i_j}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad i_j \in I(\boldsymbol{x}^0)$ 与 Ots 平面的交曲线,那么,以上(a)图表明 $g_{i_j}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 点处是不可定向的(法方向有相反的 2 个方向),但这在 $\boldsymbol{x}^0$ 点是正则的条件下是不可能的. 所以,此即表示,在(a)图所示情形下 g_i、g_i' 为一个约束函数决定的曲面上的截曲线,而 g_j、g_j' 则为另一个约束函数决定的曲面上的截曲线,并且,$\boldsymbol{x}^0$ 点一定是这两条截曲线的拐点,("拐点"的具体表述见下文). 上图中的(a)即如图 6.3.2.7.

图 6.3.3.3 的(b)如图 6.3.2.8,在 Ots 平面上,可行区域 X(交集)的边界中 g_j 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点是一个拐点,而另一边界 g_i 则是与 s 轴重合的直线,且 g_i 的法方向在 $\boldsymbol{x}^0$ 处与 g_j 曲线刚好相反. 而(c)在类型上其实等同于(b),区别仅在于现在 g_i 是以 $\boldsymbol{x}^0$ 为拐点的边界曲线而 g_j 是与 s 轴重合且在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处具有与 g_i 的法方向相反的法向量的直线.

当然也可以考虑更复杂一些的情形,如将图 6.3.3.3 中的(a)、(b)这样类型的情形理解为是在其他的约束函数

$$\begin{cases}\nabla g_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant 0 \\ \nabla g_h^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant 0\end{cases} \quad k,\ h \in I(\boldsymbol{x}^0),\ k,\ h \neq i,\ j$$

且
$$\nabla g_k(\boldsymbol{x}^0) = -t_{kh}\nabla g_h(\boldsymbol{x}^0) \quad t_{kh} > 0$$

决定的超平面上. 还可以设想有其他的约束函数 $g_k(\boldsymbol{x})$, $k \in I(\boldsymbol{x}^0)$ 在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 处的切平面的法向量与图 6.3.3.3 中的 g_i, g_j 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的法向量线性相关(成比例)的情形. 这些情况都没有对以上的分析添加更多的重要内容.

综合以上分析,可以有以下结论:

推论 6.3.3.5 (P1)规划问题在某个 $\boldsymbol{x}^0 \in X$, X 是(P1)的可行区域,且 X 在 $\boldsymbol{x}^0$ 邻域的边界曲面不是轴对称的,则

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) \neq S(X,\ \boldsymbol{x}^0)$$

的充分条件是

(1) 对任一个下标 $i \in I(\boldsymbol{x}^0)$,都有 $j \in I(\boldsymbol{x}^0)$, $i \neq j$,使

$$\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0) = -t_{ij}\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0) \quad t_{ij} > 0$$

(2) 任取 $\boldsymbol{z} \in S(X,\ \boldsymbol{x}^0)$ $\boldsymbol{z} \neq 0$,作直线

$$l_s:\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{z}\cdot s \quad s \in R$$

$$l_t:\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{\alpha}t \quad t \in R \quad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} = 0$$

及 Ots 截平面,

$$Ots:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\alpha}t + \boldsymbol{z}s$$

则若 g_i, g_j 是 $X \cap Ots$ 的边界曲线,必有

$$\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0) = -t_{ij}\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0) \quad t_{ij} > 0$$

且总可以取到 $\boldsymbol{\alpha}$,使 $\boldsymbol{x}^0$ 点或者就是 g_i, g_j 曲线的拐点;或者 $\boldsymbol{x}^0$ 点是其中一条曲线的拐点,而另一条曲线是直线且与 l_s 直线重合. ■

图 6.3.3.3 的(d)可用以说明,当 $X \cap Ots$ 的边界曲线 g_i, g_j 中,g_i 以 $\boldsymbol{x}^0$ 为

拐点，而 g_j 不是与 l_s（即 s 轴）线重合的直线时，如此图(d)，由阴影区域所表示的 $X\cap Ots$ 区域的 Sts 闭切锥

$$Sts = S(X,\ \boldsymbol{x}^0) \cap Ots$$

应当是 s 轴，而线性化锥 $Z^1(\boldsymbol{x}^0) \cap Ots$ 也刚好是 s 轴（注意 g_i、g_j 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点所具有的法方向刚好相反）. 故此时只能有

$$S(X,\ \boldsymbol{x}^0) \cap Ots = Z^1(\boldsymbol{x}^0) \cap Ots$$

而例 6.1.2 中的图 6.1.1 则可用以说明当可行区域 X 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域的边界曲线中，有一条是直线 g_1，而另一边界曲线 g_2 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处与此直线相切且具有与此直线相反的法方向，也不可能造成 $Z^1(\boldsymbol{x}^0) \neq S(X,\ \boldsymbol{x}^0)$ 的情形. 实际上是此时，$Z^1(\boldsymbol{x}^0)$、$S(X,\ \boldsymbol{x}^0)$均为 x_2 轴（可理解为是图 6.1.1 中的 g_1 直线平移至原点的结果）.

对于上文所说的"拐点"，在这里所涉指的情形下，由前文(6.3.2.2)～(6.3.2.11)式的分析，由 $\boldsymbol{\beta}$ 向量代表构造 l_s 直线即 s 轴（正方向）的向量，且设 $g_i(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\alpha}t + \boldsymbol{\beta}s)$ 是 $X\cap Ots$ 的边界曲线，则 $\boldsymbol{x}^0$ 为 g_i 的拐点是指

(1) $\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} \neq 0$, $\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta} = 0$ $(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0)$

(2) 故 $g_i(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\alpha}t + \boldsymbol{\beta}s) = 0$ 可决定

$$t = t_i(s)$$

函数.

(3) 在 $s = 0$ 处，有

$$\frac{\mathrm{d}t_i}{\mathrm{d}s} = 0 \quad \frac{\mathrm{d}^2 t_i}{\mathrm{d}s^2} = 0$$

成立.

如例 6.3.2.3 中的 $g_1(\boldsymbol{x})$约束函数，可得（唯一的）$\boldsymbol{\beta} = (-1,\ 0)^{\mathrm{T}}$，取 $\boldsymbol{\alpha} = (0,\ 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}^0 = (1,\ 0)$. 有 Ots 平面上的坐标变换式

$$x_1 = 1 - s,\ x_2 = t$$
$$g_1(\boldsymbol{x}) = (1 - x_1)^3 - x_2 = 0 \Rightarrow t = s^3$$

即成立 $s = 0$ 处 $t' = 0$ $t'' = 0$. $\boldsymbol{x}^0$ 即是 $g_1(\boldsymbol{x})$的拐点[1].

其次，另一种 $Z'(\boldsymbol{x}^0) \neq S(X,\ \boldsymbol{x}^0)$ 的情形是，可行区域 X 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的边界曲面是轴对称的. 那么，由以上方法所构造的 Ots 坐标平面上，在 s 正半轴属于

〔1〕 这里若取 $\boldsymbol{\alpha} = (0,\ -1)^{\mathrm{T}}$，情况也一样，在 $s = 0$ 处，仍有 $t' = 0$，$t'' = 0$. 在 $\boldsymbol{x} \in R^m$，$m > 2$ 时，拐点的性质一般地可用 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) = [0]$ 表示. 这在上文中已有说明.

$S(X, \boldsymbol{x}^0)$时，由轴对称性可知，s负半轴也必属于$S(X, \boldsymbol{x}^0)$. 如在图 6.3.3.2 中取 s 轴与 x_1 轴重合，即有此情形. 由以上已有的分析，$Z^1(\boldsymbol{x}^0)$与$S(X, \boldsymbol{x}^0)$在不相等时应位于某个 $\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}=0$ 决定的超平面上，故取 t 轴(与 s 轴正交)也在这一超平面上，则 Ots 平面上的图形必类似于图 6.3.3.2. $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$就不可能等同于$S(X, \boldsymbol{x}^0)$. 因为 $S(X, \boldsymbol{x}^0)$现在一定是两个对顶锥(集合)的并集，不可能用一组不等式解出，而 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$则只可能是一组不等式的解.

再由关于 $\boldsymbol{x}^0$ 点处曲面法截曲率符号的分析即知，这种情形里一定有下标 $j\in I(\boldsymbol{x}^0)$，并且 $\boldsymbol{x}^0$ 是 $g_j(\boldsymbol{x})=0$ 曲面的鞍点，且 $\nabla g_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}=0$ 决定的切超平面刚好与上文所指的那个 $\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)=0$ 决定的超平面(即 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$所在的超平面)重合.

可以这样说，在可行区域 X 的 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的边界曲面中有 $g_j(\boldsymbol{x})=0$, $j\in I(\boldsymbol{x}^0)$，使 $\boldsymbol{x}^0$ 为其鞍点时，若 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 又是位于 $\nabla g_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}=0$ 决定的超平面上的锥，那么，决定 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$的方程组是

$$\begin{cases} \qquad \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}=0 & \\ (\text{or} \quad \nabla g_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}=0) & i(j)\in I(\boldsymbol{x}^0) \\ \text{以及} \quad \nabla g_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}\geqslant 0 & k\in I(\boldsymbol{x}^0),\ k\neq i,\ j \end{cases}$$

而决定 $S(X, \boldsymbol{x}^0)$的方程组必然要包含决定 $g_j(\boldsymbol{x})=0$ 曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域的拟特征值 $\mu\geqslant 0$(或 $\mu\leqslant 0$) 的单位球面分割的方程组即 Dupin 标形的方程组[1]. 这是因为已假设了 $g_j(\boldsymbol{x})=0$ 是 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域 X 可行区域的边界. 但以上等式、不等式混合方程组与 Dupin 标形的分区一般地不会一致. 这即是导致 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)\neq S(X, \boldsymbol{x}^0)$ 的原因所在.

当然添加若干约束条件(或原本即存在这样的约束条件)可以使这一情形下的 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)\neq S(X, \boldsymbol{x}^0)$ 被消除掉. 如仍以例 6.3.3.1 为例，现添加约束条件如下：

$$g_3(\boldsymbol{x})=kx_1+x_2\geqslant 0$$

$$g_4(\boldsymbol{x})=kx_1-x_2\geqslant 0$$

其中 $k=\dfrac{b}{a}>0$. 则在图 6.3.3.2 上，现 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$、$S(X, \boldsymbol{x}^0)$均为右半平面上的阴影区域所表示的锥(即上文所说的 S^1). 二者即相等. 但这一定是极巧合的事，并且，这样的处理在 X 边界曲面为轴对称时，又总是以改变原规划的可行区域为代价的.

推论 6.3.3.6 (P1)规划问题在某个 $\boldsymbol{x}^0\in X$, X 是(P1)规划的可行区域，

---

[1] 即§3.4.1中分析过的诸式，如(3.4.1.21)式.

且 X 在 $\boldsymbol{x}^0$ 邻域的边界曲面中至少有一个

$$g_j(\boldsymbol{x}) = 0 \quad j \in I(\boldsymbol{x}^0)$$

是使 $\boldsymbol{x}^0$ 为其的鞍点，成立

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) \neq S(X, \boldsymbol{x}^0)$$

的充分条件是

对任一下标 $i \in I(\boldsymbol{x}^0)$，都有 $k \in I(\boldsymbol{x}^0) \quad k \neq i$，使

$$\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0) = - t_{ik} \nabla g_k(\boldsymbol{x}^0) \quad t_{ik} > 0$$ ■

当然应当指出，一阶约束品性

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) = S(X, \boldsymbol{x}^0)$$

成立，并不是 $\boldsymbol{x}^0$ 成为可行区域 X 的局部极小值点的条件（必要或充分条件之一）. 一阶约束品性（包括二阶约束品性）的意义仅在于可以确定，在判别 $\boldsymbol{x}^0$ 点是否成为可行区域 X 的局部极小值点时所使用的"Kuhn－Tucker 条件"这一方法的合法性. 例 6.3.2.3 即可用以说明这一点. 在那里，$\boldsymbol{x}^0 = (1, 0)^{\mathrm{T}}$ 是规划的极小值点，但由于 $Z^1(\boldsymbol{x}^0) \neq S(X, \boldsymbol{x}^0)$，故不能用"Kuhn－Tucker 条件"这一方法判别 $\boldsymbol{x}^0$ 点是否成立为极小值点.

结束本节时，再给出当可行区域 X 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的边界曲面中含有 2 个曲面 g_i，g_j，且 g_i，g_j 均以 $\boldsymbol{x}^0$ 点为鞍点，并在 $\boldsymbol{x}^0$ 处相切时，$S(X, \boldsymbol{x}^0)$的决定方法. 仅以以下示例说明.

例 6.3.3.2 约束条件

$$g_1(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - x_3 \geqslant 0$$

$$g_2(\boldsymbol{x}) = -\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2}{c^2} + \frac{\left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)^2}{d^2} + x_3 \geqslant 0$$

$$\boldsymbol{x}^0 = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}} \quad a, b, c, d > 0$$

求解 $S(X, \boldsymbol{x}^0)$.

与例 6.3.3.1 的区别在于本例是两个鞍面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点相切，可行区域 X 是这两个鞍面之间的一个区域.

在关于鞍面的法曲率分析（以及例 6.3.3.1）中已知了，$g_1(\boldsymbol{x}) = 0$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点切平面上的法曲率分区是图 6.3.3.2. 由法曲率分析的内容已知 $g_1(\boldsymbol{x})$（及 $g_2(\boldsymbol{x})$）类型的曲面在鞍点处的法曲率符号分区是

$$t^{-}=\begin{bmatrix}\pm 1 & \pm\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ 0 & \pm\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{bmatrix}\boldsymbol{v}$$

$$t^{0}=\begin{bmatrix}\pm\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \pm\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{bmatrix}$$

$$t^{+}=\begin{bmatrix}0 & \pm\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \pm 1 & \pm\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{bmatrix}\boldsymbol{v}$$

这里 $\boldsymbol{v}\geqslant \boldsymbol{0}$　$\boldsymbol{v}=(v_1,\ v_2)^{\mathrm{T}}$，$v_1+v_2=1$.

那么，对 $g_2(\boldsymbol{x})=0$，利用坐标变换

$$X_1=\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2$$

$$X_2=-\frac{1}{2}x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}x_2$$

得

$$X_3=x_3$$

$$g_2(\boldsymbol{X})=-\frac{X_1^2}{c^2}+\frac{X_2^2}{d^2}+X_3\geqslant 0$$

故 $g_2(\boldsymbol{X})=0$ 在 $\boldsymbol{X}^0=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 点的切平面上的法曲率符号的分区应当是(注意 g_1、g_2 约束函数中，c^2、d^2、a^2、b^2 前的符号差异)，

$$\boldsymbol{T}^{-}=\begin{bmatrix}\pm 1 & \pm\dfrac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}\\ 0 & \pm\dfrac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}\end{bmatrix}\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{T}^{0}=\begin{bmatrix}\pm\dfrac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}\\ \dfrac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}^{+}=\begin{bmatrix}0 & \pm\dfrac{d}{\sqrt{c^{2}+d^{2}}}\\ \pm 1 & \pm\dfrac{c}{\sqrt{c^{2}+d^{2}}}\end{bmatrix}\boldsymbol{v}$$

$\boldsymbol{v}\geqslant \mathbf{0}\quad v_1+v_2=1.$

注意到 $\boldsymbol{T}^{-}$，$\boldsymbol{T}^{0}$，$\boldsymbol{T}^{+}$ 这些量都是在 $g_2(\boldsymbol{x})=0$ 决定的曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 的切平面上，以拟特征向量作为方向向量决定的坐标系上定义的.

易知，对于 g_1 曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的拟特征向量是

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\pm 1 & 0\\ 0 & \pm 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

对于 g_2 曲面，可求出拟特征向量矩阵. 首先易知对于 g_2 曲面有拟特征值

$$\mu_1=-\frac{2}{c^2}\quad \mu_2=\frac{2}{d^2}$$

对于 μ_1 有

$$\begin{aligned}-2\left(\frac{1}{d^2}+\frac{1}{c^2}\right)\alpha_1 \quad &=0\\ -\frac{2}{d^2}\alpha_3+\zeta &=0\\ \alpha_3 \quad &=0\\ \sum_{i}^{2}\alpha_i^2 \quad &=1\end{aligned}$$

得拟特征向量

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}^1=\begin{bmatrix}0\\ \pm 1\\ 0\end{bmatrix}$$

类似地可得

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}^2=\begin{bmatrix}\pm 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

可知 g_2 曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的法曲率符号分区(例如)是图 6.3.3.4 所示.

注意现在的 OX_1X_2 坐标系是由 Ox_1x_2 逆时针旋转 30°而来，并且 g_1 曲面的法曲率符号的分区就是(如)图 6.3.3.2，那么，将图 6.3.3.4 按坐标变换对应关系画到图 6.3.3.2 上，便有图 6.3.3.5.

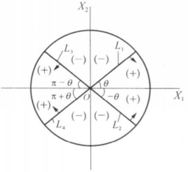


图 6.3.3.4

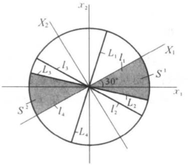


图 6.3.3.5

由于

$$\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}\qquad \nabla g_2(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

故 g_1、g_2 曲面应在以 $-\nabla g_{1,2}(\boldsymbol{x}^0)$ 方向看来是上凹的部分，可围成可行区域 X. 这样，图 6.3.3.4 旋转后迭加到图 6.3.3.2 上——假设图 6.3.3.2 中的 $\theta'=30°$—— 图 6.3.3.4 中的(+)区域与图 6.3.3.2 中的(−)区域的重合部分即如图 6.3.3.5 中的阴影区域，为 2 个对顶锥 S^1、S^2，所以

$$S(X,\ \boldsymbol{x}^0)=S^1\cup S^2$$

易知本例中的线性化锥 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 是 Ox_1x_2 平面，故

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0)\neq S(X,\ \boldsymbol{x}^0)$$

当然，我们也可以用代数方法来确定类似本例中的两个鞍面(相切)所构成的 S^1、S^2 这样的锥. 利用鞍面法截曲率符号在 $\boldsymbol{x}^0$ 点切平面上的分区，可以确定 g_1、g_2 上各自法截曲率 $\kappa_n\leqslant 0$、$\kappa_n\geqslant 0$ 的方向锥，并记

$$\begin{cases}g_1:\ \boldsymbol{x}=A^1\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{x}=A^2\boldsymbol{v}\\ g_2:\ \boldsymbol{x}=B^1\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{x}=B^2\boldsymbol{v}\end{cases}\quad \boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0}\quad \sum v_i=1$$

分别代表 g_1、g_2 在 $\boldsymbol{x}^0$ 切平面上使法截曲率 $\kappa_n\leqslant 0$、$\kappa_n\geqslant 0$ 的方向锥，则 S^1、S^2 应是这 4 个锥的交集合. 这可以通过检验 $A^{1,2}$ 矩阵的各个列向量能否以 $B^{1,2}$ 矩阵的列向量以正线性组合的方式表出，并且对 $B^{1,2}$ 矩阵的各个列向量作同样的检验，就可以确定构成 S^1、S^2 这 2 个锥的各个方向向量. 以 S^1 为例，可表示成

设 $S^1 = \{x \mid x = A^1 v\} \cap \{x \mid x = B^1 v\} \neq \varnothing$，$x \in S^1$，则

$$x = \sum (a^1)^{i_t} v_t + \sum (b^1)^{j_s} v_s \quad v_t,\ v_s \geqslant 0 \quad \sum v_t + \sum v_s = 1$$

其中 $(a^1)^{i_t}$，$(b^1)^{j_s}$ 分别为矩阵 A^1、B^1 中的第 i_t、j_s 列向量，并且有向量 C_{i_t}、D_{j_s} 使下式成立

$$(a^1)^{i_t} = B^1 \cdot C_{i_t} \qquad C_{i_t} \geqslant 0$$

$$(b^1)^{j_s} = A^1 \cdot D_{j_s} \qquad D_{j_s} \geqslant 0$$

这里的分析都可以推广到更高维空间中去.

最后，可以给出**一阶约束品性** $Z^1(x^0) = S(X,\ x^0)$ **的几何意义**. 在本节开始处已论述了在 x^0 点处的可行方向向量 $z \in Z^1(x^0)$，在以后的分析中指出了，当 $Z^1(x^0) \neq S(X,\ x^0)$ 时，$z \in Z^1(x^0)$，但 z 可能不是 X 的可行方向向量. 但由 $S(X,\ x^0)$ 的构造，任一 $z \in S(X,\ x^0)$ 都必是 x^0 点处的可行方向向量（或是一列可行方向向量 z_n 的极限向量）. 故，若 $Z^1(x^0) = S(X,\ x^0)$，**即保证了** $Z^1(x^0)$ **中的任一向量** z **都是** X **的可行方向向量**（或是一列可行方向向量 z_n 的极限向量）.

§ 6.4 局部极小值点的可微曲线边界——二阶约束品性

§ 6.4.1 二阶约束品性(A)，$Z^1(x^0)$、$\hat{Z}^1(x^0)$ 与 $\hat{\hat{Z}}^1(x^0)$ 集合的相互关系

在定义 6.1.3 中已经提及局部极小值点 x^0 点处的二阶约束品性，是指 $z \neq 0$，$z \in \hat{Z}^1(x^0)$，且 z 与包含于 X 的边界中的一条二次可微弧相切. 现在，在(P1)规划中，由(6.1.5)式，

$$\hat{Z}^1(x^0) = \{z \mid \nabla g_i^{\mathrm{T}}(x^0) z = 0,\ i \in I(x^0)\} \qquad \text{—(6.4.1.1)}$$

则二阶约束品性具体是指[1]，对每个 $z \neq 0$，$z \in \hat{Z}^1(x^0)$，存在一个定义在 $\theta \in [0,\ \varepsilon] \subset R$ 上，值域在 R^m 中的二次可微函数 $\alpha(\theta)$，使得 $\alpha(0) = x^0$ 且对 $0 \leqslant \theta \leqslant \varepsilon$ 有，

$$g_i(\alpha(\theta)) = 0,\ i \in I(x^0) \qquad \text{—(6.4.1.2)}$$

以及对于某个正数 $\lambda > 0$，有

〔1〕 引自《非线性规划》上册，M. Avriel，第 43 页，并参见第 42 页上 Kuhn - Tucker 原先提出的约束品性条件.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}(0)}{\mathrm{d}\theta} = \lambda \boldsymbol{z} \qquad —(6.4.1.3)$$

以下称这里所规定的约束品性为“**二阶约束品性(A)**”，并事先假设本节以下分析中总有一阶约束品性成立.

另由(6.1.7)式，在(P1)规划形式下，有

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{z} \mid \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = 0 \quad i \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0),\ \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant 0 \quad j \in I(\boldsymbol{x}^0),\ j \neq i\} \qquad —(6.4.1.4)$$

应说明，由方程组

$$\begin{cases}\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = 0 & i \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0)\\ \nabla g_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant 0 & j \in I(\boldsymbol{x}^0)\end{cases}$$

及 $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0) \subseteq I(\boldsymbol{x}^0)$ 的关系，可知此方程组的意义实际是指

$$\begin{cases}\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = 0 & i \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0)\\ \nabla g_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant 0 & j \in (I(\boldsymbol{x}^0) - \hat{I}(\boldsymbol{x}^0))\end{cases}$$

所以本书中有时也将“$j \in (I(\boldsymbol{x}^0) - \hat{I}(\boldsymbol{x}^0))$”的条件用“$j\neq i$”(或(6.1.4.3)式中的“$i \neq i_k$”)形式表示出来.

比较$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$、$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合与线性化锥 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$集合的定义，可知有关系

$$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) \subseteq \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \subseteq Z^1(\boldsymbol{x}^0) \qquad —(6.4.1.5)$$

由线性化锥的定义，设 $\mathrm{rank}(G(\boldsymbol{x}^0)) = r$，可将 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$表示成(见(5.5.3.1)式)

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} = \Lambda \boldsymbol{t} + \Pi B^{-1}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-r} \quad \boldsymbol{u} \in P^+(W)\} \qquad —(6.4.1.6)$$

并由 $P^+(W)$的结构，最终可以将 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$的元素 $\boldsymbol{z}$ 表示为(见(5.5.2.29)式)

$$\boldsymbol{z} = \Lambda \boldsymbol{t} + D_g \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-r},\ \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{z} \in Z^1(\boldsymbol{x}^0) \qquad —(6.4.1.7)$$

这里 W 表示的是 Jacobi 矩阵 $G(\boldsymbol{x}^0)$中某一个极大线性无关行向量组表示下的其他行向量的线性组合的系数矩阵(见(5.5.2.22)式). 从而(6.4.1.6)式中的 $\boldsymbol{u}\in P^+(W)$是指

$$\begin{cases}W\boldsymbol{u} \geqslant 0\\ \boldsymbol{u} \geqslant 0\end{cases}$$

方程的解 $P(W\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0})$. 由(5.3.2.28)式，上式的解又可表成

$$\boldsymbol{u} = D_v \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0} \quad D_v \geqslant 0 \qquad —(6.4.1.8)$$

所以，这里的矩阵 D_g 是表示

$$D_g = \Pi B^{-1} D_v \qquad —(6.4.1.9)$$

由此，马上可以知道，有

$$\begin{cases} \boldsymbol{z} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) \Rightarrow \boldsymbol{z} = \Lambda \boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-r} \\ \boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \Rightarrow \boldsymbol{z} = \Lambda \boldsymbol{t} + D_g \hat{\boldsymbol{v}} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-r} \quad \hat{\boldsymbol{v}} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad —(6.4.1.10)$$

这里的 $\hat{\boldsymbol{v}}$ 向量是指(6.4.1.7)中的参向量 $\boldsymbol{v}$ 按以下关系式决定的

$$\begin{cases} \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \cdot D_g \boldsymbol{v} = 0 \quad i \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0) \\ \nabla g_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \cdot D_g \boldsymbol{v} \geqslant 0 \quad j \in (I(\boldsymbol{x}^0) - \hat{I}(\boldsymbol{x}^0)) \\ \qquad \boldsymbol{v} \geqslant 0 \end{cases} \qquad —(6.4.1.11)$$

方程组的解.

由不等式方程组的解，总成立乘积矩阵

$$G(\boldsymbol{x}^0) \cdot D_g = [g_{ij}] \quad g_{ij} \geqslant 0 \qquad —(6.4.1.12)$$

故对于(6.4.1.11)式可得

$$\begin{cases} \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \cdot D_g \boldsymbol{v} = \sum_k g_{ik} v_k = 0 \quad i \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0) \\ \nabla g_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \cdot D_g \boldsymbol{v} = \sum_k g_{jk} v_k \geqslant 0 \quad j \in (I(\boldsymbol{x}^0) - \hat{I}(\boldsymbol{x}^0)) \\ \qquad v_k \geqslant 0 \quad k = 1, 2, \cdots, d \end{cases} \qquad —(6.4.1.13)$$

这里 d 是(6.4.1.11)式中 $\boldsymbol{v}$ 向量的维数，也即是 D_g 矩阵的列维数. 因为(6.4.1.13)式中的各个 $g_{ik} \geqslant 0$, $v_k \geqslant 0$，显然就有解，对 $k = 1, 2, \cdots, d$

$$v_k = \begin{cases} p \quad 当\ g_{ik} = 0 \quad i \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0) \quad p \geqslant 0 \\ 0 \quad 当\ g_{ik} > 0 \quad i \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0) \end{cases} \qquad —(6.4.1.14)$$

利用(6.4.1.14)式给出的 v_k，取 $p \equiv 1$，可得 $\hat{\boldsymbol{v}}$ 的表达形式，

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} v_1 & & & 0 \\ & v_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & v_d \end{bmatrix} \boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{h} \in R_+^d \qquad —(6.4.1.15)$$

例 6.4.1.1 对以下规划问题求解$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$，$\hat{\hat{Z}}^2(\boldsymbol{x}^0)$集合

$$\min f(\boldsymbol{x}) = (x_1-2)^2+(x_2+1)^2+(x_3-1)^2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = \left(x_1-\frac{5}{2}\right)^2+x_2^2+\left(x_3-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{2}\geqslant 0 \\ g_2(\boldsymbol{x}) = \left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2+x_2^2+\left(x_3-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\geqslant 0 \\ g_3(\boldsymbol{x}) = 3x_1-x_2+2x_3-4 \geqslant 0 \end{cases}$$

取 $\boldsymbol{x}^0=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 下一节会说明这里的 $\boldsymbol{x}^0$ 不是局部极小值点. 这里先解出$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$、$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合.

由

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix}-2\\4\\0\end{bmatrix}\quad \nabla g_1(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}\quad \nabla g_2(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\quad \nabla g_3(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$$

可得唯一的 Lagrange 乘子 $\boldsymbol{\omega}=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$

由于

$$G(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix}-3&2&1\\1&2&-1\\3&-1&2\end{bmatrix}\quad G^{-1}(\boldsymbol{x}^0)=\frac{1}{26}\begin{bmatrix}-3&5&4\\5&9&2\\7&-3&8\end{bmatrix}$$

故线性化锥(6.4.1.7)式等号右边第一项 $\Lambda t\equiv \mathbf{0}$,

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0)=\left\{\boldsymbol{z}\left|\boldsymbol{z}=\frac{1}{26}\begin{bmatrix}-3&5&4\\5&9&2\\7&-3&8\end{bmatrix}\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{v}\geqslant\mathbf{0}\right.\right\}$$

从而在(6.4.1.10)中

$$\boldsymbol{z}\in\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)\Rightarrow\boldsymbol{z}=\Lambda t=\mathbf{0}\Rightarrow\boldsymbol{z}=\mathbf{0}\Rightarrow\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)=\{\mathbf{0}\}$$

现在 $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)=\{1,2\}$ $I(\boldsymbol{x}^0)=\{1,2,3\}$ 且

$$D_g=G^{-1}(\boldsymbol{x}^0)$$

$$G(\boldsymbol{x}^0)\cdot D_g=I_3$$

I_3 为 3×3 阶单位阵,由(6.4.1.14)～(6.4.1.15)式

$$\hat{\boldsymbol{v}}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{h}\quad \boldsymbol{h}\in R_+^3$$

此式可简化为

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} h \quad h \geqslant 0$$

即得(简化为)

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{ \boldsymbol{z} \left| \boldsymbol{z} = D_g \hat{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} h \quad h \geqslant 0 \right. \right\}$$

由(6.4.1.10)式～(6.4.1.14)式可见,当且仅当

$$\begin{cases} \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \cdot D_g \boldsymbol{v} = 0 & i \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0) \\ \nabla g_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \cdot D_g \boldsymbol{v} > 0 & j \in (I(\boldsymbol{x}^0) - \hat{I}(\boldsymbol{x}^0)) \\ \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \quad \text{—(6.4.1.16)}$$

方程组相容(有解),$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \neq \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$,否则,即便 $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0) \subset I(\boldsymbol{x}^0)$,仍总有 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$.

而(6.4.1.16)式有解即表示按(6.4.1.14)式决定的 $\boldsymbol{v}$ 的分量 v_k 中,存在至少一个下标 k,成立

$$g_{ik} = 0 \quad i \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0) \Rightarrow v_k = p \geqslant 0 \quad \text{—(6.4.1.17)}$$

从而可取到 $v_k > 0$(取 $p > 0$ 时). 这里的 g_{ik} 是由(6.4.1.12)式定义的乘积矩阵 $G(\boldsymbol{x}^0) \cdot D_g$ 的第 i 行、第 k 列列元素.

应当注意到$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合的定义中,与$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合不同,是涉及到一阶最优性条件中的 Lagrange 乘子 $\boldsymbol{\omega}$ 正数分量的下标,即$\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$集合的,而 $\boldsymbol{\omega}$ 乘子向量又往往不是唯一的. 所以$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合的意义在分析上稍具复杂性. 但有一点很明显,仅当

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \neq \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$$

时,$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合才具有实际意义,否则,仅需考虑$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$即可. 因此,以下的分析主要即为了说明在什么情况下,才令有 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \neq \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$,以及二者的差异的几何意义又是什么.

对于$\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$集合的确定,可以采用这样 2 种方式:

第 1 种方式,以核规划的形式予以确定,可以暂先不考虑二阶条件,而只以

一阶最优性来确定核规划. 由核规划的意义,在(P1)形式的核规划下,一阶最优性条件中的 Lagrange 乘子 $\boldsymbol{\omega} > \mathbf{0}$. 因此,这时一定有以下结果,即

$$I(\boldsymbol{x}^0) = \hat{I}(\boldsymbol{x}^0) \Rightarrow \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$$

且

$$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \begin{cases} \Lambda t \quad t \in R^{m-r} & \operatorname{rank}(G(\boldsymbol{x}^0)) = r < m \\ \{\mathbf{0}\} \quad \operatorname{rank}(G(\boldsymbol{x}^0)) = m \end{cases}$$

第 2 种方式,保持原始的(P1)规划形式,仅按(6.2.1.25)式确定出一阶最优条件中的 Lagrange 乘子 $\boldsymbol{\omega}$ 的矩阵 Φ_ω,再由 Φ_ω 矩阵的任一列向量 $\boldsymbol{\omega}^j$ 决定具体所用的乘子,并可得到对应的 $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$ 集合. 在第二种方式下, $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0) \subseteq I(\boldsymbol{x}^0)$, 即可能导致 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) \neq \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 的情形. 以下记由 Φ_ω 矩阵的列向量 $\boldsymbol{\omega}^j$ 决定的 $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$ 集合为 $\hat{I}_j(\boldsymbol{x}^0)$.

在第 2 种方式下,若 $\operatorname{rank}(G(\boldsymbol{x}^0)) = m$,且 $\boldsymbol{\omega}^j > \mathbf{0}$,则 $\hat{I}_j(\boldsymbol{x}^0) = I(\boldsymbol{x}^0)$, 并只能有

$$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\mathbf{0}\}$$

若记 $\boldsymbol{\omega}^j = (\omega_1^j, \omega_2^j, \cdots, \omega_v^j)^{\mathrm{T}}$,在 $\operatorname{rank}(G(\boldsymbol{x}^0)) = m$ 时,又有 $\boldsymbol{\omega}^j \geqslant 0$ 且有 $\omega_{i_k}^j > 0$; $k = 1, 2, \cdots, q$, $1 \leqslant q < m$; $\omega_i^j = 0$, $i \neq i_k$. 那么, $\hat{I}_j(\boldsymbol{x}^0) \subset I(\boldsymbol{x}^0)$. 注意以下二点,首先 $\boldsymbol{\omega}^j$ 是 Φ_ω 矩阵的第 j 列向量,故由 $\boldsymbol{\omega}^j$ 的构造, $\omega_{i_k}^j > 0$ 所对应的各个 $\nabla g_{i_k}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$ 向量是线性无关的,其次,这时 Jacobi 矩阵 $G(\boldsymbol{x}^0)$ 的行维数 $v \geqslant m$. 在这种情况下, $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 是以下方程组的解集合,

$$\begin{cases} \nabla g_{i_k}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = 0 \quad k = 1, 2, \cdots, q \\ \nabla g_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant 0 \quad j \neq i_k \end{cases} \qquad \text{—(6.4.1.18)}$$

这一方程组是

$$G(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant 0$$

方程组的一个(子)方程组. 且现在 $\operatorname{rank}(G(\boldsymbol{x}^0)) = m$. 因此,

若 $v = m$, 则由上一章推论 5.5.3.1, $G(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant \mathbf{0}$ 的所有(子)方程组均是相容的,故(6.4.1.18)式有 $\boldsymbol{z} \neq \mathbf{0}$ 的解存在,并有不为 0 的 $\boldsymbol{z}$ 使(6.4.1.18)式中的严格不等号成立. 由此即知,在此情形下,定有 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \neq \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$. 因为这时总有 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\mathbf{0}\}$.

若 $v > m$, 对下标作适当重排,总可以有

$$\boldsymbol{\omega}^j = \{\omega_1^j, \omega_2^j, \cdots, \omega_q^j, 0, 0, \cdots 0\}^{\mathrm{T}} \quad \omega_i^j > 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant q$$

且$\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$向量组 $i = 1, 2, \cdots, m$ 线性无关（$q < m$）. 那么,(6.4.1.18)式现在成为

$$\begin{cases} \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = 0 & i = 1, 2, \cdots, q \\ \nabla g_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant 0 & j = q+1, \cdots, m \\ \nabla g_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant 0 & k = m+1, \cdots, v \end{cases} \qquad \text{—(6.4.1.19)}$$

对于(6.4.1.19)式中的任一个下标 $\boldsymbol{k}$,有一组不全为 0 的数 w_{ki}，

$$\nabla g_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) = \sum_{i=1}^{m} w_{ki} \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$$

故 $G(\boldsymbol{x}^0)$矩阵可表成为,记 $\boldsymbol{W} = [w_{ki}]$

$$G(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} G_{m\times m}(\boldsymbol{x}^0) \\ W \cdot G_{m\times m}(\boldsymbol{x}^0) \end{bmatrix}$$ 其中 $G_{m\times m}(\boldsymbol{x}^0)$ 是 $G(\boldsymbol{x}^0)$ 的前 $m \times m$ 阶顺序主子矩阵.

由(6.4.1.8)式,并注意到现在(6.4.1.7)式中等号右边第 1 项恒为 0（$\because$ $\mathrm{rank}(G(\boldsymbol{x}^0)) = m$），即得,对于 $\boldsymbol{z} \in Z^1(\boldsymbol{x}^0)$，有

$$G(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} G_{m\times m}(\boldsymbol{x}^0)\Pi B^{-1} \\ W \cdot G_{m\times m}(\boldsymbol{x}^0)\Pi B^{-1} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{u} \in P^+(W)$$

$P^+(W)$是解约束方程组的解集(见§5.5.3 节). 由于 $\Pi B^{-1} = G_{m\times m}^{-1}$，上式又可表为

$$G(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} I_{m\times m} \\ W \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{u} \in P^+(W) \qquad \text{—(6.4.1.20)}$$

(6.4.1.20)式也是值域集合 $R(G(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0})$ 的一种形式. 由(6.4.1.19)式的要求,应当对(6.4.1.20)式中的 $\boldsymbol{u}$ 参向量的分量取以下值：

$$\begin{cases} u_i = 0 & i = 1, 2, \cdots, q \\ u_j \geqslant 0 & j = q+1, q+2, \cdots, m \end{cases} \qquad \text{—(6.4.1.21)}$$

这即是说在以下条件成立时,(6.4.1.19)式是相容的. 这个条件是,(6.4.1.21)式决定的 u_i、u_j 是 $\boldsymbol{u} \in P^+(W)$ 中可以取到的. 此时,(6.4.1.20)式中的 W 相关系数矩阵的第 $q+1, q+2, \cdots, m$ 列向量组成的子矩阵决定的以下不等式组

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=q+1}^{m} u_j \boldsymbol{w}^j \geqslant \boldsymbol{0} \\ \qquad u_j \geqslant 0 \quad j = q+1, q+2, \cdots, m \end{cases} \qquad \text{—(6.4.1.22)}$$

是相容的,其中 $\boldsymbol{w}^j$是 W 矩阵的第 j 列向量.

当将 $\boldsymbol{u} \in P^{+}(\boldsymbol{W})$ 表示成(6.4.1.10)式，从以上(6.4.1.20)～(6.4.1.22)式中所得的结果也就是(6.4.1.13)～(6.4.1.14)式的结果.

以上的分析显然均可以推广到 $\mathrm{rank}(G(\boldsymbol{x}^0)) = r < m$ 的场合. 形式上的区别仅在于如(6.4.1.20～22)式中的 m 应改换为 r，并且在 $r < m$ 时，(6.4.1.7)式中等号右边将有 Δt 零度解(项)存在. 这个零度解(项)的意义下文还会给出说明.

例 6.4.1.2 分析下例规划中的 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$、$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 与 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合

$$\min f(\boldsymbol{x}) = (x-1)^2 + x_2^2 + (x_3-2)^2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = 1-(x_1-1)^2 - x_2^2 - x_3^2 \geqslant 0 \\ g_2(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 \geqslant 0 \\ g_3(\boldsymbol{x}) = 2x_1 - 2x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}^0 = (1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$$

解：易知 $I(\boldsymbol{x}^0) = \{1,\ 2,\ 3\}$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \nabla g_1(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \nabla g_3(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

有

$$\nabla g_3(\boldsymbol{x}^0) = \frac{1}{2}\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0) + \nabla g_2(\boldsymbol{x}^0)$$

$$\boldsymbol{W} = \left[\frac{1}{2},\ 1\right]$$

可方便地取 Lagrange 乘子 $\boldsymbol{\omega} = (1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$. 因为

$$G(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} G_{2\times 3}(\boldsymbol{x}^0) \\ \left(\frac{1}{2},\ 1\right)\cdot G_{2\times 3}(\boldsymbol{x}^0) \end{bmatrix} \quad G_{2\times 3}(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

且 $\mathrm{rank}(G_{2\times 3}(\boldsymbol{x}^0)) = 2$ (行向量线性无关)，$\boldsymbol{W} \geqslant 0$，故

$$G(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0} \Leftrightarrow G_{2\times 3}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0}$$

而由 $G_{2\times 3}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0}$ 可得

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{\boldsymbol{z} \,\middle|\, \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} \quad t \in R,\ \boldsymbol{v} \in R_+^2 \right\}$$

这里

$$D_g = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \Pi B^{-1} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由[1]

$$G(\boldsymbol{x}^0)D_g = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = [g_{ik}]_{3\times 2}$$

因为 $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0) = \{1\}$，故由(6.4.1.17)式，$g_{11} > 0 \quad g_{12} = 0 \Rightarrow v_1 = 0 \quad v_2 \geqslant 0$ 即得

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{ \boldsymbol{z} \middle| \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v \quad t \in R \quad v \geqslant 0 \right\}$$

$$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{ \boldsymbol{z} \middle| \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t \quad t \in R \right\}$$

图 6.4.1.1 给出了本例中 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$、$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 及 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合的图形.

注意方向向量 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0$，故 $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, z_3)^{\mathrm{T}}$ 的坐标系原点是在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处.

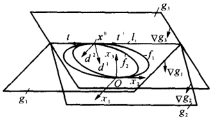


图 6.4.1.1

图中 $g_{1,2,3}$ 是 $\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = 0$ 决定的由 $g_i(\boldsymbol{x}) = 0$ 给出的曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切平面. $\nabla g_{1,2,3}$ 是切平面的法方向(箭头). $\boldsymbol{x}^0$ 点处的方向向量 d^1，d^2 是表示矩阵 D_g 的第 1、2 列向量作为方向向量的几何表示. $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 就是 g_1，g_2 平面按法方向所夹成的一个闭锥(棱柱体). 而 l_t 是 $g_{1,2,3}$ 平面的交线，即为 $\boldsymbol{z} = \Lambda t$，$t \in R$ 所表示的直线. l_t 也就是 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 的零度空间，也就是 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合. 而 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合显然就是方向向量 d^2 所在的 g_1(半)平面.

注意本例中的约束函数 $g_1(\boldsymbol{x}) = 0$ 是一个球心在(1, 0, 0)处的单位球面，而 $g_2(\boldsymbol{x}) = 0$ 是过原点且向上开口的抛物面. 在图 6.4.1.1 中，形似椭圆的空间曲线 f_1 是单位球面与 g_3 平面(即 $g_3(\boldsymbol{x}) = 0$ 平面)的交线，f_2 则是抛物面与 g_3

---

[1] 容易理解，以下 $G(\boldsymbol{x}^0)D_g$ 的数值结果中并不是按(6.4.1.20)式的形式中含有的单位矩阵 I_2，但这只要对 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 式中 v 前的矩阵各列向量作一个变换即可. 以下类似.

平面的交线. 而 l_t 直线就是 f_1，f_2 曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切线. 并可认识到，目标函数梯度 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$ 决定的 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的切平面现在刚好与 g_1 平面重合，且可行区域 X 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处与 g_1 平面相切的也就是上述单位球面.

例 6.4.1.3 将例 6.4.1.2 中的 $g_3(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 改换为下式

$$g_3(\boldsymbol{x}) = -(x_1+1)^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{7}{2} \geqslant 0$$

其余不变，求解 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$、$\hat{Z}{}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 与 $\overset{\wedge\wedge}{Z}{}^1(\boldsymbol{x}^0)$.

解： 此时

$$\nabla g_3(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0) - 2\nabla g_2(\boldsymbol{x}^0)$$

故
$$\boldsymbol{W} = \left[\frac{1}{2}, -2\right]$$

利用上例的结果，$\boldsymbol{\omega}$ 乘子可保持不变，有，

$$G(\boldsymbol{x}^0)\Pi B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

故由(6.4.1.20)式～(6.4.1.22)式的要求，取 $u_1 = 0$，$u_2 \geqslant 0$ 不能使

$$\boldsymbol{z} = \Lambda t + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \quad t \in R \quad \boldsymbol{u} \in P^+(\boldsymbol{W})$$

$$\begin{cases} \nabla g_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = 0 \\ \nabla g_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant 0 \\ \nabla g_3^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant 0 \end{cases}$$

方程组成立，即以上不等式组是矛盾的. 所以，此例中只有

$$\hat{Z}{}^1(\boldsymbol{x}^0) = \overset{\wedge\wedge}{Z}{}^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} = \Lambda t,\ t \in R\}$$

从本例中可解得

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{u} \in P^+(\boldsymbol{W}) \quad \boldsymbol{v} \in R_+^2$$

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{ \boldsymbol{z} \left| \boldsymbol{z} = \Lambda t + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} \quad t \in R \quad \boldsymbol{v} \in R_2^+ \right. \right\}$$

从而

$$D_g = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$G(\boldsymbol{x}^0) \cdot D_g = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

利用(6.4.1.16)式～(6.4.1.17)式，可知 $\hat{\boldsymbol{v}} \equiv \mathbf{0}$，由(6.4.1.10)式亦知以上结果.

本例中仍有 $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0) = \{1\} \subset I(\boldsymbol{x}^0) = \{1, 2, 3\}$，但$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$.

例 6.4.1.4 将例 6.4.1.2 中的 $g_3(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 改换为下式，使

$$g_3(\boldsymbol{x}^0) = 0 \quad \nabla g_3(\boldsymbol{x}^0) = -\frac{1}{2}\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0) + 2\nabla g_2(\boldsymbol{x}^0)$$

其余不变. 求解 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$，$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$与$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$.

这里

$$\nabla g_3(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

由于现在
$$W = \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$$

可解得对于 $\boldsymbol{u} \in P^+(W)$，

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} \in R_+^2$$

故(6.4.1.21)式是相容的(取 $v_1 = 0$，$v_2 \geqslant 0$ 即可). 另由

$$G(\boldsymbol{x}^0)\Pi B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

的结果，由(6.4.1.20)式，在 $u_1 = 0$, $u_2 \geqslant 0$ 时 $G(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0}$ 是相容的，故得

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{ \boldsymbol{z} \middle| \boldsymbol{z} = \Lambda t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v \quad t \in R \quad v \geqslant 0 \right\}$$

即与例 6.4.1.2 的 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 相同. $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 亦如此.

而 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 的结构如下

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{ \boldsymbol{z} \middle| \boldsymbol{z} = \Lambda t + \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} \quad t \in R \quad \boldsymbol{v} \in R_+^2 \right\}$$

同样地若直接利用

$$D_g = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad G(\boldsymbol{x}^0) \cdot D_g = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

再由(6.4.1.17)式等亦得到以上结果.

为便于比较，再给出一个 $\operatorname{rank}(G(\boldsymbol{x}^0)) = m$, $v > m$ 的例子. 以便从中理解 $\operatorname{rank}(G(\boldsymbol{x}^0)) = r < m$ 与 $\operatorname{rank}(G(\boldsymbol{x}^0)) = m$ 的区别.

例 6.4.1.5 在例 6.4.1.2 中添加约束条件

$$g_4(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}(x_2 + 1)^2 + x_3 - 1 \geqslant 0$$

其余不变.

现在
$$\nabla g_4(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

取 $\boldsymbol{\omega} = (1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. 易知 $\operatorname{rank}(G(\boldsymbol{x}^0)) = 3$.

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{ \boldsymbol{z} \middle| \boldsymbol{z} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} \in R_+^3 \right\}$$

即线性化锥现在是顶点在 x^0 点的闭凸锥.

$$\hat{Z}^1(x^0) = \{\mathbf{0}\}$$

再由 $z \in Z^1(x^0)$

$$G(x^0)\cdot z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v \quad v \in R_+^3$$

在
$$\begin{cases} \nabla g_1^{\mathrm{T}}(x^0)z = 0 \\ \nabla g_j^{\mathrm{T}}(x^0)z \geqslant 0 \quad j = 2, 3, 4 \end{cases}$$

要求下，是取 $v_1 = 0$，$v_j \geqslant 0 \quad j = 2, 3$ 故

$$\hat{\hat{Z}}^1(x^0) = \left\{ z \,\middle|\, z = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v \quad v \in R_+^2 \right\}$$

图 6.4.1.2 给出了本例中 $Z^1(x^0)$，$\hat{Z}^1(x^0)$，$\hat{\hat{Z}}^1(x^0)$集合的几何图形.

仍应注意 $Oz_1z_2z_3$ 坐标系的原点是 R^3 空间中的 x^0 点处. 图 6.4.1.2 中的 $l_{1,2,3}$ 是 $Z^1(x^0)$中的方向向量 z 的构造矩阵(v 向量前的矩阵)的列向量决定的射线. $g_{1,2,3,4}$ 是 $\nabla g_i^{\mathrm{T}}(x^0)z = 0$，$i = 1, 2, 3, 4$ 决定的平面(或平面上的闭锥). $Z^1(x^0)$是 g_1、g_2 和 g_4 构成的锥，$\hat{Z}^1(x^0)$就是 $Oz_1z_2z_3$ 坐标系的原点，$\hat{\hat{Z}}^1(x^0)$是 l_2 与 l_3 夹成的锥，即图(6.4.1.2)中阴影区域. 这个锥位于 g_1 平面上.

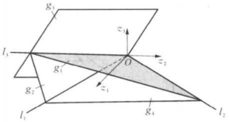


图 6.4.1.2

例 6.4.1.6 将例 6.4.1.3 中的规划的约束条件中添加列 6.4.1.5 中的 $g_4(x) \geqslant 0$，其余不变.

这时，

$$G(x^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\omega}$ 乘子同上例. $\mathrm{rank}(G(x^0)) = 3$，可得

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{ \boldsymbol{z} \middle| \boldsymbol{z} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & -3 & -4 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} \in R_+^3 \right\}$$

因为 $\text{rank}(G(\boldsymbol{x}^0)) = 3 \Rightarrow \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{0}\}$，但对 $\boldsymbol{z} \in Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 有

$$G(\boldsymbol{x}^0) \cdot \boldsymbol{z} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} \in R_+^3$$

仍由

$$\begin{cases} \nabla g_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = 0 \\ \nabla g_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant 0 \quad j = 2, 3, 4 \end{cases}$$

应取

$$v_1 = 0 \quad v_2 = 0 \quad v_3 \geqslant 0$$

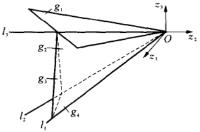


图 6.4.1.3

所以

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{ \boldsymbol{z} \middle| \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} v \quad v \geqslant 0 \right\}$$

本例各集合之几何图形见图 6.4.1.3. 各符号意义同上例. 现在 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 是 l_3 射线.

§ 6.4.2 $\hat{Z}^1(x^0)$ 集合的几何意义——二阶约束品性(Ⅰ)

以上的分析已说明了 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) \neq \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 的条件及示例，尚需说明 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$、$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合在非线性规划分析中的几何意义.

设 Jaobi 矩阵 $G(\boldsymbol{x}^0)$ 是 $v \times m$ 阶矩阵，$\text{rank}(G(\boldsymbol{x}^0)) = r$，$r < \min(v, m)$. 不妨设 $I(\boldsymbol{x}^0) = \{1, 2, \cdots, v\}$，并设 $G(\boldsymbol{x}^0)$ 的前 $r \times r$ 阶顺序主子矩阵 $G_{r\times r}(\boldsymbol{x}^0)$ 可逆，则由

$$g_j(\boldsymbol{x}) = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, r \qquad —(6.4.2.1)$$

可得到(P1)规划的约束条件

$$g_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, v$$

决定的可行区域 X 的边界上的交曲线[1]. 用 g 表示这样的交曲线.

隐函数定理: 设 $g_j(\boldsymbol{x})$是定义在 D 上的实值函数,在一开集 $D^1 \subset D \subset R^m$ 上连续可微,且对于 $j = 1, 2, \cdots, r$ 及 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 \in D^1$ 成立 $g_j(\boldsymbol{x}^0) = 0$. 记

$$\boldsymbol{x}(r) = (x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}} \in R^{m-r}$$

那么,在 $\boldsymbol{x}^0$ 的一个邻域 $N_{\delta^0}(\boldsymbol{x}^0) \subset R^m$ 及 $\boldsymbol{x}^0(r) = (x_{r+1}^0, x_{r+2}^0, \cdots, x_m^0)^{\mathrm{T}}$ 的一个邻域 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0(r)) \subset R^{m-r}$ 上,存在可微实值函数 $x_i(\boldsymbol{x}(r))$, $i = 1, \cdots, r$ 使下式成立

$$x_i^0 = x_i(\boldsymbol{x}^0(r)) \quad i = 1, \cdots, r \qquad \text{—(6.4.2.2)}$$

并对任一个 $\boldsymbol{x}(r) \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0(r))$, 有

$$g_j(x_1(\boldsymbol{x}(r)), x_2(\boldsymbol{x}(r)), \cdots, x_r(\boldsymbol{x}(r)), x_{r+1}, \cdots, x_m) = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, r \qquad \text{—(6.4.2.3)}$$

并且对一切 $\boldsymbol{x} \in N_{\delta^0}(\boldsymbol{x}^0)$, Jacobi 矩阵 $G_{r\times r}(\boldsymbol{x})$ 可逆. 同时, 对 $\boldsymbol{x}(r) \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0(r))$, $x_i(\boldsymbol{x}(r))$的一阶偏导数是下列方程组的解:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial g_j(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}(r)), \boldsymbol{x}(r))}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i(\boldsymbol{x}(r))}{\partial x_{r+k}} + \frac{\partial g_j(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}(r)), \boldsymbol{x}(r))}{\partial x_{r+k}} = 0 \qquad \text{—(6.4.2.4)}$$

$j = 1, 2, \cdots, r$, $k = 1, 2, \cdots, m-r$

其中 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}(r)) = (x_1(\boldsymbol{x}(r)), x_2(\boldsymbol{x}(r)), \cdots, x_r(\boldsymbol{x}(r)))^{\mathrm{T}}$ [2]. ■

由此将 $\boldsymbol{x}$ 的分量 x_{r+k}看成是参变量 $\tilde{x}_{r+k}$, $\tilde{\boldsymbol{x}}(r) = (\tilde{x}_{r+1}, \tilde{x}_{r+2}, \cdots, \tilde{x}_m)^{\mathrm{T}}$, 有

$$g: \begin{cases} x_i = x_i(\tilde{\boldsymbol{x}}(r)) & i = 1, 2, \cdots, r \\ x_{r+k} = \tilde{x}_{r+k} & k = 1, 2, \cdots, m-r \end{cases} \qquad \text{—(6.4.2.5)}$$

则 g 是 R^m 空间上的 $m-r$ 维曲线(面). 若取 $\Delta \tilde{\boldsymbol{x}}(r) = \tilde{\boldsymbol{x}}(r) - \boldsymbol{x}^0(r)$ $\quad \|\Delta \tilde{\boldsymbol{x}}(r)\| < \epsilon < \delta$ 可得 g 曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切向量$\nabla \boldsymbol{x}$(一阶近似),

$$\nabla \boldsymbol{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_m)^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{cases} \Delta x_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{m-r} \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_{r+k}} \cdot \Delta \tilde{x}_{r+k} & i = 1, 2, \cdots, r \\ \Delta x_{r+k} = \Delta \tilde{x}_{r+k} & k = 1, 2, \cdots, m-r \end{cases} \qquad \text{—(6.4.2.6)}$$

即在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处,

---

[1] 这样的交曲线可以有很多条,(6.4.2.1)式可以得到其中的(至少)一条.

[2] 参见《非线性规划》上册,M. Avriel,第 15 页,隐函数定理,仅符号有所不同.

$$\nabla \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_{r+1}} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_{r+2}} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_m} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_{r+1}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_{r+2}} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_r}{\partial \tilde{x}_{r+1}} & \dfrac{\partial x_r}{\partial \tilde{x}_{r+2}} & \cdots & \dfrac{\partial x_r}{\partial \tilde{x}_m} \\ & I_{(m-r)} & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \tilde{x}_{r+1} \\ \Delta \tilde{x}_{r+2} \\ \vdots \\ \Delta \tilde{x}_m \end{bmatrix} \qquad —(6.4.2.7)$$

其中 $I_{(m-r)}$ 是 $(m-r)\times(m-r)$ 阶单位矩阵.

注意 $\tilde{x}_{r+k}=x_{r+k}$，并由(6.4.2.4)式，

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_{r+1}} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_{r+2}} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_m} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_{r+1}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_{r+2}} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_r}{\partial \tilde{x}_{r+1}} & \dfrac{\partial x_r}{\partial \tilde{x}_{r+2}} & \cdots & \dfrac{\partial x_r}{\partial \tilde{x}_m} \end{bmatrix} = -G_{r\times r}^{-1}(\boldsymbol{x}^0)\cdot G\begin{Bmatrix} 1,2,\cdots,r \\ r+1,r+2,\cdots,m \end{Bmatrix}(\boldsymbol{x}^0)$$

$$—(6.4.2.8)$$

其中

$$G\begin{Bmatrix} 1,2,\cdots,r \\ r+1,r+2,\cdots,m \end{Bmatrix}(\boldsymbol{x}^0)$$

是 Jacobi 矩阵 $G(\boldsymbol{x}^0)$ 的第 $1,2,\cdots,r$ 行、第 $r+1,r+2,\cdots,m$ 列元素组成的子矩阵. 省略符号“$(\boldsymbol{x}^0)$”，将(6.4.2.8)式代入(6.4.2.7)式，得，

$$\nabla \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -G_{r\times r}^{-1}\cdot G\begin{Bmatrix} 1,2,\cdots,r \\ r+1,r+2,\cdots,m \end{Bmatrix} \\ I_{(m-r)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \tilde{x}_{r+1} \\ \Delta \tilde{x}_{r+2} \\ \vdots \\ \Delta \tilde{x}_m \end{bmatrix} \qquad —(6.4.2.9)$$

因为

$$G\begin{Bmatrix} 1,2,\cdots,r \\ 1,2,\cdots,m \end{Bmatrix}(\boldsymbol{x}^0)\cdot\nabla\boldsymbol{x} = \left[G_{r\times r},\ G\begin{Bmatrix} 1,2,\cdots,r \\ r+1,r+2,\cdots,m \end{Bmatrix}\right]\cdot\nabla\boldsymbol{x}$$

由(6.4.2.9)式，知

$$G\begin{Bmatrix}1, 2, \cdots, r \\ 1, 2, \cdots, m\end{Bmatrix}(\boldsymbol{x}^0) \cdot \nabla \boldsymbol{x} = [0]_{r\times(m-r)} \cdot \begin{bmatrix}\Delta \widetilde{x}_{r+1} \\ \Delta \widetilde{x}_{r+2} \\ \vdots \\ \Delta \widetilde{x}_m\end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

由 $\Delta \widetilde{x}_{r+k}$, $k = 1, 2, \cdots, m-r$ 具有的任意性及(6.4.2.9)式,可知由(6.4.2.5)式决定的曲线 g 的所有切向量(梯度)都位于

$$G_{r\times r}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \qquad —(6.4.2.10)$$

决定的 r 个超平面的交平面上.这里的 r 个超平面就是约束条件

$$g_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 处的切平面.

由于 $G_{r\times r}(\boldsymbol{x}^0)$ 是由 $G(\boldsymbol{x}^0)$ 中的极大线性无关(行)向量组组成的(子)矩阵,所以(6.4.2.10)式的解 $\boldsymbol{z}$ 也就是满足

$$G(\boldsymbol{x}^0) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$$

的解.另外,由于在方向向量的意义上,(6.4.2.10)式的解等价于(6.4.2.9)式所表示的 $\nabla \boldsymbol{x}$,这只要令满足(6.4.2.10)式的 $\boldsymbol{z}$ 及由(6.4.2.9)式决定的 $\nabla \boldsymbol{x}$ 满足

$$\|\boldsymbol{z}\| = 1 \text{ 及 } \|\nabla \boldsymbol{x}\| = 1 \text{ 且}(\Delta \widetilde{x}_{r+1}, \Delta \widetilde{x}_{r+2}, \cdots, \Delta \widetilde{x}_m)^{\mathrm{T}} \in N_{\delta'}(\boldsymbol{0}) \subset R^{m-r}$$

其中 $N_{\delta'}(\boldsymbol{0})$ 是指 $\tilde{\boldsymbol{x}} \in R^{m-r}$ 且 $\|\tilde{\boldsymbol{x}}\| < \delta'$, $\delta' > 0$,即可看出.所以,可知

$$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\nabla \boldsymbol{x} \mid \nabla \boldsymbol{x} \text{ 由(6.4.2.9)式给出}\}$$

这即是说,$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 的几何意义就是

$$g_i(\boldsymbol{x}^0) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

决定的交曲线 g 在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 点的切方向向量组成的集合.

而对于方程组,

$$g_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad i \in I(\boldsymbol{x}^0)$$

当 $v > r$ 时,任取下标子列

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \subset I(\boldsymbol{x}^0)$$

若由此决定的矩阵

$$\begin{bmatrix}\nabla g_{i_1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \\ \nabla g_{i_2}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \\ \vdots \\ \nabla g_{i_r}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\end{bmatrix} = G\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}(\boldsymbol{x}^0) \qquad —(6.4.2.11)$$

是满秩的，那么，由以上的分析，

$$g_{i_j}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, r$$

总能决定一条交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$，其函数（类似由(6.4.2.5)式决定）可记为 $g(\boldsymbol{x}; i_1, i_2, \cdots, i_r)$.

很显然，任一条这样的交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$ 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处均是相切的，故任一条交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$ 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的切向量集合都是 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$.

如果任取 $1 \leqslant d \leqslant r$，作下标子序列

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_d\} \subseteq I(\boldsymbol{x}^0)$$

则由方程组

$$g_{i_j}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, d \qquad —(6.4.2.12)$$

在向量组 $\nabla g_{i_j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$ 线性无关时，可决定一条交曲线[1] $g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$，其函数(由(6.4.2.5)式决定，其中的参数 r 替换为 d)可记为 $g(\boldsymbol{x}; i_1, i_2, \cdots, i_d)$.

利用以上分析，可以从交曲线 $g\{\cdot\}$ 切向量的几何意义出发去构造 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$、$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合.

由以上的分析，易知所有这样的交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$ 全部过 $\boldsymbol{x}^0$ 点，且 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切向量是

$$\nabla g_{i_j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, d \qquad —(6.4.2.13)$$

的解向量.

由此

$$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) \subseteq \{\boldsymbol{z} \mid \nabla g_{i_j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, d\} = Z^0\{i_1, i_2, \cdots, i_d\} \qquad —(6.4.2.14)$$

则对于任一符合一阶最优性条件的 Lagrange 乘子 $\boldsymbol{\omega}^j$（即 Φ_ω 矩阵的第 j 列向量），由其分量 $\omega_{i_k}^j > 0$, $k = 1, 2, \cdots, d \leqslant r$，可决定一条交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$ 及其在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切向量集合 $Z^0\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$. 并有

$$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) \subseteq Z^0\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$$

且当 $d < r$ 时总又有

$$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) \subset Z^0\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$$

---

[1] 应说明，这样的交曲线也就是 $m-d$ 维曲面.

当 $d = r$ 时

$$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = Z^0\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$$

当 $d = r = m$ 时，

$$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = Z^0\{i_1, i_2, \cdots, i_m\} = \{\boldsymbol{0}\}$$

仍由 $\boldsymbol{\omega}^j$ 的分量 $\omega^j_{j_t} = 0,\ t = 1, 2, \cdots, v-d$，决定的 $\{j_1, j_2, \cdots, j_{v-d}\}$ 作集合

$$Z\{j_1, j_2, \cdots, j_{v-d}\} = \{\boldsymbol{z} \mid \nabla g^{\mathrm{T}}_{j_t}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant 0 \quad t = 1, 2, \cdots, v-d\} \qquad —(6.4.2.15)$$

$Z\{j_1, j_2, \cdots, j_{v-d}\}$ 是 R^m 空间上顶点在原点的闭锥，亦或是一个闭锥以顶点在 R^m 空间上的某个过原点的 r' 维线性流形上平移的并集合即闭棱柱. 这里 r' 是 $\nabla g^{\mathrm{T}}_{j_t}(\boldsymbol{x}^0)$，$t = 1, 2, \cdots, v-d$ 向量组的秩，$r' \leqslant r$.

注意对于 $\boldsymbol{z} \in Z\{j_1, j_2, \cdots, j_{v-d}\}$，一定可取以下形式

$$\boldsymbol{z} = \Lambda\{j_1, j_2, \cdots, j_{v-d}\}\boldsymbol{t} + D_g\{j_1, j_2, \cdots, j_{v-d}\}\boldsymbol{v}$$
$$\boldsymbol{t} \in R_{m-r'} \quad \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad —(6.4.2.16)$$

其中

$$G\begin{Bmatrix} j_1, j_2, \cdots, j_{v-d} \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}(\boldsymbol{x}^0) \cdot \Lambda\{j_1, j_2, \cdots, j_{v-d}\} = [0]$$

$$G\begin{Bmatrix} j_1, j_2, \cdots, j_{v-d} \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}(\boldsymbol{x}^0) \cdot D_g\{j_1, j_2, \cdots, j_{v-d}\} \geqslant 0$$

$D_g\{\cdot\}$ 矩阵的意义类似于(6.4.1.7)式及其说明.

对于 $\boldsymbol{z} \in Z^0\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$，一定可取以下形式

$$\boldsymbol{z} = \Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}\boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-d} \qquad —(6.4.2.17)$$

且

$$G\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_d \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}(\boldsymbol{x}^0) \cdot \Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_d\} = [0]$$

以上[0]表示为 0 元素组成的矩阵.

由 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合定义，显然有

$$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) \subseteq Z^0\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$$

$$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) \subseteq Z\{j_1, j_2, \cdots, j_{v-d}\}$$

故 $$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) \subseteq Z^0\{i_1, i_2, \cdots, i_d\} \cap Z\{j_1, j_2, \cdots, j_{v-d}\}$$

因此，若 $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{z} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$，则必有 $\boldsymbol{t}^0 \neq \boldsymbol{0}$ $\boldsymbol{t}^0 \in R^{m-d}$ 使

$$\boldsymbol{z} = \Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}\boldsymbol{t}^0 \quad \boldsymbol{t}^0 \in R^{m-d}$$

同时有

$$\boldsymbol{z} = \Lambda\{j_1, j_2, \cdots, j_{v-d}\}\boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-r'}$$

故，对于 $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{z} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$，一定可由

$$\begin{aligned}&\Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}\boldsymbol{t}^0 = \Lambda\{j_1, j_2, \cdots, j_{v-d}\}\boldsymbol{t} \qquad \text{—(6.4.2.18)}\\ &\boldsymbol{t}^0 \in R^{m-d} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-r'} \quad \boldsymbol{t}^0, \boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

来决定.

若由(6.4.2.18)中取到这样的不为 **0** 的 $\boldsymbol{t}^0$, $\boldsymbol{t}$ 为 $\boldsymbol{t}_s^0$, $\boldsymbol{t}_s$，就可以记

$$\boldsymbol{z}^s = \Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}\boldsymbol{t}_s^0$$

或取

$$\boldsymbol{z}^s = \Lambda\{j_1, j_2, \cdots, j_{v-d}\}\boldsymbol{t}_s$$

以适当的取法即可得一组线性无关的 $\boldsymbol{z}^s$, $s = 1, 2, \cdots, m-r$，则[1]

$$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} = \Lambda^0\boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-r}\}$$

这里

$$\Lambda^0 = [\boldsymbol{z}^1, \boldsymbol{z}^2, \cdots, \boldsymbol{z}^{m-r}]$$

若在(6.4.2.18)式中取不到不为 **0** 的 $\boldsymbol{t}^0$, $\boldsymbol{t}$ 参向量，则 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{0}\}$.

由此，可以再构造出 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合，以便进一步地理解 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$、$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合的关系.

对于 $\boldsymbol{z} \neq 0$ $\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$，由 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 的定义，总可以有

$$\boldsymbol{z} = \Lambda\boldsymbol{t} + D\boldsymbol{v}' \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-r} \quad \boldsymbol{v}' \geqslant \boldsymbol{0} \qquad \text{—(6.4.2.19)}$$

这样所构造(6.4.2.19)式的 $\Lambda\boldsymbol{t}$ 项，由不等式方程组的解，应是

[1] 注意，$\Lambda\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$、$\Lambda\{j_1, j_2, \cdots, j_{v-d}\}$ 均为线性齐次方程组的基础解系矩阵，故在合适的构造下，这里所说的选取 $\boldsymbol{t}_s^0$, $\boldsymbol{t}_s$ 可简化为找出这两个矩阵相同的列向量. 这些相同的列向量就是 $\boldsymbol{z}^s$, $s = 1, 2, \cdots, m-r$. 见以下示例.

$$\begin{cases}\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}=0 & i\in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0)\\ \nabla g_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}\geqslant 0 & j\in I(\boldsymbol{x}^0)-\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)\end{cases}\quad —(6.4.2.20)$$

的零度解空间，所以，应当有(6.4.2.19)式中的 Λt 项可构造

$$\{\boldsymbol{z}\mid \boldsymbol{z}=\Lambda \boldsymbol{t},\ \boldsymbol{t}\in R^{m-r}\}=\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$$

其次，比较(6.4.2.16)式与(6.4.2.19)式，可知对于 $\boldsymbol{v}'\geqslant \boldsymbol{0}$，

$$D\boldsymbol{v}'\subset\{\boldsymbol{z}\mid \boldsymbol{z}=D_g\{j_1,j_2,\cdots,j_{v-d}\}\boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{v}\geqslant \boldsymbol{0}\}$$

所以，$D\boldsymbol{v}'$一项应当是

$$\begin{cases}G\begin{Bmatrix}i_1,i_2,\cdots,i_d\\1,2,\cdots,m\end{Bmatrix}(\boldsymbol{x}^0)\cdot D_g\{j_1,j_2,\cdots,j_{v-d}\} & \boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\\ & \boldsymbol{v}\geqslant \boldsymbol{0}\end{cases}\quad —(6.4.2.21)$$

方程的解．其中 $D_g\{\cdot\}$矩阵的意义见(6.4.2.16)式．

显然，仅当(6.4.2.21)式存在 $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ 的解时，才有 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)\neq\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$．若记 $\hat{Z}^1_+(\boldsymbol{x}^0)$是(6.4.2.21)式的解集合，那么，对于 $\boldsymbol{z}\in\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$，有

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)=\{\boldsymbol{z}\mid \boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}^1+\boldsymbol{z}^+\quad \boldsymbol{z}^1\in\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)\quad \boldsymbol{z}^+\in\hat{Z}^1_+(\boldsymbol{x}^0)\}\quad —(6.4.2.22)$$

易知 $\hat{Z}^1_+(\boldsymbol{x}^0)-\{\boldsymbol{0}\}\neq\varnothing$ 的充要条件是

(1) $\operatorname{rank}\left[G\begin{Bmatrix}i_1,i_2,\cdots,i_d\\1,2,\cdots,m\end{Bmatrix}(\boldsymbol{x}^0)\cdot D_g\{j_1,j_2,\cdots,j_{v-d}\}\right]<r_v$

其中的 r_v 是 $\boldsymbol{v}$ 的维数．

(2) 记 Λ_v 是以下方程组

$$G\begin{Bmatrix}i_1,i_2,\cdots,i_d\\1,2,\cdots,m\end{Bmatrix}(\boldsymbol{x}^0)\cdot D_g\{j_1,j_2,\cdots,j_{v-d}\}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$$

的基础解系矩阵，则应有 $\Lambda_v\cdot \boldsymbol{t}\geqslant\boldsymbol{0}$ 方程组有非平凡解．

显然$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$是 $g\{1,2,\cdots,r\}$曲线的切空间，$\hat{Z}^1_+(\boldsymbol{x}^0)$则是交曲线 $g\{i_1,i_2,\cdots,i_d\}$的切空间上的闭锥．任取$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$、$\hat{Z}^1_+(\boldsymbol{x}^0)$的方向向量并作其向量和就是$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合．注意 $g\{1,2,\cdots,r\}$、$g\{i_1,i_2,\cdots,i_d\}$曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处相切，$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$、$\hat{Z}^1_+(\boldsymbol{x}^0)$中的方向向量均以 $\boldsymbol{x}^0$ 为起始点．

例 6.4.2.1 对例 6.4.1.2 用以上的方法构造$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$、$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合．

由例 6.4.1.2 知 $I(\boldsymbol{x}^0) = \{1, 2, 3\}$　$\hat{I}(\boldsymbol{x}^0) = \{1\}$　取 $d = 1$

$$\{i_1\} = \{1\} \quad \{j_1, j_2\} = \{2, 3\}$$

$Z^0\{i_1\}$是

$$-2z_3 = 0$$

的解.

$$Z^0\{i_1\} = \left\{ \boldsymbol{z} \middle| \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{t} \in R^2 \right\}$$

故

$$\Lambda\{i_1\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$Z\{j_1, j_2\}$则是

$$\begin{cases} 2z_1 & -z_3 \geqslant 0 \\ 2z_1 & -2z_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

的解.

$$Z\{j_1, j_2\} = \left\{ \boldsymbol{z} \middle| \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v},\ t \in R,\ \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0} \right\}$$

故

$$\Lambda\{j_1, j_2\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad D_g\{j_1, j_2\} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

则 $\Lambda\{i_1\}$、$\Lambda\{j_1, j_2\}$中相同的列向量为$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,所以

$$\hat{Z}^1(x^0) = \left\{ \boldsymbol{z} \middle| \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t \quad t \in R \right\}$$

再由

$$G\begin{Bmatrix} i_1 \\ 1,\ 2,\ 3 \end{Bmatrix}\cdot D_g\{j_1,\ j_2\}\boldsymbol{v} = (0,\ 0,\ -2)\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0}$$

且 $\boldsymbol{v} = (v_1,\ v_2)^{\mathrm{T}}$ 得

$$-2v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \quad v_1,\ v_2 \geqslant 0$$

或写成为 $Z\{j_1,\ j_2\}$集中的 $\boldsymbol{v}$ 参向量可表示为

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad v \geqslant 0$$

显然，代入 $Z\{j_1,\ j_2\}$后，得

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v \quad t \in R,\ v \geqslant 0$$

故

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{ \boldsymbol{z} \,\middle|\, \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v,\ t \in R,\ v \geqslant 0 \right\}$$

此结果均同于例 6.4.1.2. 且这里有

$$\hat{Z}_+^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{ \boldsymbol{z} \,\middle|\, \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v \quad v \geqslant 0 \right\}$$

(6.4.2.22)式及例 6.4.2.1 说明了 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 与 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合的相互关系. 当 $\hat{Z}_+^1(\boldsymbol{x}^0) - \{\boldsymbol{0}\} = \varnothing$ 时，便有 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$. 本节前一部分已分析了 $\hat{Z}_+^1(\boldsymbol{x}^0) - \{\boldsymbol{0}\} = \varnothing$ 的条件.

由以上关于(6.4.2.5)～(6.4.2.9)式的分析，说明 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合中的任一非零向量 $\boldsymbol{z}$ 都可看成是 $\nabla \boldsymbol{x}$ 向量，即交曲线 $g\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_r\}$ 在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 点处的切向量. 现考虑二阶约束品性的意义.

任取 $\boldsymbol{z} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$，$\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$，故可知 $\boldsymbol{z}$ 的分量 z_{r+k}，$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-r$ 不能全为 0(见下文). 取

$$\lambda = \frac{\delta}{\| z(r) \|} > 0$$

其中：
$$z(r) = (z_{r+1}, z_{r+2}, \cdots, z_m)^{\mathrm{T}}$$

并记
$$x^0(r) = (x_{r+1}^0, x_{r+2}^0, \cdots, x_m^0)^{\mathrm{T}}$$

作
$$\tilde{x}(r, \theta) = x^0(r) + \lambda z(r) \cdot \theta \quad \varepsilon > \theta \geqslant 0 \qquad —(6.4.2.23)$$

则对充分小的 ε，总可有 $\tilde{x}(r, \theta) \in N_\delta(x^0(r)) \subset R^{m-r}$. 由隐函数定理论述中的(6.4.2.3)式

记
$$x(\tilde{x}(r, \theta)) = (x_1(\tilde{x}(r, \theta)), x_2(\tilde{x}(r, \theta)), \cdots, x_r(\tilde{x}(r, \theta)))^{\mathrm{T}}$$

$$g_j(x(\tilde{x}(r, \theta)), \tilde{x}(r, \theta)) = 0 \quad j \in \{1, 2, \cdots, r\} \qquad —(6.4.2.24)$$

将(6.4.2.23)式代入(6.4.2.5)式，有

$$\begin{cases} x_i(\theta) = x_i(\tilde{x}(r, \theta)) = x_i(x^0(r) + \lambda z(r) \cdot \theta) & i = 1, 2, \cdots, r \\ x_{r+k}(\theta) = x_{r+k}^0 + \lambda z_{r+k}\theta & k = 1, 2, \cdots, m-r \end{cases} \qquad —(6.4.2.25)$$

记(6.4.2.25)式得到的函数是 $x(\theta)$. $x(\theta)$就是交曲线 $g\{1, 2, \cdots, r\}$的函数. 由隐函数定理，$x(\theta)$关于 θ 是一阶可微的，且显然有 $x(0) = x^0$. 得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_i(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \sum\limits_{k=1}^{m-r} \dfrac{\partial x_i}{\partial x_{r+k}} \lambda z_{r+k} & i = 1, 2, \cdots, r \\ \dfrac{\mathrm{d}x_{r+k}(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \lambda z_{r+k} & k = 1, 2, \cdots, m-r \end{cases} \qquad —(6.4.2.26)$$

记 $\nabla g_i^{\mathrm{T}}(x^0)z = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, r$ 方程组的基础解系矩阵为

$$\Lambda(x^0) = \begin{bmatrix} -G_{r\times r}^{-1}(x^0) \cdot G\begin{Bmatrix} 1, 2, \cdots, r \\ r+1, r+2, \cdots, m \end{Bmatrix}(x^0) \\ I_{(m-r)} \end{bmatrix} \qquad —(6.4.2.27)$$

则由(6.4.2.8)式及(6.4.2.4)式，有

$$\frac{\mathrm{d}x(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \lambda\Lambda(x(\theta)) \cdot z(r) \qquad —(6.4.2.28)$$

而由 $\Lambda(x^0)$矩阵的意义，方向向量 z 的分量间应有以下关系

$$z = \Lambda(x^0) \cdot z(r) \qquad —(6.4.2.29)$$

所以可知当 $z \neq \mathbf{0}$ 时总要有 $z(r) \neq \mathbf{0}$. 这样，便知有

$$\frac{\mathrm{d}x(0)}{\mathrm{d}\theta} = \lambda z \quad \lambda > 0 \qquad —(6.4.2.30)$$

再考虑 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 的二阶可微性质. 注意到以上的一阶导数

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$$

实质是指的由(6.4.2.25)式规定的 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 的函数形式的导数,从而仅是方向向量 $\boldsymbol{z}$ 决定的方向导数. 由多元函数的性质可知,当多元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处可微,则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处沿任何方向上的方向导数均存在,但反之未必. $\boldsymbol{x}(\theta)$ 函数的一阶可微是由隐函数定理保证的,故以上(6.4.2.26)、(6.4.2.28)及(6.4.2.30)式均可以成立. 而 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 关于 θ 的二阶(方向)导数实际应是指以下极限,由(6.4.2.28)式

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Lambda(\boldsymbol{x}(\theta+\Delta\theta))-\Lambda(\boldsymbol{x}(\theta))}{\Delta\theta}\lambda\boldsymbol{z}(r) \qquad \text{—(6.4.2.31)}$$

注意到基础解系矩阵的构造,仅仅只利用了 Jacobi 矩阵 $G(\boldsymbol{x}^0)$ 中存在 $r\times r$ 阶可逆子矩阵 $G_{r\times r}(\boldsymbol{x}^0)$ 的条件,而这一条件总是成立的;其次,基础解系矩阵 $\Lambda(\boldsymbol{x})$ 因各 $g_j(\boldsymbol{x})$ 函数在 $\boldsymbol{x}^0$ 点二阶可微所以 $\Lambda(\boldsymbol{x})$ 是一阶可微的(偏)导函数 $\dfrac{\partial g_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$ 通过四则运算构造出来的代数(矩阵)函数,因此,这一代数(矩阵)函数也必定一阶可导. 故极限

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Lambda(\boldsymbol{x}(\theta+\Delta\theta))-\Lambda(\boldsymbol{x}(\theta))}{\Delta\theta}=\dot{\Lambda}(\boldsymbol{x}(\theta)) \qquad \text{—(6.4.2.32)}$$

存在,所以 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 关于 θ 二阶可导 $(0\leqslant\theta<\varepsilon)$.

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(\theta)=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}=\dot{\Lambda}(\boldsymbol{x}(\theta))\cdot\lambda\boldsymbol{z}(r) \qquad \text{—(6.4.2.33)}$$

注意,这里的 $\dot{\Lambda}(\boldsymbol{x}(\theta))$ 仍只具有方向导数的意义.

由于 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 关于 θ 二阶可导,故可以利用(6.4.2.26)式直接给出 $\ddot{\boldsymbol{x}}(\theta)$ 的表达形式.

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x_i(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}=\displaystyle\sum_{s=1}^{m-r}\sum_{k=1}^{m-r}\frac{\partial^2x_i}{\partial x_{r+s}\partial x_{r+k}}\lambda^2z_{r+s}z_{r+k} & i=1,2,\cdots,r\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}^2x_{r+k}(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}=0 & k=1,2,\cdots,m-r\end{cases} \qquad \text{—(6.4.2.34)}$$

这样即知(6.4.2.34)式中含有的偏导数在 $\boldsymbol{x}\in N_{\delta^0}(\boldsymbol{x}^0)$ 邻域

$$\frac{\partial^2x_i}{\partial x_{r+s}\partial x_{r+k}} \qquad \begin{matrix}i=1,2,\cdots,r\\ s,k=1,2,\cdots,m-r\end{matrix}$$

是存在的.这些二阶偏导数在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0$ 时的取值是二阶最优性条件的基础数据.为此可利用对(6.4.2.4)式求 $\dfrac{\partial}{\partial x_{r+s}}$ 偏导数来得到这些偏导数的表达形式.由此可得

$$\sum_{h=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial^2 g_j(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}(r)),\ \boldsymbol{x}(r))}{\partial x_h \partial x_i}\cdot\frac{\partial x_h(\boldsymbol{x}(r))}{\partial x_{r+s}}\cdot\frac{\partial x_i(\boldsymbol{x}(r))}{\partial x_{r+k}}+$$

$$+\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial^2 g_j(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}(r)),\ \boldsymbol{x}(r))}{\partial x_{r+s}\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i(\boldsymbol{x}(r))}{\partial x_{r+k}}+\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial g_j(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}(r)),\ \boldsymbol{x}(r))}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial^2 x_i(\boldsymbol{x}(r))}{\partial x_{r+s}\partial x_{r+k}}+$$

$$+\sum_{h=1}^{r}\frac{\partial^2 g_j(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}(r)),\ \boldsymbol{x}(r))}{\partial x_h\partial x_{r+k}}\cdot\frac{\partial x_h(\boldsymbol{x}(r))}{\partial x_{r+s}}+\frac{\partial^2 g_j(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}(r)),\ \boldsymbol{x}(r))}{\partial x_{r+s}\partial x_{r+k}}=0$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ r$$
$$k,\ s=1,\ 2,\ \cdots,\ m-r \qquad —(6.4.2.35)$$

为方便解出(6.4.2.35)式中含有的(6.4.2.34)式中的二阶偏导数,规定以下缩写符号,并规定(6.4.2.35)式中的各偏导数均在 $\boldsymbol{x}(r)=\boldsymbol{x}^0(r)$(或 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0$)处取值.

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 g_j}{\partial x_1\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 g_j}{\partial x_2\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 g_j}{\partial x_r\partial x_1}\\ \dfrac{\partial^2 g_j}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 g_j}{\partial x_2\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 g_j}{\partial x_r\partial x_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial^2 g_j}{\partial x_1\partial x_r} & \dfrac{\partial^2 g_j}{\partial x_2\partial x_r} & \cdots & \dfrac{\partial^2 g_j}{\partial x_r\partial x_r}\end{bmatrix}=\nabla^2 g^j_{r\times r}$$

即 $\nabla^2 g^j_{r\times r}$ 是约束函数 $g_j(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0$ 点处的 Hessian 矩阵的前 $r\times r$ 阶顺序主子矩阵.

$$\nabla \boldsymbol{x}^r_s=\left(\frac{\partial x_1(\boldsymbol{x}^0(r))}{\partial x_{r+s}},\ \frac{\partial x_2(\boldsymbol{x}^0(r))}{\partial x_{r+s}},\ \cdots,\ \frac{\partial x_r(\boldsymbol{x}^0(r))}{\partial x_{r+s}}\right)^{\mathrm{T}}$$

同样还有 $\nabla \boldsymbol{x}^r_k$ 符号.

$$\nabla^2 \boldsymbol{g}^{s,\,k}=\left(\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_{r+s}\partial x_{r+k}},\ \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_{r+s}\partial x_{r+k}},\ \cdots,\ \frac{\partial^2 g_r}{\partial x_{r+s}\partial x_{r+k}}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{x}^r_{s,\,k}=\left(\frac{\partial^2 x_1(\boldsymbol{x}^0(r))}{\partial x_{r+s}\partial x_{r+k}},\ \frac{\partial^2 x_2(\boldsymbol{x}^0(r))}{\partial x_{r+s}\partial x_{r+k}};\ \cdots,\ \frac{\partial^2 x_r(\boldsymbol{x}^0(r))}{\partial x_{r+s}\partial x_{r+k}}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\nabla \mathbf{g}_r^j = \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_1}, \frac{\partial g_j}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial g_j}{\partial x_r}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\nabla^2 \mathbf{g}_s^j = \left(\frac{\partial^2 g_j}{\partial x_{r+s}\partial x_1}, \frac{\partial^2 g_j}{\partial x_{r+s}\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial^2 g_j}{\partial x_{r+s}\partial x_r}\right)^{\mathrm{T}}$$

同样地有$\nabla^2 \mathbf{g}_k^j$符号.

利用以上缩写符号,(6.4.2.35)式可写成为

$$(\nabla \mathbf{x}_s^r)^{\mathrm{T}} \cdot \nabla^2 g_{r\times r}^j \cdot \nabla \mathbf{x}_k^r + (\nabla^2 \mathbf{g}_s^j)^{\mathrm{T}} \nabla \mathbf{x}_k^r + (\nabla^2 \mathbf{g}_k^j)^{\mathrm{T}} \nabla \mathbf{x}_s^r + (\nabla \mathbf{g}_r^j)^{\mathrm{T}} \nabla^2 \mathbf{x}_{s,k}^r + \frac{\partial^2 g_j}{\partial x_{r+s}\partial x_{r+k}} = 0$$

$$j = 1, 2, \cdots, r;\ k = 1, 2, \cdots, m-r;\ s = 1, 2, \cdots, m-r \qquad \text{—(6.4.2.36)}$$

以上方程组对于 $j = 1, 2, \cdots, r$ 可写成一组方程. 并继续引进以下缩写符号,

$$\begin{bmatrix} (\nabla^2 \mathbf{g}_s^1)^{\mathrm{T}} \\ (\nabla^2 \mathbf{g}_s^2)^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ (\nabla^2 \mathbf{g}_s^r)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \nabla^2 g_{s,r} \qquad \text{同样可以有} \nabla^2 g_{k,r}.$$

并注意到

$$\begin{bmatrix} (\nabla \mathbf{g}_r^1)^{\mathrm{T}} \\ (\nabla \mathbf{g}_r^2)^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ (\nabla \mathbf{g}_r^r)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = G_{r\times r}(\mathbf{x}^0)$$

则对于 $j = 1, 2, \cdots, r$ 所有(6.4.2.36)式组成的方程组中,可解出

$$\nabla^2 \mathbf{x}_{s,k}^r = -G_{r\times r}^{-1}(\mathbf{x}^0) \cdot \left\{ \nabla^2 \mathbf{g}^{s,k} + \nabla^2 g_{s,r} \nabla \mathbf{x}_k^r + \nabla^2 g_{k,r} \nabla \mathbf{x}_s^r + \begin{bmatrix} (\nabla \mathbf{x}_s^r)^{\mathrm{T}} \nabla^2 \mathbf{g}_{r\times r}^1 \nabla \mathbf{x}_k^r \\ (\nabla \mathbf{x}_s^r)^{\mathrm{T}} \nabla^2 \mathbf{g}_{r\times r}^2 \nabla \mathbf{x}_k^r \\ \cdots\cdots \\ (\nabla \mathbf{x}_s^r)^{\mathrm{T}} \nabla^2 \mathbf{g}_{r\times r}^r \nabla \mathbf{x}_k^r \end{bmatrix} \right\}$$

$$s, k = 1, 2, \cdots, m-r \qquad \text{—(6.4.2.37)}$$

(6.4.2.37)式中的$\nabla \mathbf{x}_k^r$、$\nabla \mathbf{x}_s^r$ 已可由(6.4.2.8)式给出,所以,(6.4.2.37)式所表示的是$\nabla^2 \mathbf{x}_{s,k}^r$即(6.4.2.34)式中包含的那些二阶偏导数仍只由

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i}、\frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

偏导数经四则运算所构造，其存在的条件仍然仅是 $G_{r\times r}(\boldsymbol{x}^0)$ 矩阵可逆. 这一点本已由隐函数定理所保证.

综合以上的分析，可知有以下结论：对于下标子序列 $\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}\subset I(\boldsymbol{x}^0)$，$r=\mathrm{rank}(G(\boldsymbol{x}^0))$，设向量组 $\nabla g_{i_j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\quad j=1, 2, \cdots, r$ 线性无关，则由隐函数定理所能决定的交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$ 可表示成 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 函数（见(6.4.2.25)式），且 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 在 $\theta\in[0, \varepsilon]$ 区间上二阶可导，并有

$$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}^0 \qquad \text{—(6.4.2.25)}$$

$$g_i(\boldsymbol{x}(\theta))=0\quad i\in\{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \qquad \text{—(6.4.2.24)}$$

及

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(0)}{\mathrm{d}\theta}=\lambda\boldsymbol{z}\quad \boldsymbol{z}\in\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)\quad \boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{0} \qquad \text{—(6.4.2.30)}$$

显然，如果 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$ 决定的 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 函数还使得在 $\theta\in[0, \varepsilon]$ 上有

$$g_j(\boldsymbol{x}(\theta))=0\quad j\in I(\boldsymbol{x}^0)-\{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \qquad \text{—(6.4.2.38)}$$

成立，那么，令二阶约束品性(A)中要求的函数 $\boldsymbol{\alpha}(\theta)=\boldsymbol{x}(\theta)$，即知此时便有 $\boldsymbol{x}^0$ 点处前述的二阶约束品性(A)成立.

注意到 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 函数是由 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$ 交曲线决定的，故与下标子列 $\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$ 的取法有关. 为此将 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 写成为 $\boldsymbol{x}(\theta;\, i_1, i_2, \cdots, i_r)$. 已知集合 $I(\boldsymbol{x}^0)$ 的元素个数为 v，则对于任取的一个方向向量 $\boldsymbol{z}\in\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$，$\boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{0}$，取出 $I(\boldsymbol{x}^0)$ 的下标子列 $\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$ 并能够构造出交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$ 及函数 $\boldsymbol{x}(\theta;\, i_1, i_2, \cdots, i_r)$ 的(子列的)个数不超过 N 个，且

$$1\leqslant N\leqslant\frac{v!}{r!(v-r)!}$$

因此除非有 $r=v$ 的情形，(6.4.2.24)式成立即等价于 $g_i(\boldsymbol{x}(\theta))=0$，$i\in I(\boldsymbol{x}^0)$ 条件成立；在 $r<v$ 时对于 M. Avriel 所提出的二阶约束品性(A)中的条件，如果 $\boldsymbol{\alpha}(\theta)$ 函数本意上是指的 $\boldsymbol{x}(\theta;\, i_1, i_2, \cdots, i_r)$ 函数中的某一个，那么，(6.4.2.38)式成立的要求就只能在 $g_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0$，$i\in I(\boldsymbol{x}^0)$ 约束函数在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域是相关的才可能满足[1]. 比如说对于 $\boldsymbol{x}(\theta)$，$\theta\in[0, \varepsilon]$，总有不全为 0 的实数(或实函数) a_{ij} 使 $j\in I(\boldsymbol{x}^0)-\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$ 有

$$g_j(\boldsymbol{x}(\theta))=\sum_i a_{ij}\cdot g_i(\boldsymbol{x}(\theta))\quad i\in\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$$

成立. 除此而外，不能设想一般地会有某个 $\boldsymbol{x}(\theta;\, i_1, i_2, \cdots, i_r)$ 函数使

[1] 注意对于 $g_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0$，$i\in I(\boldsymbol{x}^0)$ 约束函数族，其梯度向量组 $\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)$ 一般可以是相关的. 但[在 $g_i(\boldsymbol{x})$ 是非线性函数时]这不等于说函数族 $g_i(\boldsymbol{x}(\theta))$ 本身在 $\theta\in[0, \varepsilon]$ 的邻域内就是相关的.

(6.4.2.38)式成立. 因此这一形式的二阶约束品性(A)其适用范围应只是极个别的情形[1].

不妨举例以进一步地说明之.

例 6.4.2.2 利用例 6.4.1.2 的结果分析 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域的交曲线并构造 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 函数.

已知 $I(\boldsymbol{x}^0) = \{1, 2, 3\}$, $\mathrm{rank}(G(\boldsymbol{x}^0)) = 2$.

取下标子列{1, 2}. $\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0)$、$\nabla g_2(\boldsymbol{x}^0)$线性无关. 由

$$\begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = 0 \\ g_2(\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 = x_3 \end{cases}$$

由此可得参数方程表示的交曲线 $g\{1, 2\}$函数

$$\boldsymbol{x}(s) = \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(s^2 + s) \\ x_2 = \pm\left(s - \dfrac{1}{4}(s^4 + 2s^3 + s^2)\right)^{\frac{1}{2}} \quad (s \leqslant 1) \\ x_3 = s \end{cases}$$

在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 点处 $s = 1$. 在 $s \in [0, 1]$ 区间 $\boldsymbol{x}(s)$有定义. 故在 $\boldsymbol{x}^0$ 的邻域,只需考虑 $s \in [0, 1]$ 即可. 将 $\boldsymbol{x}(s)$代入 $g_3(\boldsymbol{x})$方程得到

$$g_3(\boldsymbol{x}(s)) = s(s-1) < 0 \quad 0 < s < 1$$

故可知 $\boldsymbol{x}(s)$曲线仅在 $s = 1$ 处有 $\boldsymbol{x}(1) \in X$, 当 $s \in (0, 1)$, $\boldsymbol{x}(s) \notin X$. 即 $g\{1, 2\}$曲线除 $\boldsymbol{x}^0$ 点外均在可行区域 X 之外.

取下标子列{1, 3}, $\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0)$、$\nabla g_3(\boldsymbol{x}^0)$线性无关. 由

$$\begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = 0 \\ g_3(\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$$

为方便构造 $\boldsymbol{x}(\theta)$函数,将 x_2 看成是参数,可得以 x_2 为参数的交曲线 $g\{1, 3\}$的函数 $g(\boldsymbol{x};\ 1, 3)$可写成

$$g(\boldsymbol{x};\ 1, 3) = \begin{cases} x_1 = x_3 = \dfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 2x_2^2}) \qquad x_2 \in \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

考虑在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域,则应取 $g(\boldsymbol{x};\ 1, 3)$的形式为

[1] Kuhn - Tucker 原来所提出的一阶约束品性,是要求对于任一 $z \in Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 与 X 中的一条可微弧相切. 这显然也不具有几何上的合理性. 见下文.

$$\begin{cases} x_1 = x_3 = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{1-2x_2^2}) \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

已知 $z \in \hat{Z}^1(x^0)$ 有

$$z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t \quad t \in R$$

的形式. 构造

$$x_2 = x_2^0 + \lambda z_2 \theta \qquad \lambda = \frac{\delta}{\| z \|} \quad (\text{不妨取 } \lambda = 1)$$

则
$$x_2 = t \cdot \theta$$

得

$$x(\theta) = x(\theta;\ 1,\ 3) = \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{1-2t^2\theta^2}) \\ x_2 = t\theta \\ x_3 = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{1-2t^2\theta^2}) \end{cases} \qquad \left(t^2\theta^2 \leqslant \frac{1}{2},\ \theta \geqslant 0\right)$$

有 $x(0) = x^0$，且将 $x(\theta)$ 代入 $g_2(x)$ 得

$$g_2(x(\theta)) = \frac{1}{2}t^2\theta^2 \geqslant 0 \qquad \text{并显然有 } g_{1,3}(x(\theta)) = 0,$$

故 $x(\theta;\ 1,\ 3)$ 在 x^0 邻域有 $x(\theta;\ 1,\ 3) \subset X$. 且显然 $x(\theta)$ 关于 θ 二阶可导，并且

$$\frac{\mathrm{d}x(0)}{\mathrm{d}\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda z$$

取下标子列 $\{2,\ 3\}$，$\nabla g_2(x^0)$、$\nabla g_3(x^0)$ 线性无关，类似作法可得 $g\{2,\ 3\}$ 以 x_2 为参数的方程是

$$g(x;\ 2,\ 3) = \begin{cases} x_1 = x_3 = \dfrac{1}{2}(1+(1-4x_2^2)^{\frac{1}{2}}) \quad x_2 \in \left[-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right] \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

由此构造出的 $x(\theta)$ 函数形如

$$x(\theta) = x(\theta;\ 2,\ 3) = \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(1 + (1 - 4t^2\theta^2)^{\frac{1}{2}}) \\ x_2 = t\theta \\ x_3 = \dfrac{1}{2}(1 + (1 - 4t^2\theta^2)^{\frac{1}{2}}) \end{cases} \quad \left(t^2\theta^2 \leqslant \frac{1}{4},\ \theta \geqslant 0\right)$$

同样有 $x(0) = x^0$，且

$$g_1(x(\theta)) = t^2\theta^2 \geqslant 0 \quad g_{2,3}(x(\theta)) = 0$$

故 $x(\theta) \subset X$，且 $x(\theta)$关于 θ 二阶可导并有

$$\frac{\mathrm{d}x(0)}{\mathrm{d}\theta} = \lambda z \quad (\lambda = 1)$$

成立.

这里的交曲线 $g\{1,\ 3\}$与 $g\{2,\ 3\}$的图形就是图 6.4.1.1 上的 f_1、f_2 曲线.

在本例中，$g\{1,\ 2\}$、$g\{1,\ 3\}$与 $g\{2,\ 3\}$就是约束函数在

$$g_i(x) = 0$$

时在 x^0 点邻域能形成的全部交曲线. 因此，二阶约束品性(A)中的那个 $\alpha(\theta)$ 函数如果是指这样的交曲线，那么 $\alpha(\theta)$只能取为 $x(\theta;\ 1,\ 3)$或 $x(\theta;\ 2,\ 3)$中的一个；但若 $\alpha(\theta)$不是指这样的交曲线，那么它又是什么呢？[1]

例 6.4.2.3 本例中$\nabla g_i(x^0)$之间存在线性相关.

$$\min \quad f(x) = -\left[x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2 - (x_2 + 1)^2 - (x_3 + 1)^2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} g_1(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \geqslant 0 \\ g_2(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \geqslant 0 \\ g_3(x) = 4 - \sqrt{2}x_1 - x_2 - x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

$x^0 = (\sqrt{2},\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$. $\omega = \left(\dfrac{7}{4},\ \dfrac{1}{4},\ 0\right)^{\mathrm{T}}$ 是符合一阶最优性条件的 Lagrange 乘子向量. x^0 是局部极小值点.

$$\nabla g_1(x^0) = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2(x^0) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \nabla g_3(x^0) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

---

[1] 附带指出，由上可见 $x(\theta)$ 函数不仅与下标$\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_r\}$有关，也与 $z \in \hat{Z}^1(x^0)$，$z \neq 0$ 的方向向量有关，但为简化符号，一般不将 $x(\theta)$ 写成为 $x(\theta,\ z)$.

$$\operatorname{rank}(G(\boldsymbol{x}^0)) = 2,\ I(\boldsymbol{x}^0) = \{1,\ 2,\ 3\} \quad \hat{I}(\boldsymbol{x}^0) = \{1,\ 2\}$$

可得

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{ \boldsymbol{z} \middle| \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{v} \quad t \in R,\ \boldsymbol{v} \in R_2^+ \right\}$$

$$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{ \boldsymbol{z} \middle| \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t \quad t \in R \right\}$$

以下构造 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 函数.

取下标子列$\{1,\ 2\}$. $\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0)$、$\nabla g_2(\boldsymbol{x}^0)$线性无关. 由

$$\begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = 0 \\ g_2(\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 \\ x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 \end{cases}$$

可得交曲线 $g\{1,\ 2\}$的函数是

$$g(\boldsymbol{x};\ 1,\ 2) = \begin{cases} x_2^2 + x_3^2 = 2 \\ x_1 = \sqrt{2} \end{cases}$$

写成以 x_3(或 x_2)为参数的方程就有

$$g(\boldsymbol{x};\ 1,\ 2) = \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = \pm\sqrt{2 - x_3^2} \quad x_3 \in [-\sqrt{2},\ \sqrt{2}] \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域应取

$$g(\boldsymbol{x};\ 1,\ 2) = \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2 - x_3^2} \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

任取 $\boldsymbol{z} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) \quad \boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$ 作

$$x_3 = x_3^0 + \lambda z_3 \theta \quad (\text{不妨取 } \lambda = 1)$$

得

$$x_3 = 1 + t\theta$$

$\boldsymbol{x}(\theta) = \boldsymbol{x}(\theta;\ 1,\ 2)$

$$= \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2-(1+t\theta)^2} \\ x_3 = 1+t\theta \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} t \in R \quad t\theta \in [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}] \\ \theta \geqslant 0 \end{matrix} \right)$$

将 $\boldsymbol{x}(\theta)$代入 $g_3(\boldsymbol{x})$得

$$g_3(\boldsymbol{x}(\theta)) = (2-(1+t\theta)) - (2-(1+t\theta)^2)^{\frac{1}{2}}$$

因为

$$(2-(1+t\theta))^2 - (2-(1+t\theta)^2) = 2t^2\theta^2 \geqslant 0$$

故
$$g_3(\boldsymbol{x}(\theta)) \geqslant 0$$

所以，$g\{1, 2\} \subset X$，且 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^0 \quad \boldsymbol{x}(\theta)$ 二阶可微，并有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(0)}{\mathrm{d}\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t = \lambda \boldsymbol{z}$$

取下标序列{1, 3}. $\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0)$、$\nabla g_2(\boldsymbol{x}^0)$线性相关，故 $g_3(\boldsymbol{x}) = 0$ 与 $g_1(\boldsymbol{x}) = 0$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处相切，形不成交曲线.

取下标序列{2, 3}，$\nabla g_2(\boldsymbol{x}^0)$、$\nabla g_3(\boldsymbol{x}^0)$线性无关. 由

$$\begin{cases} g_2(\boldsymbol{x}) = 0 \\ g_3(\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 \\ \sqrt{2}x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

从中可得到

$$2x_1^2 = (4 - x_2 - x_3)^2$$

从而有

$$x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + 8x_2 + 8x_3 - 16 = 0$$

这是一个抛物线方程. 将此方程写成

$$(x_2 - x_3)^2 + 8(x_2 + x_3) - 16 = 0$$

再作变换

$$w = x_2 - x_3 \quad s = x_2 + x_3$$

得
$$x_2 = \frac{1}{2}(w+s) \quad x_3 = \frac{1}{2}(-w+s)$$

及
$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(4-s)$$

故知在 $\boldsymbol{x}^0$ 处有 $x_1=\sqrt{2}\Rightarrow s=2$. 同时亦有

$$w^2+8s-16=0\Rightarrow w=\pm 2\sqrt{2}(2-s)^{\frac{1}{2}}\quad s\leqslant 2$$

由此可得以 s 为参数的 $g\{2,3\}$ 的方程是

$$\boldsymbol{x}(s)=\begin{cases}x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(4-s)\\ x_2=\pm\sqrt{2}(2-s)^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}s\quad s\leqslant 2\\ x_3=\mp\sqrt{2}(2-s)^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}s\end{cases}$$

代入 $g_1(\boldsymbol{x})\geqslant 0$ 的条件,经化简后得

$$g_1(\boldsymbol{x}(s))=-(s-4)^2+4\geqslant 0\Rightarrow s\in[2,6]$$

故知 $g_1(\boldsymbol{x}(s))\geqslant 0$ 的 $s\in[2,6]$ 与 $\boldsymbol{x}(s)$ 方程定义域 $s\leqslant 2$ 仅在 $s=2$ 相交. 故 $\boldsymbol{x}(s)$ 曲线仅在 $s=2$ 即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0$ 处与 X 可行区域相切,在 $s>2$ 时,$\boldsymbol{x}(s)$ 曲线均在 X 可行区域之外.

本例可行区域 X 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的几何图形如图 6.4.2.1 所示.

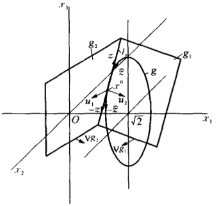


图 6.4.2.1

图 6.4.2.1 中的曲线 g 即为 $g\{1,2\}$ 交曲线. $g_{1,2}$ 是 $\nabla g_{1,2}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}=0$ 决定的平面. l_0 是 $g_{1,2}$ 平面的交线,也就是 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$、$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合中的方向向量所构造的射线. 如图中从 $\boldsymbol{x}^0$ 点出发的在 l_0 直线上的方向向量 $\boldsymbol{z}$、$-\boldsymbol{z}$ 均是 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)(\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0))$ 集合中的向量. 显然 $\boldsymbol{z}$、$-\boldsymbol{z}$ 方向向量同时也就是 $g\{1,2\}$ 曲线上的 $\widehat{\boldsymbol{z}}$、$-\widehat{\boldsymbol{z}}$ 弧的切向量. $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 线性化锥是 g_1、g_2 平面按法方向所夹成的棱柱体. $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$ 方向向量是 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合构造中 $\boldsymbol{v}$ 参向量前的矩阵的列向量所决定的. g_1、g_2 平面也可以看成 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$ 沿 l_0 直线平移(及延伸)所构造出来的.

附带说明,对于本例中的交曲线 $g\{2,3\}$ 也可以构造出 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 形式的交曲线函数,如取 $x_3=1+t\theta$,有

$$\boldsymbol{x}(\theta)=\begin{cases}x_1=\sqrt{2}(3-t\theta-2(1-t\theta)^{\frac{1}{2}})\\ x_2=-3+t\theta+4(1-t\theta)^{\frac{1}{2}}\qquad(t\theta\leqslant 1,\ \theta\geqslant 0)\\ x_3=1+t\theta\end{cases}$$

这里的 t 是指 $\boldsymbol{z} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ $\quad \boldsymbol{z} = (0, -1, 1)^{\mathrm{T}} \cdot t \quad t \in R$ 的参数 t. 也可以验证 $g_1(\boldsymbol{x}(\theta))$在 $\theta = 0$ 的邻域内是小于 0 的. 但验证起来更为麻烦.

在上例中,已经提及这样一点,在考虑$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合中的方向向量 $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$ 与可行区域 X 的可微弧的关系时,应当将二阶约束品性(A)中的 $\boldsymbol{\alpha}(\theta)$ 函数理解为某个 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$交曲线所构造出来的函数 $\boldsymbol{x}(\theta)$,否则 $\boldsymbol{\alpha}(\theta)$ 函数的意义就是模糊不清的. 而如果将 $\boldsymbol{\alpha}(\theta)$ 理解为是上述的 $\boldsymbol{x}(\theta; i_1, i_2, \cdots, i_r)$ 函数,那么,更具普遍性的应当是将(6.4.2.38)式放松成不等式关系,即为

$$g_j(\boldsymbol{x}(\theta); i_1, i_2, \cdots, i_r) \geqslant 0 \quad j \in I(\boldsymbol{x}^0) - \{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \qquad \text{—(6.4.2.39)}$$

注意,Kuhn - Tucker 原先所提出的约束品性是以下诸条件[1]:

在点 $\boldsymbol{x}^0 \in X$ 要求任何向量 $\boldsymbol{z} \in Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 与 X 中的一可微弧相切,即对每个 $\boldsymbol{z} \in Z^1(\boldsymbol{x}^0)$,存在函数 $\boldsymbol{\alpha}$,它的定义域是 $[0, \varepsilon] \subset R$ 且值域在 R^m 中,并有 $\boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{x}^0$,对 $0 \leqslant \theta \leqslant \varepsilon$, $\boldsymbol{\alpha}(\theta) \subset X$, $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\theta = 0$ 点处可微,以及对某个正数 λ,有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}(0)}{\mathrm{d}\theta} = \lambda \boldsymbol{z}$$

可知在这个约束品性中,要求检查的对象是线性化锥 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$中的可行方向向量 $\boldsymbol{z}$ 而非二阶约束品性(A)中的$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$中的 $\boldsymbol{z}$ 向量,其次,这个约束品性中并没有包含对于 $\boldsymbol{\alpha}(\theta)$的二阶可微的要求.

由于线性化锥$Z^1(\boldsymbol{x}^0)$中的方向向量包含有指向可行区域内点的方向向量(即 $g_i(\boldsymbol{x}) > 0$, $i = 1, 2, \cdots, k$, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{z} \in Z^1(\boldsymbol{x}^0)$),故这里所称的 $\boldsymbol{\alpha}(\theta)$ 函数是具有形式上的随意性的. 显然在后来的理论发展中,这种由可行区域内点决定的方向向量全体(并取闭包)在 $\boldsymbol{x}^0$ 作为局部极小值点判别条件中的作用,被分离出来并用所谓一阶约束品性来表示. 这样,在原先 Kuhn - Tucker 所提出的约束品性中,只要将可行区域 X 的边界上的点 $\boldsymbol{x}$ 在趋近于 $\boldsymbol{x}^0$ 时所能决定的切方向向量全体在局部极小值点判别条件中所起的作用另行表示成(另)一个约束品性,就涵盖了 $\boldsymbol{x}^0$ 点作为局部极小值点判别条件所需考虑的全部方向上的几何性状. 这样的划分就是导致提出二阶约束品性的内在理由.

所以,M. Avriel 在二阶约束品性(A)条件中,用$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合取代了 $K - T$ 约束品性中的 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$集合是正确的. 因为$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合中的方向向量 $\boldsymbol{z}$ ($\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$) 均是可行区域 X 的交曲线(即边界曲线)在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的切方向向量. 其次,M. Avriel 增加了 $\boldsymbol{\alpha}(\theta)$函数二阶可微的条件,这也是正确的. 本书仅在此基础上,放松了二

[1] 见《非线性规划》上册,M. Avriel,第 42 页.

阶约束品性(A)中原有的(6.4.2.38)式的限制,并提出以下形式的**二阶约束品性(Ⅰ)**:

在点 $\boldsymbol{x}^0 \in X$ 处,对于每个 $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{z} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 方向向量与包含于 X 的边界中的一条二阶可微弧相切,即对每个非 0 的 $\boldsymbol{z} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$,存在一个定义在 $[0, \varepsilon] \subset R$ 上,值域在 R^m 中的二阶可微函数 $\boldsymbol{\alpha}(\theta)$,使 $\boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{x}^0$,且对于 $0 \leqslant \theta \leqslant \varepsilon$,有下标子列 $\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$,使

$$g_i(\boldsymbol{\alpha}(\theta)) = 0 \quad i \in \{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \subset I(\boldsymbol{x}^0)$$

$$g_j(\boldsymbol{\alpha}(\theta)) \geqslant 0,\ j \in I(\boldsymbol{x}^0) - \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$$

其中 $r = \mathrm{rank}(G(\boldsymbol{x}^0))$,以及某个正数 λ,使

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}(0)}{\mathrm{d}\theta} = \lambda \boldsymbol{z}$$ ■

在这个二阶约束品性(Ⅰ)中,由以上的分析可见,存在某个下标子列 $\{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \subset I(\boldsymbol{x}^0)$,且由此构造的 $\boldsymbol{x}(\theta;\ i_1, i_2, \cdots, i_r) \subset X$,那么,这个 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 就是这里所说的 $\boldsymbol{\alpha}(\theta)$.

由二阶约束品性(Ⅰ)的定义可知,若 $\boldsymbol{x}^0 \in X$ 处二阶约束品性(Ⅰ)成立,就意味着在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处至少存在一条这样的交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$,对于任一 $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{z} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 方向向量,都可由 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$ 的函数 $g(\boldsymbol{x};\ i_1, i_2, \cdots, i_r)$ 构造出 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 函数,并对充分小的 ε, $\theta \in [0, \varepsilon]$,有

$$g(\boldsymbol{x}(\theta);\ i_1, i_2, \cdots, i_r) \subset X$$

成立. 显然 $g(\boldsymbol{x}(\theta);\ i_1, i_2, \cdots, i_r)$ 上的点都是 X 的边界点,故交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$ 一定也就是 X 在 $\boldsymbol{x}^0$ 邻域的边界曲线之一.

提示以下一点也有必要性,若对于一般地情形,即有一组非线性方程组 $g_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, k$ 且 $\boldsymbol{x} \in R^m$, k 可以大于、等于或小于 m,要对这一组函数 $g_i(\boldsymbol{x})$ 确定存在什么形式的交曲线,当应先判定此方程组解的存在性. 这将涉及到许多复杂问题,也并不存在能够解决所有疑难问题的已有的解的存在性定理. 但在非线性规划问题里,由于已设定了在局部极小值点 $\boldsymbol{x}^0$ 处有 $g_i(\boldsymbol{x}^0) = 0$, $i \in I(\boldsymbol{x}^0)$,故方程组 $g_i(\boldsymbol{x}) = 0$, $i \in I(\boldsymbol{x}^0)$ 在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 点有解是已设定的条件. 所以不用再考虑解的存在性问题.

在本章第 2 节开始部分,已提出了非线性规划局部极小值点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的判别条件,从集合的意义上可分为(b.1): $\boldsymbol{x}^0$ 是 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0)$ 邻域中可行区域内点集合上的极小值点;以及(b.2): $\boldsymbol{x}^0$ 是 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0)$ 邻域中可行区域边界点集合上的极小值点,这样 2 个判别条件,在下一节中将会看到,这 2 个判别条件在转化成代数形式的判别式时,对于可行区域 X 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域的性状的伴随要求,就是一阶约束品性

与二阶约束品性条件.

§6.4.3 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合的几何意义——二阶约束品性(Ⅱ)

以上分析是关于$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合的,以下考虑集合$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$中的方向向量$\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$ 的几何意义. 这里首先假设 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \neq \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$,否则,不用考虑$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合.

由$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合的构造(6.4.2.22)式, $\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$,有

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^1 + \boldsymbol{z}^+ \quad \boldsymbol{z}^1 \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0),\ \boldsymbol{z}^+ \in \hat{Z}^1_+(\boldsymbol{x}^0)$$

设决定$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$的 Lagrange 乘子 $\boldsymbol{\omega}^j$ 中正数分量 $\omega^j_i > 0$ 的下标可组成子列 $\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$, $1 \leqslant d < r$. 由(6.4.2.14)式,

$$\boldsymbol{z}^1 \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) \subset Z^0\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$$

再由(6.4.2.21)式及$\hat{Z}^1_+(\boldsymbol{x}^0)$集合的定义(即(6.4.2.21)式的解集合),知

$$\boldsymbol{z}^+ \in \hat{Z}^1_+(\boldsymbol{x}^0) \subset Z^0\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$$

所以

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \subset Z^0\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$$

再由(6.4.2.14)式的定义,以及可知对任一 $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{z} \in Z^0\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$ 都是

$$\nabla g^{\mathrm{T}}_{i_j}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, d$$

方程组的解. 由 Lagrange 乘子 $\boldsymbol{\omega}^j$ 的构造, $\nabla g^{\mathrm{T}}_{i_j}(\boldsymbol{x}^0)$向量组必是线性无关的. 所以,由隐函数定理决定的交曲线

$$g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$$

存在. $Z^0\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$是交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切方向向量全体的集合,而$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$也就是交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$的切方向向量集合的一个子集合. 这个子集合(即$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$)就是 $Z^0\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$中的那些同时满足

$$\nabla g^{\mathrm{T}}_{i_t}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} \geqslant 0 \quad t = 1, 2, \cdots, v-d,\ \boldsymbol{z} \in Z^0\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$$

且 $j_t \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$ 的方向向量 $\boldsymbol{z}$ 全体. 由于上式的解空间是闭锥,故, $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合是交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$ 的 $m-d$ 维切空间上的闭锥. $\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$, $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$ 方向向量是 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$的切向量,同时,这样的 $\boldsymbol{z}$ 又是 X 中的可行方向向量.

交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$ 的构造方法类似于以上所说的交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$(或 $g\{1, 2, \cdots, r\}$). 故在适当地重排下标后,交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$总可表示为交曲线 $g\{1, 2, \cdots, d\}$. 所以,由隐函数定理开始的关于交曲线 $g\{1, 2, \cdots, r\}$的各式,将 r 参数用 d 替换,全部都适用于交曲线 $g\{1, 2, \cdots, d\}$.

因此,可以针对$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合给出二阶约束品性(Ⅱ):

当 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \neq \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$, 在点 $\boldsymbol{x}^0 \in X$ 处,对于每个 $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 方向向量与 X 的边界中的一条二阶可微弧相切,即对每个非 0 的 $\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$, 存在一个定义在$[0, \epsilon] \subset R$ 上,值域在 R^m 中的二阶可微函数 $\boldsymbol{\alpha}(\theta)$,使 $\boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{x}^0$,且对于$0 \leqslant \theta \leqslant \epsilon$, 对下标子序列$\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$,有

$$\begin{cases} g_i(\boldsymbol{\alpha}(\theta)) = 0 & i \in \{i_1, i_2, \cdots, i_d\} \\ g_j(\boldsymbol{\alpha}(\theta)) \geqslant 0 & j \in I(\boldsymbol{x}^0) - \{i_1, i_2, \cdots, i_d\} \end{cases} \qquad \text{—(6.4.3.1)}$$

其中 $\{i_1, i_2, \cdots, i_d\} = \hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$ 由某个基乘子向量 $\boldsymbol{\omega}^j$决定,并且,存在某个正数 λ,使

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}(0)}{\mathrm{d}\theta} = \lambda \boldsymbol{z}$$ ■

注意交曲线 $g\{j_1, j_2, \cdots, j_r\}$ 的切空间是 $m-r$ 维线性流形,而 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$ 的切空间则是 $m-d$ 维线性流形($d \leqslant r$). 因此,当 $d < r$ 时,若 $\{i_1, i_2, \cdots, i_d\} \subset \{j_1, j_2, \cdots, j_r\}$, 则总有

$$g\{j_1, j_2, \cdots, j_r\} \subset g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\} \qquad \text{—(6.4.3.2)}$$

这里的意思即是交曲线 $g\{j_1, j_2, \cdots, j_r\}$在几何上是与交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$ 重合的空间曲线. 如果说将 $g\{\cdot\}$ 看成是交曲线上的点的集合,那么,$g\{j_1, j_2, \cdots, j_r\}$在$\{i_1, i_2, \cdots, i_d\} \subset \{j_1, j_2, \cdots, j_r\}$时就是 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$的子集合.

推论 6.4.3.1 设 $\boldsymbol{x}^0 \in X$ 是(P1)规划的局部极小值点,Φ_ω 是一阶最优条件中的乘子矩阵,取 Φ_ω 的任一列向量(基乘子向量)$\boldsymbol{\omega}^j$,按其正数分量 $\omega_i^j > 0$ 的下标组成的子列 $\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$, $d \leqslant r$, 可作交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$,则对于这一下标子列 $\{i_1, i_2, \cdots, i_d\} \subset I(\boldsymbol{x}^0)$ 都可以在 $I(\boldsymbol{x}^0)$中取到$\{j_1, j_2, \cdots, j_{r-d}\}$下标子列,并有

$$\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0),\ i \in \{i_1, i_2, \cdots, i_d\} \cup \{j_1, j_2, \cdots, j_{r-d}\}$$

向量组是线性无关的,从而,由此可作交曲线

$$g\{i_1, i_2, \cdots, i_d;\ j_1, j_2, \cdots, j_{r-d}\} \subset g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$$

这里 $r = \mathrm{rank}(G(\boldsymbol{x}^0))$. ■

由 Φ_ω 矩阵中列向量 $\boldsymbol{\omega}^j$ 的构造即知以上结论，即每个列向量 $\boldsymbol{\omega}^j$ 都是由 Jacobi 矩阵 $G(\boldsymbol{x}^0)$ 中的一个极大线性无关向量组 $\nabla g_{k_i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$，$i = 1, 2, \cdots, r$ $k_i \in I(\boldsymbol{x}^0)$，并满足

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \sum_{i=1}^{r} \omega_{k_i} \nabla g_{k_i}(\boldsymbol{x}^0) \qquad \omega_{k_i} \geqslant 0$$

条件所决定. $\boldsymbol{\omega}^j$ 中的分量 $\omega_t^j = \begin{cases} \omega_t & t = k_1, k_2, \cdots, k_r \\ 0 & t = \text{其他} \end{cases}$. 从而总有，

$$\{k_1, k_2, \cdots, k_r\} \Leftrightarrow \{i_1, i_2, \cdots, i_d\} \cup \{j_1, j_2, \cdots, j_{r-d}\}$$

成立.

类似于二阶约束品性(Ⅰ)的意义，当二阶约束品性(Ⅱ)成立时，就意味着在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处，存在有下标集合 $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$ 决定的这样的一条交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$，对于任一 $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 方向向量，都可由 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$ 的函数 $g(\boldsymbol{x}; i_1, i_2, \cdots, i_d)$ 构造出 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 函数，并对充分小的 ε，$\theta \in [0, \varepsilon]$，有

$$g(\boldsymbol{x}(\theta); i_1, i_2, \cdots, i_d) \subset X$$

成立. $g(\boldsymbol{x}(\theta); i_1, i_2, \cdots, i_d)$，对所有 $\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 显然也就是 X 可行区域在 $\boldsymbol{x}^0$ 邻域的边界曲线(族).

注意 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 与 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 之间的区别，即对于任一非 0 向量 $\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{z} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$，在 $g_i(\boldsymbol{x})$，$i \in I(\boldsymbol{x}^0)$ 函数组中，可以构造出不止一条交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$ 以及(不止一个的) $\boldsymbol{x}(\theta; i_1, i_2, \cdots, i_r)$ 函数. 这些 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 函数表示的曲线全部过 $\boldsymbol{x}^0$ 点，且在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的切向量全部与 $\boldsymbol{z}$ 方向向量重合；但对于任一非 0 向量 $\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$，以 $i_j \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$ 的下标子列所决定的交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$ 而讲，对每一个下标子列 $\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$ 一旦给定就只对应于唯一一条交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$，或者说，在 $\boldsymbol{x}^0$ 的一个邻域内，由于 Jacobi 矩阵

$$G\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_d \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}(\boldsymbol{x}^0)$$

的秩即为 d，故由隐函数定理所能决定的 $g(\boldsymbol{x}; i_1, i_2, \cdots, i_d)$ 函数

$$g: \begin{cases} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_i(\tilde{\boldsymbol{x}}(d)) & i = 1, 2, \cdots, d \\ x_{d+k} = \tilde{x}_{d+k} & k = 1, 2, \cdots, m-d \end{cases} \qquad \text{—(6.4.3.3)}$$

是唯一的[1].

---

〔1〕 参见《科学计算导论》(第 2 版)，Michael T. Heath，张威等译，清华大学出版社，2005 年，第 190 页的有关论述.

如果基乘子向量 $\boldsymbol{\omega}^j$ 所决定的下标子序列 $\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$ 可拓展成推论 6.4.3.1 中所指的下标序列

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_d\} \cup \{j_1, j_2, \cdots, j_{r-d}\}$$

并且由以上分析,已知由 $\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$ 决定的交曲线

$$\boldsymbol{x} = g(\boldsymbol{x}(\theta);\ i_1, i_2, \cdots, i_d) \subset X \quad \theta \in [0, \varepsilon]$$

但是另一方面交曲线

$$\boldsymbol{x} = g(\boldsymbol{x}(\theta);\ i_1, i_2, \cdots, i_d;\ j_1, j_2, \cdots, j_{r-d}) \subset X \quad \theta \in [0, \varepsilon]$$

不一定总是成立的. 因为这样的交曲线可能除 $\theta=0$ 点之外均位于 X 区域的外部.

如果基乘子向量 $\boldsymbol{\omega}^j$ 决定的下标子列 $\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$ 所拓展成推论 6.4.3.1 中所指的下标序列

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_d\} \cup \{j_1, j_2, \cdots, j_{r-d}\}$$

以及由此构造出来的交曲线(在 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) - \{\boldsymbol{0}\}$ 非空时),

$$\boldsymbol{x} = g(\boldsymbol{x}(\theta);\ i_1, i_2, \cdots, i_d;\ j_1, j_2, \cdots, j_{r-d}) \subset X \quad \theta \in [0, \varepsilon]$$

时,记

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_r\} = \{i_1, i_2, \cdots, i_d;\ j_1, j_2, \cdots, j_{r-d}\}$$

并称交曲线

$$g(\boldsymbol{x};\ i_1, i_2, \cdots, i_r) \qquad \{i_1, i_2, \cdots, i_d\} \subset \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$$

是 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$ 交曲线在 X 可行区域中 $\theta \to 0$ 时的边界曲线.

若 $\boldsymbol{x}^0$ 点处二阶约束品性(Ⅰ、Ⅱ)成立,则对于任一基乘子向量 $\boldsymbol{\omega}^j$ 所决定的下标集合 $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$ 以及对 $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$ 所决定的交曲线 $g(x;\ i_1, i_2, \cdots, i_d)$,则对所有的 $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 所构造的 $\boldsymbol{x}(\theta)$,以及

$$\boldsymbol{x} = g(\boldsymbol{x}(\theta);\ i_1, i_2, \cdots, i_d) \qquad \theta \in [0, \varepsilon]$$

都存在有以上所指的交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$, $\{i_1, i_2, \cdots, i_d\} \subset \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$, 是 $g(\boldsymbol{x};\ i_1, i_2, \cdots, i_d)$ 在 X 区域中 $\theta \to 0$ 时的边界曲线.

关于这一结论,可以由 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 的构造即知. 因为(6.4.2.22)式, $\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$,

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^1 + \boldsymbol{z}^+ \qquad \boldsymbol{z}^1 \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) \qquad \boldsymbol{z}^+ \in \hat{Z}^1_+(\boldsymbol{x}^0)$$

故取 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^1 \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) \subseteq \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$,所以,由二阶约束品性(Ⅰ、Ⅱ)的定义即知对

于任一 $z = z^1$ 这样的方向向量，都可(至少)决定一条交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$，且有相应的 $x(\theta; i_1, i_2, \cdots, i_r)$存在使

$$x(\theta; i_1, i_2, \cdots, i_r) \subset X \quad \theta \in [0, \varepsilon]$$

成立，且 $\{i_1, i_2, \cdots, i_d\} \subseteq \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$. 这样，$g\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$就是 $g(x; i_1, i_2, \cdots, i_d)$在 X 区域中 $\theta \to 0$ 时的边界曲线.

例 6.4.3.1 对于例 6.4.1.2 中的$\hat{\hat{Z}}^1(x^0)$集合构造 $x(\theta)$函数.

由例 6.4.1.2 的结果，$\hat{I}(x^0) = \{1\}$，

$$\hat{\hat{Z}}^1(x^0) = \left\{ z \left| z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v \quad t \in R \quad v \geqslant 0 \right. \right\}$$

$$\hat{Z}^1(x^0) = \left\{ z \left| z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t \quad t \in R \right. \right\}$$

任取 $z \in \hat{\hat{Z}}^1(x^0) \quad z \neq 0 \Rightarrow t, v$ 不同时为 0

$$z = \begin{bmatrix} v \\ t + v \\ 0 \end{bmatrix}$$

由 $\hat{I}(x^0) = \{1\}$ 及 $g(x, 1)$函数的构造，可知应由

$$g_1(x) = 0 \Rightarrow (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

解出 $g(x, 1)$函数. 现在由于 $x^0 = (1, 0, 1)^T$

$$\nabla g_1(x^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\nabla g_1(x^0)$分量中的

$$\frac{\partial g_1(x^0)}{\partial x_3} = -2 \neq 0$$

由隐函数定理的要求，即知

$$g(x, 1) = \begin{cases} x_1 = \tilde{x}_1 \\ x_2 = \tilde{x}_2 \\ x_3 = \pm\sqrt{1 - (\tilde{x}_1 - 1)^2 - \tilde{x}_2^2} \qquad 1 \geqslant (\tilde{x}_1 - 1)^2 + \tilde{x}_2^2 \end{cases}$$

注意在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域应有 $x_3>0$，故可取

$$g(\boldsymbol{x},1)=\begin{cases}x_1=\tilde{x}_1\\x_2=\tilde{x}_2\\x_3=\sqrt{1-(\tilde{x}_1-1)^2-\tilde{x}_2^2}\end{cases}$$

再令

$$\tilde{x}_{1,2}=x_{1,2}^0+\lambda z_{1,2}\theta\qquad(\text{不妨取 }\lambda=1)$$

得

$$\tilde{x}_1=1+v\theta$$

$$\tilde{x}_2=(t+v)\theta$$

故得到

$$\boldsymbol{x}(\theta)=\boldsymbol{x}(\theta;1)=\begin{cases}x_1=1+v\theta\\x_2=(t+v)\theta\\x_3=(1-(v^2+(t+v)^2)\theta^2)^{\frac{1}{2}}\quad 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{v^2+(t+v)^2}}\end{cases}$$

由
$$(1-(v^2+(t+v)^2)\theta^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant 1$$

即知

$$g_2(\boldsymbol{x}(\theta))\geqslant 0$$

$$g_3(\boldsymbol{x}(\theta))\geqslant 0$$

均成立. 故 $\boldsymbol{x}(\theta)\subset X$. 且显然有

$$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}^0$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(0)}{\mathrm{d}\theta}=\begin{bmatrix}v\\t+v\\0\end{bmatrix}=\lambda\boldsymbol{z}$$

且 $\boldsymbol{x}(\theta)$关于 θ 二阶可导. 并可知，$\boldsymbol{x}(\theta)=\boldsymbol{x}(\theta;t,v)$ 由 t, v 的全部可行取法其实涵盖了一个曲面片.

最后，由续例 6.4.2.2 的结果，在 X 可行区域上的 $\boldsymbol{x}^0$ 点处，有 3 条交曲线，它们在 $\boldsymbol{x}\in N_\delta(\boldsymbol{x}^0)$，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}^0$ 时

$$g\{1,2\}\not\subset X\qquad g\{1,3\}\subset X\qquad g\{2,3\}\subset X$$

由以上关于 $g(\boldsymbol{x},1)$的边界曲线的定义，$\{1\}\subset\{1,3\}$，故 $g\{1,3\}$就是 $g(\boldsymbol{x},1)$

在 X 区域中 $\theta \to 0$ 时的边界曲线. 且显然地，当令 $v=0$，$\theta \to 0$ 这里的 $\boldsymbol{x}(\theta;\,1)$ 函数与例 6.4.2.2 中的 $\boldsymbol{x}(\theta;\,1,\,3)$ 函数就趋于一致. 且在 $v=0$，$\theta=0$ 处

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(\theta;\,1)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(\theta;\,1,\,3)}{\mathrm{d}\theta}=\lambda \boldsymbol{z} \qquad \boldsymbol{z}\in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$$

在几何上，可见图 6.4.1.1，g_1 是 $g_1(\boldsymbol{x})=0$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的切平面. 任何 $\boldsymbol{z}\in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$，$\boldsymbol{z}\neq \boldsymbol{0}$ 都是由 g_1 平面上的方向向量 $\boldsymbol{d}^2$ 与 l_t 直线上的方向向量 $\boldsymbol{t}^+$（或 $\boldsymbol{t}^-$）的矢量和构造出来的（即(6.4.2.22)式）. 显然，每一个这样的 $\boldsymbol{z}\in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$，$\boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{0}$ 都能决定 $g_1(\boldsymbol{x})=0$ 上的一条曲线. 这样 $g_1(\boldsymbol{x})=0$（即球面）上的曲线就是这里所说的 $\boldsymbol{x}(\theta;\,1)$ 函数对应的曲线. 而由 $\boldsymbol{z}\in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ $\boldsymbol{z}\neq \boldsymbol{0}$ 决定的方向向量就是 l_t 直线上的 $\boldsymbol{t}^+$、$\boldsymbol{t}^-$ 这样的方向向量. 由 $\boldsymbol{t}^+$、$\boldsymbol{t}^-$ 方向向量所能决定的且在 $\boldsymbol{x}^0$ 的一个邻域内属于可行区域的交曲线只有 $g\{1,\,3\}$ 与 $g\{2,\,3\}$ 即图中的 f_1、f_2 所示的曲线. 显然，其中只有 $g\{1,\,3\}$ 交曲线才是 $g_1(\boldsymbol{x})=0$ 与 $g_3(\boldsymbol{x})=0$ 过 $\boldsymbol{x}^0$ 点交成的曲线，由 $\boldsymbol{x}(\theta;\,1)$ 的几何意义即知，$g\{1,\,3\}$ 即 f_1 曲线就是在 $\theta\to 0$，且取 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{t}^+$（或 $\boldsymbol{t}^-$）$\in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)\subset \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 时的边界曲线.

指出以上论述中的这一点不无裨益，即以上分析中所指称的 $g\{i_1,\,i_2,\,\cdots,\,i_d\}$ 的边界曲线都是指在 $\theta\to 0$ 极限条件下的边界曲线. 一般地，当 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)\neq \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 时，在 $\theta\in(0,\,\varepsilon]$ 半开区间里，$\theta\to 0$ 时的边界曲线 $g\{i_1,\,i_2,\,\cdots,\,i_r\}$（$\{i_1,\,i_2,\,\cdots,\,i_d\}\subset\{i_1,\,i_2,\,\cdots,\,i_r\}$）不是 $g\{i_1,\,i_2,\,\cdots,\,i_d\}$ 曲线族的边界，仍可以用本例予以说明.

以上已指出，在 $\theta\to 0$，令 $v=0$，可知 $\boldsymbol{x}(\theta;\,1)\to \boldsymbol{x}(\theta;\,1,\,3)$ 曲线. 但在 $\theta>0$ 时，令 $v=0$，有

$$\boldsymbol{x}(\theta;\,1)=\begin{cases}x_1=1\\ x_2=t\theta\\ x_3=(1-t^2\theta)^{\frac{1}{2}}\end{cases} \qquad \boldsymbol{x}(\theta;\,1,\,3)=\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{1-2t^2\theta^2})\\ x_2=t\theta\\ x_3=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{1-2t^2\theta^2})\end{cases}$$

这 2 个函数代表的曲线是不同的. 在 $v=0$ 时的 $\boldsymbol{x}(\theta;\,1)$ 代表的曲线显然是图 6.4.1.1 中的过 $\boldsymbol{x}^0$ 点的直线 l_t 在 $g_1(\boldsymbol{x})=0$ 球面上的投影决定的那条弧线而不是 $\boldsymbol{x}(\theta;\,1,\,3)$ 所表示的 f_1 曲线.

然而，由此即知，当 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)=\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 时，势必要有在 $\theta\in[0,\,\varepsilon]$ 闭区间上，$g\{i_1,\,i_2,\,\cdots,\,i_d\}$ 曲线与其在 X 区域中的边界曲线 $g\{i_1,\,i_2,\,\cdots,\,i_r\}$ 是重合的曲线.

再给出 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \neq \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 且 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{0}\}$ 的由 $\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 构造出 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 的例子.

例 6.4.3.2 由例 6.4.1.1,知那里的 $\boldsymbol{x}^0 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$

$$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{0}\}$$

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{\boldsymbol{z} \,\middle|\, \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix} h \quad h \geqslant 0\right\}$$

$$\boldsymbol{\omega} = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}},\ \hat{I}(\boldsymbol{x}^0) = \{1, 2\} \quad I(\boldsymbol{x}^0) = \{1, 2, 3\}$$

并且,那里的$\nabla g_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$、$\nabla g_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$向量线性无关.

$$\begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = 0 \\ g_2(\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(x_1 - \dfrac{5}{2}\right)^2 + x_2^2 + \left(x_3 - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{7}{2} \\ \left(x_1 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + x_2^2 + \left(x_3 - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

两式相减得 $$x_3 = 2x_1 - 1$$

代入 $g_2(\boldsymbol{x}) = 0$,得

$$5x_1^2 - 11x_1 + 5 + x_2^2 = 0$$

的关系.且 Jacobi 矩阵

$$\begin{bmatrix} \nabla g_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \\ \nabla g_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

中任两列向量组成的子矩阵均可逆,故可任选 $x_{1,2,3}$ 为参数构造 $g(\boldsymbol{x};\ 1,\ 2)$ 函数.但为方便可构造以 $x_2 = \tilde{x}_2$ 为参数的 $g(\boldsymbol{x};\ 1,\ 2)$ 函数.由上式得

$$x_1 = \frac{11 \pm \sqrt{21 - 20\,\tilde{x}_2^2}}{10}$$

且由 $\boldsymbol{x}^0$ 处,$x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$ 可知应取

$$g(\boldsymbol{x};\ 1,\ 2) = \begin{cases} x_1 = \dfrac{11 - \sqrt{21 - 20\,\tilde{x}_2^2}}{10} \\ x_2 = \tilde{x}_2^2 \\ x_3 = \dfrac{6 - \sqrt{21 - 20\,\tilde{x}_2^2}}{5} \end{cases} \quad \tilde{x}_2 \in \left[-\sqrt{\frac{21}{20}}, \sqrt{\frac{21}{20}}\right]$$

作 $\quad \tilde{x}_2 = x_2^0 + \lambda z_2 \theta \quad$ (不妨取 $\lambda = 1$)

即 $\quad \tilde{x}_2 = 1 + h\theta \quad h > 0 \quad \theta \geqslant 0$

得 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 形式的函数

$$\boldsymbol{x}(\theta) = \boldsymbol{x}(\theta;\ 1,\ 2) = \begin{cases} x_1 = \dfrac{11 - \sqrt{21 - 20(1+h\theta)^2}}{10} \\ x_2 = 1 + h\theta \\ x_3 = \dfrac{6 - \sqrt{21 - 20(1+h\theta)^2}}{5} \end{cases} \quad \frac{\sqrt{\dfrac{21}{20}} - 1}{h} \geqslant \theta \geqslant 0$$

显然有

$$g_1(\boldsymbol{x}(\theta)) = 0,\ g_2(\boldsymbol{x}(\theta)) = 0 \qquad \frac{\sqrt{\dfrac{21}{20}} - 1}{h} \geqslant \theta \geqslant 0$$

将 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 代入 $g_3(\boldsymbol{x})$，得

$$g_3(\boldsymbol{x}(\theta)) = \frac{1}{10}((7 - 10h\theta) - 7\sqrt{21 - 20(1+h\theta)^2})$$

且由于

$$(7 - 10h\theta)^2 - (7\sqrt{21 - 20(1+h\theta)^2})^2 = 1\,080h^2\theta^2 + 1\,820h\theta \geqslant 0$$

故知

$$g_3(\boldsymbol{x}(\theta)) \geqslant 0 \qquad \frac{\sqrt{\dfrac{21}{10}} - 1}{h} \geqslant \theta \geqslant 0$$

即 $\boldsymbol{x}(\theta) \subset X$. 并显然有 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^0$，$\boldsymbol{x}(\theta)$ 关于 θ 二阶可导，且

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(0)}{\mathrm{d}\theta} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} h = \lambda \boldsymbol{z}$$

图 6.4.3.1 给出了本例 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的几何性状.

图中的曲线 g 即为 X 可行区域中过 $\boldsymbol{x}^0$ 的交曲线 $g(\boldsymbol{x};\ 1,\ 2)$. X 区域在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的线性化锥 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 是由图中的 g_1，g_2，g_3 平面围成的顶点在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的闭锥. $g_{1,2,3}$ 是 $\nabla g_{1,2,3}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = 0$ 决定的平面. 而 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合为 $\{\boldsymbol{0}\}$，表示 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$

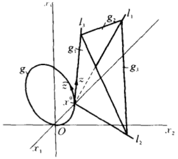


图 6.4.3.1

集合就是 $\boldsymbol{x}^0$ 点，$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合由

$$\begin{cases}\nabla g_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}=0\\ \nabla g_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}=0\\ \nabla g_3^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z}\geqslant 0\end{cases}$$

方程组决定. 由不等式方程组的解的构造，这个方程组的解显然就是 Jacobi 矩阵 $G(\boldsymbol{x}^0)$的逆矩阵的第 3 列向量 $\boldsymbol{z}^3$ 为方向向量决定的从 $\boldsymbol{x}^0$ 出发的射线，如图中的 g_1、g_2 平面的交线 l_3 上的向量 $\boldsymbol{z}$.

可将本例的图 6.4.3.1 与例 6.4.2.3 中的图 6.4.2.1 相比较. 在例 6.4.2.3 中，与本例不同，有 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)=\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)\neq\{\boldsymbol{0}\}$，故图 6.4.2.1 中$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$中存在着与交曲线 g 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的切线 l_0 相重合，但方向相反的向量 $\boldsymbol{z}$、$-\boldsymbol{z}$ 且可相应地决定交曲线 g 上的有向曲线$\widehat{z}$、$-\widehat{z}$. 而在本例中，只存有与 l_3 重合的单向的方向向量 $\boldsymbol{z}$，且也只能决定交曲线上单向的曲线$\widehat{z}$.

这里区别就是表示上文所言及的，当 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)\neq\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$，$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合总是一个交曲线 $g\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$的切空间上的闭锥. 在本例中，这个交曲线上的切空间的闭锥，就是 g_1、g_2 的交直线 l_3. l_3 就是交曲线 g 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切线上的闭锥（半直线射线）.

例 6.4.3.3 约束函数关于 $\boldsymbol{x}(\theta)$是相关的.

对例 6.1.1 的规划问题构造 $\boldsymbol{x}(\theta)$函数. 由那里的结果，$I(\boldsymbol{x}^0)=\{1, 2, 3\}$. 基乘子向量有 2 个，分别对应 $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)=\{1\}$ 和$\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)=\{2, 3\}$. $\mathrm{rank}(G(\boldsymbol{x}^0))=2$，且 $G(\boldsymbol{x}^0)$的任意 2 个行向量均线性无关.

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)=\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)=\{\boldsymbol{z}\mid\boldsymbol{z}=(0, 0, 1)^{\mathrm{T}}t\quad t\in R\}$$

$\boldsymbol{x}^0=(2, 2, 3)^{\mathrm{T}}$

$$g_1(\boldsymbol{x})=8-x_1^2-x_2^2\geqslant 0$$

$$g_2(\boldsymbol{x})=10-4x_1-x_2\geqslant 0$$

$$g_3(\boldsymbol{x})=8-x_1-3x_2\geqslant 0$$

易知任取 $g_{1,2,3}(\boldsymbol{x})$中的 2 个约束函数，由

$$\begin{cases}g_i(\boldsymbol{x})=0\\ g_j(\boldsymbol{x})=0\end{cases}\quad i, j=1, 2, 3$$

决定的交曲线（在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域），都只有以下形式

$$g(\boldsymbol{x},\ i,\ j) = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = \tilde{x}_3 \end{cases} \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3$$

故取 $\boldsymbol{z} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$，$\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$

$$\tilde{x}_3 = x_3^0 + z_3\theta = 3 + t\theta \quad t \neq 0 \quad \theta \geqslant 0$$

得

$$\boldsymbol{x}(\theta) = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 + t\theta \end{cases}$$

且 $g_i(\boldsymbol{x}(\theta)) = 0 \quad i = 1,\ 2,\ 3$ 成立.

此例 $g_i(\boldsymbol{x}(\theta))$是相关的(且是线性相关的).

易知对 $\boldsymbol{z} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$，$\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$，所构造出的 $\boldsymbol{x}(\theta)$仍同以上形式. 如取 $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0) = \{1\}$ 为例. 由

$$g_1(\boldsymbol{x}) = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 0 \cdot x_3 = 8$$

可解出

$$x_1 = \pm (8 - \tilde{x}_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域应取

$$g(\boldsymbol{x},\ 1) = \begin{cases} x_1 = (8 - \tilde{x}_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ x_2 = \tilde{x}_2 \\ x_3 = \tilde{x}_3 \end{cases}$$

则

$$\tilde{x}_2 = x_2^0 + z_2\theta = 2$$

$$\tilde{x}_3 = x_3^0 + z_3\theta = 3 + t\theta$$

即得

$$\begin{cases} x_1 = 2 \end{cases}$$

先应指出，二阶约束品性(A)或(Ⅰ、Ⅱ)均隐含一阶约束品性成立为前提，否则，当 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)\neq S(X,\ \boldsymbol{x}^0)$ 时，$Z^1(\boldsymbol{x}^0)$中将含有一部分方向向量 $\boldsymbol{z}$，这些 $\boldsymbol{z}$ 不与可行区域 X 的任一条可微弧相切. 故因 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)\subseteq Z^1(\boldsymbol{x}^0)$，所以，$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$中也可能含有这样的方向向量 $\boldsymbol{z}$，此时就无法谈论二阶约束品性(A)或(Ⅰ)成立与否的问题. 且因为 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)\neq S(X,\ \boldsymbol{x}^0)$ 时，符合一阶最优性条件的 Lagrange 乘子也可能是不存在的，故$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合也就因此无法确定，从而，二阶约束品性(Ⅱ)可能也是无法言及的.

但若反过来考虑一下，即若一阶约束品性成立是否一定就能有二阶约束品性成立呢？对于二阶约束品性(A)，易知这是不一定的. 而对于二阶约束品性(Ⅰ、Ⅱ)来讲，似乎可以猜想当一阶约束品性成立时二阶约束品性(Ⅰ、Ⅱ)总是成立的. 因为已设 $g_i(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处二阶可微，并已设 $\boldsymbol{x}^0$ 是 X 的边界点，故 $\boldsymbol{x}^0$ 一定是至少一组以下形式方程组的(一个)解

$$\begin{cases} g_{i_t}(\boldsymbol{x}) = 0 & t = 1,\ 2,\ \cdots,\ d \\ g_{j_s}(\boldsymbol{x}) > 0 & s = 1,\ 2,\ \cdots,\ v-d \end{cases}$$

其中 $1\leqslant d\leqslant v$. 而以 $\boldsymbol{x}^0$ 点为特解的这样形式的全部方程组在 $\boldsymbol{x}^0$ 邻域内的解(曲线)应该就已包含了二阶约束品性(Ⅰ、Ⅱ)条件所要求的 $\boldsymbol{x}(\theta)$曲线. 但要证明这个猜想又要涉及更广泛的一些问题. 故对于非线性规划(特别就其应用而言)，以二阶约束品性(Ⅰ、Ⅱ)的成立为条件以避开对以上猜想的直接证明是可行的，也是明智的方法.

由以上可见，由二阶约束品性(A)成立⇒二阶约束条件(Ⅰ)成立，反之未必. 故二阶约束品性(Ⅰ)的要求要弱于二阶约束品性(A)，而二阶约束品性(Ⅱ)——似乎——原先是没有的，但在下一节的分析中将说明二阶约束品性(Ⅱ)存在的理由与二阶约束品性(Ⅰ)其实是类似的，并且由于 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)\subseteq \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$，所以，二阶约束品性(Ⅱ)成立⇒二阶约束品性(Ⅰ)成立.

在分析一阶约束品性时已指出若 $\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)$，$i\in I(\boldsymbol{x}^0)$ 是线性独立的，则一阶约束品性成立. 由本节的分析易知，此时二阶约束品性(Ⅰ)(以及二阶约束品性(A))也成立[1]. 这由隐函数定理可直接导出这一结果.

在本章第 2 节分析基乘子向量时，曾指出，基乘子向量应满足二阶约束品性(Ⅱ)的要求. 这里可以更具体地说明这一点. 首先可以理解，$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合是与乘

---

[1] 再次提示，由核规划的作法，含有等式约束条件 $h_j(\boldsymbol{x})=0$ 的规划总可以转化为只含有 $h_j(\boldsymbol{x})\geqslant 0$(或 $-h_j(\boldsymbol{x})\geqslant 0$) 的不等式约束规划. 故这里的 $\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)$ 是线性独立的，隐含了$\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)$及$\nabla h_j(\boldsymbol{x}^0)$是线性独立的.

子向量 $\boldsymbol{\omega}$ 的选择有关的. 不同的(但均符合一阶必要条件的)乘子 $\boldsymbol{\omega}$ 将构造出不同的 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合. 这些不同的 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 并不一定都能使二阶约束品性(Ⅱ)成立. 因此,若有某个乘子向量 $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}$ 符合一阶必要条件,且 $\boldsymbol{\omega}$ 的正数分量下标子列所对应的 $\nabla g_{i_j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$ 向量组线性无关,但 $\boldsymbol{\omega}$ 乘子不满足二阶约束品性(Ⅱ)的要求,则 $\boldsymbol{\omega}$ 仍不能确立为基乘子向量. 这可由以下示例具体说明.

例 6.4.3.4

$$\min \quad f(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 - (x_2 - a)^2$$

$$\text{s. t.} \quad \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = -bx_1^3 + x_2 \geqslant 0 \\ g_2(\boldsymbol{x}) = c^2 - x_1^2 - (x_2 - c)^2 \geqslant 0 \end{cases} \quad a, b, c > 0$$

给出 $\boldsymbol{x}^0 = (0, 0)^{\mathrm{T}}$ 成为局部极小值点的条件[1]. $\boldsymbol{x}^0$ 点处一阶必要条件可表示为

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} \equiv 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2a - \omega_1 - 2c\omega_2 = 0 \Rightarrow \omega_1 + 2c\omega_2 = 2a$$

且

$$\nabla^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 2(\omega_2 - 1) & 0 \\ 0 & 2(\omega_2 - 1) \end{bmatrix}$$

显然应要求成立 $\omega_2 \geqslant 1$.

从

$$\begin{cases} \omega_1 + 2c\omega_2 = 2a \\ \omega_1, \omega_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

中解出 $\boldsymbol{\omega}$,有

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & \dfrac{a}{c} \end{bmatrix} \boldsymbol{s} \quad s_1, s_2 \geqslant 0 \quad s_1 + s_2 = 1$$

记
$$\boldsymbol{\omega}^1 = \begin{bmatrix} 2a \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\omega}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{a}{c} \end{bmatrix}$$

这里已经可知 $\boldsymbol{\omega}^2$ 在 $a \geqslant c$ 时是满足 $\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}^2)$ 半正定的乘子. 再由

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2a \end{bmatrix} \quad \nabla g_1(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2c \end{bmatrix}$$

---

[1] 参见本章例 6.2.1.3.

得知，不论取 $\boldsymbol{\omega}^1$、$\boldsymbol{\omega}^2$ 乘子，都有

$$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)=\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)=\left\{\boldsymbol{z}\,\middle|\,\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}t\quad t\in R\right\}$$

并且，显然 $\boldsymbol{\omega}^1$、$\boldsymbol{\omega}^2$ 的正数分量各只有 1 个，故其正数分量所对应的$\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)$总是线性无关的.

但现在考察 $\boldsymbol{\omega}^1$、$\boldsymbol{\omega}^2$ 是否满足二阶约束品性(Ⅱ)的要求.

对于 $\boldsymbol{\omega}^1$ 乘子，由于 $\omega_1^1=2a>0\quad\omega_2^1=0$，故应考察

$$g_1(\boldsymbol{x})=0$$

决定的在 $\boldsymbol{x}^0$ 邻域内的(交)曲线 $\boldsymbol{x}(\theta;\,1)$是否全部属于可行区域 X. 且在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处，$\dfrac{\partial g_1(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_2}=1\neq 0$，故可得 $x_2=x_2(x_1)$，据此，

$$\boldsymbol{x}(\theta;\,1)=\begin{cases}x_1=\alpha_1\theta\\x_2=b(\alpha_1\theta)^3\end{cases}\quad\theta\geqslant 0$$

其中 α_1，遍取所有 $\boldsymbol{\alpha}\in\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 向量的第 1 分量，故

$$\alpha_1=t\qquad t\in R$$

再由

$$\begin{aligned}g_2(\boldsymbol{x}(\theta;\,1))&=c^2-(t\theta)^2-(b(t\theta)^3-c)^2\\&=-t^2\theta^2(1+b^2t^4\theta^4-2bct\theta)\end{aligned}$$

当取 $t<0$ 对任一 $\theta>0$ 都有 $g_2(\boldsymbol{x}(\theta;\,1))<0$；若取 $t>0$ 则对于 $0<\theta<\dfrac{1}{2bct}$ 也都有 $g_2(\boldsymbol{x}(\theta;\,1))<0$. 所以，不论取多小的正数 $\delta>0$，都不可能有 $\boldsymbol{x}(\theta;\,1)\subset N_\delta(\boldsymbol{x}^0)\cap X$. 由此即知，在取 $\boldsymbol{\omega}^1$ 为 Lagrange 乘子时，$\boldsymbol{x}^0$ 点处将不满足二阶约束品性(Ⅱ)的要求，所以，$\boldsymbol{\omega}^1$ 不能成立为基乘子向量.

对于 $\boldsymbol{\omega}^2$ 乘子，由于 $\omega_1^2=0$，$\omega_2^2=\dfrac{a}{c}>0$，故应考虑

$$g_2(\boldsymbol{x})=0$$

决定的在 $\boldsymbol{x}^0$ 邻域内的(交)曲线 $\boldsymbol{x}(\theta;\,2)$是否属于可行区域 X. 且因 $\dfrac{\partial g_2(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_2}=2c\neq 0$，据此有

$$\boldsymbol{x}(\theta;\,2)=\begin{cases}x_1=t\theta\\x_2=\pm(c^2-t^2\theta^2)^{\frac{1}{2}}+c\end{cases}\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{c}{|t|}$$

考虑 $\boldsymbol{x}(\theta;\,2)$属于 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域，故应在 $\boldsymbol{x}(\theta;\,2)$中取

$$x_2 = c - (c^2 - t^2\theta^2)^{\frac{1}{2}}$$

同时

$$g_1(\boldsymbol{x}(\theta;\ 2)) = -bt^3\theta^3 + c - (c^2 - t^2\theta^2)^{\frac{1}{2}}$$

且由

$$(c - bt^3\theta^3)^2 - ((c^2 - t^2\theta^2)^{\frac{1}{2}})^2 = t^2\theta^2(b^2t^4 - 2bct\theta + 1)$$

故知，对于 $t < 0$ 则 $g_1(\boldsymbol{x}(\theta;\ 2)) \geqslant 0 \quad \theta \in \left[0,\ \frac{c}{|t|}\right]$

而对于 $t > 0$ 则 $g_1(\boldsymbol{x}(\theta;\ 2)) \geqslant 0 \quad \theta \in \left[0,\ \min\left(\frac{c}{t},\ \frac{1}{2bct}\right)\right)$

所以，取充分小的 $\delta > 0$，总可在 $\theta \in [0,\ \delta]$ 时有

$$\boldsymbol{x}(\theta;\ 2) \subset N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X \quad \delta < \min\left(\frac{c}{|t|},\ \frac{1}{2bc\ |t|}\right)$$

由此即知，在取 $\boldsymbol{\omega}^2$ 为 Lagrange 基乘子向量时，$\boldsymbol{x}^0$ 点处就满足二阶约束品性(Ⅱ)的要求，并由以上分析可知，在 $a > c$ 时，$\boldsymbol{x}^0$ 是局部极小值点(同时也是全局极小值点). 由此可知，本例中，存在核规划

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 - (x_2 - a)^2 \\ \text{s.t.} \quad & g_2(\boldsymbol{x}) = c^2 - x_1^2 - (x_2 - c)^2 \geqslant 0 \end{aligned} \qquad a > c > 0$$

且核规划的极小值点就是原规划的极小值点 (因为$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$).

§6.5 Kuhn－Tucker 条件解析

§6.5.1 局部极小值点处的几何最优性条件及其描述

仍然在(P1)形式的规划问题中，并设待检验的局部极小值点 $\boldsymbol{x}^0 \in \partial X$ 即是 X 的边界点，X 总是可行区域. 以下用 z 表示(P1)规划中的目标函数值.

$$z = f(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m$$

请注意符号 z 与方向向量 $\boldsymbol{z}$ 符号的区别.

利用目标函数构造

$$X_f^+(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{x}^0) \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m\} \qquad \text{—(6.5.1.1)}$$

$X_f^+(\boldsymbol{x}^0)$是使目标函数值 $f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{x}^0)$ 的 $\boldsymbol{x}$ 的集合. $X_f^+(\boldsymbol{x}^0)$是 $f(\cdot)$原像域中的一个子集. 由 $X_f^+(\boldsymbol{x}^0)$的定义即知,若 $\boldsymbol{x}^0$ 是 X 的一个局部极小值点,则其充要条件显然可直接表示成:

存在正实数 $\delta > 0$ 并使

条件(c): $$(N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X) \subseteq X_f^+(\boldsymbol{x}^0) \qquad \text{—(6.5.1.2)}$$ ■

这里的条件(c)是与§6.1节中的条件(b.1)、(b.2)等价的.

规定 $\boldsymbol{x} \in R^m$, $z \in R$ 组成R^{m+1} 空间

$$R^{m+1} = \{(\boldsymbol{x}^T,\ z)^T \mid \boldsymbol{x} \in R^m \quad z \in R\}$$

用 V_f 表示 $f(\boldsymbol{x})$的值域

$$V_f = \{z \mid z = f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in D \subset R^m\} \qquad \text{—(6.5.1.3)}$$

对任一 $z \in V_f$ 作集合

$$U_f = \{(\boldsymbol{x}^T,\ z) \mid z = f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in D \subset R^m\} \qquad \text{—(6.5.1.4)}$$

U_f 就是 R^{m+1}空间上的一个曲面,称其为目标函数曲面.

任取 $z^0 \in V_f$, 有 $\boldsymbol{x}^0 \in D$, 使

$$z^0 = f(\boldsymbol{x}^0)$$

则

$$\begin{cases} z = f(\boldsymbol{x}) \\ z = z^0 \end{cases} \qquad \text{—(6.5.1.5)}$$

方程组的几何意义是在 R^{m+1}空间中由目标函数 $z = f(\boldsymbol{x})$ 决定的曲面 U_f 上,用 $z = z_0$(水平)平面所截出的一个曲线[1]. 将这个 U_f 曲面被 $z = z_0$ 平面所截出的曲线投影到 R^m 空间上,记为 f^0,可直接地从上式中得到

$$f^0:\ f(\boldsymbol{x}) = z^0 \qquad \text{—(6.5.1.6)}$$

(6.5.1.6)决定的是 R^m 空间中的一个曲面. 可以将这个曲面 f^0理解为 U_f 曲面在 $z = z_0$ 处的等值曲线(面). 在 $m = 2$ 时它就是"等高线". 对任一 $z' \in V_f$, 都可由(6.5.1.6)决定一个 R^m 空间上的等值曲线,故有一族这样的等值曲线存在.

从映射的角度看,设目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $R^m \to R$ 的单值映射,当 $\boldsymbol{x} \in D_d(\boldsymbol{x}) \subseteq D$. 并进一步假设所有的 $g_i(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x} \in D_d(\boldsymbol{x})$ 时也都是单值映射. 这里"单值映射"是指当 $\boldsymbol{x} \in D_d(\boldsymbol{x})$, 若

---

〔1〕 在 $m = 2$ 时,这里所指的"水平"、"平面"、"曲线"等概念是确切的,在 $m > 2$ 时,则仅为借喻.

$$f(\boldsymbol{x}) = z^1 \quad f(\boldsymbol{x}) = z^2 \Rightarrow z^1 = z^2$$

而 $D_d(\boldsymbol{x})$是 D 的一个子集,可用以下方式表示：

$$D_d(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{x}' \mid \|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\| \leqslant d(\boldsymbol{x}),\ d(\boldsymbol{x}) > 0,\ \boldsymbol{x}、\boldsymbol{x}' \in D \subset R^m\}$$
—(6.5.1.7)

$d(\boldsymbol{x})$表示正实数 d 可以与 $\boldsymbol{x}$ 有关.记

$$V_f^D(\boldsymbol{x}) = \{z \mid z = f(\boldsymbol{x}'),\ \boldsymbol{x}' \in D_d(\boldsymbol{x})\} \quad V_f^D(\boldsymbol{x}) \subset V_f$$

由 $f(\boldsymbol{x})$在 $D_d(\boldsymbol{x}^0)$上的单值性质,任取 z^1、$z^2 \in V_f^D(\boldsymbol{x}^0)$，则

$$f^1:\ f(\boldsymbol{x}) = z^1$$

$$f^2:\ f(\boldsymbol{x}) = z^2$$

当 $z^1 \neq z^2$ 时,f^1 与 f^2 是不相交的.否则,设 f^1、f^2 在 $\boldsymbol{x}'$相交，$\boldsymbol{x}' \in D_d(\boldsymbol{x}^0)$，那么

$$f^1:\ f(\boldsymbol{x}') = z^1$$

$$f^2:\ f(\boldsymbol{x}') = z^2$$

由单值性，$z^1 = z^2$，即得出矛盾.这里隐含了任一 $\boldsymbol{x} \in D_d(\boldsymbol{x}^0)$，只能有一个等值曲面刚好过 $\boldsymbol{x}$ 点.

设 $\boldsymbol{x}^0$ 是 $f(\boldsymbol{x})$、$g_i(\boldsymbol{x})$的正则点,$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) \neq \boldsymbol{0}$、$\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0) \neq 0$，$i = 1, 2, \cdots, k$.

假设：$f(\boldsymbol{x})$，$g_i(\boldsymbol{x})$在正则的 $\boldsymbol{x}^0$ 的邻域 $D_d(\boldsymbol{x}^0)$中总是正则、单值的,即对 $\boldsymbol{x} \in D_d(\boldsymbol{x}^0)$，$f(\boldsymbol{x})$ 是单值的,且 $\nabla f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$，对 $g_i(\boldsymbol{x})$也一样. ■

这一假设排除了等值曲面自身在某一点上相交的可能性.

当 $\boldsymbol{x}^0$ 是正则点时，$\boldsymbol{x} \in D_d(\boldsymbol{x}^0)$

$$f^0:\ f(\boldsymbol{x}) = z^0$$

由 $f(\boldsymbol{x})$的正则性质,f^0曲面总是可定向的.因为对所有的 $\boldsymbol{x} \in D_d(\boldsymbol{x}^0)$，$\nabla f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$，故可以方便地取向量$\nabla f(\boldsymbol{x})$指向的那一侧为 f^0曲面的正方向.这样,f^0曲面将 R^m 中的 $D_d(\boldsymbol{x}^0)$区域剖分为三个不相交的部分,见图 6.5.1.1.图中阴影区域设为$D_d(\boldsymbol{x}^0)$,在f^0曲线的 $\nabla f(\boldsymbol{x})$ 箭头指向的那一侧区域,相对于 $f(\boldsymbol{x}^0) = z^0$；$f(\boldsymbol{x})$是增的,如图所示

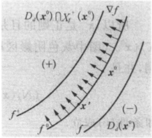


图 6.5.1.1

$$f^+:\ f(\boldsymbol{x}) = z^+ \Rightarrow z^+ > z^0 \quad (\text{用}(+)\text{表示正向一侧半平面})$$

类似地,在 $-\nabla f(\boldsymbol{x})$ 指向的那一侧,$f(\boldsymbol{x})$是减的,如图所示

$$f^{-}: f(\boldsymbol{x}) = z^{-} \Rightarrow z^{-} < z^{0} \quad (\text{用}(-)\text{表示负向一侧半平面})$$

仅在 f^0 曲面上才有 $f(\boldsymbol{x}) = z^0$ 成立.

如果 $\boldsymbol{x}^0$ 是 X 的局部极小值点,利用 $X_f^+(\boldsymbol{x}^0)$ 的定义,就一定有 f^0 曲面在 R^m 空间中将 $D_d(\boldsymbol{x}^0) \cap X_f^+(\boldsymbol{x}^0)$ 集合分离在 f^0 曲面的(包括 f^0 曲面在内的)正向的一侧. 这里,由上文的假设 $\boldsymbol{x}^0$ 是正则的.

因此,马上可以得到,如果 $\boldsymbol{x}^0$ 是 X 中的局部极小值点且正则,那么,必有正数 $\delta > 0$,使 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X$ 位于 f^0 曲面正向(包括 f^0 曲面在内的)一侧. 所以,条件(c)也可以表示为

$$(\mathbf{c}): (N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X) \subseteq (D_d(\boldsymbol{x}^0) \cap X_f^+(\boldsymbol{x}^0)) \qquad —(6.5.1.8)$$

很显然,由于 $\boldsymbol{x}^0$ 位于 f^0 曲面上,故可以说 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X$ 集合在 $\boldsymbol{x}^0$ 处与 f^0 "相接".

这个结论是易见的. 如图 6.5.1.2,若对任意的正数 $\delta > 0$ 都有 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X$ (在图中用斑点阴影区域表示,下同)位于 f^0 曲面的正、负方向两侧,那么就总有 $\boldsymbol{a} \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X$ 这样的点,且必有 $f(\boldsymbol{a}) < f(\boldsymbol{x}^0)$,故 $\boldsymbol{x}^0$ 就不可能是局部极小值点. 图 6.5.1.2 中灰色阴影区域表示 $D_d(\boldsymbol{x}^0)$ 区域.

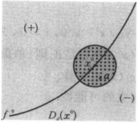


图 6.5.1.2

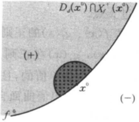


图 6.5.1.3

所以,$\boldsymbol{x}^0$ 是正则的且是 X 的局部极小值点,就只能如图 6.5.1.3,$D_d(\boldsymbol{x}^0) \cap X_f^+(\boldsymbol{x}^0)$ (图中灰色阴影区域,下同)位于 f^0 曲面的正向(包括 f^0 曲面在内)的一侧,并且

$$(N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X) \subseteq (D_d(\boldsymbol{x}^0) \cap X_f^+(\boldsymbol{x}^0))$$

即条件(c)成立.

现在由于局部极小值点 $\boldsymbol{x}^0$ 是 X 的边界点 ($\boldsymbol{x}^0 \in \partial X$),并且 $\boldsymbol{x}^0$ 又位于 f^0 曲面上,这即意味着 $\boldsymbol{x}^0$ 处集合 $(N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X)$ 与 f^0 是相连接的. 所谓"相连接"是指以下三种情形.

图 6.5.1.4 表示的是 X 区域在 $\boldsymbol{x}^0$ 处是以尖点状与 f^0 相接的. 图中的 $g_{1,2}$ 是(有效)不等式约束条件取等号时的边界曲面. 图 6.5.1.4 也可以表示 g_1、g_2

与 f^0 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处相交. 这种相交的几何结果在 $m>2$ 时可以不仅仅是 $\boldsymbol{x}^0$ 一个点.

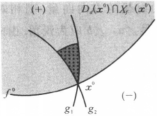


图 6.5.1.4

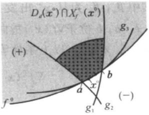


图 6.5.1.5

图 6.5.1.5 表示 X 区域与 f^0 曲面有公共弧，如图上 f^0 与 g_3 边界曲面在 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 之间重合，且 $\boldsymbol{x}^0$ 是 $\boldsymbol{ab}$ 曲面弧上的一个点.

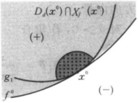


图 6.5.1.6

图 6.5.1.6 表示 X 区域在 $\boldsymbol{x}^0$ 处与 f^0 相切. 当然在高维情况下"相切"也可以是 f^0 与若干个 g_i 边界曲面的交曲面相切.

在图 6.5.1.4 中如果 $\boldsymbol{x}^0$ 是严格意义上的尖点，那么它就是一个严格局部极小值点，而在图 6.5.1.5 中 $\boldsymbol{x}^0$ 只能是弱局部极小值点，因为如 $\boldsymbol{ab}$ 弧上的 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 这样的点（未标出），有 $f(\tilde{\boldsymbol{x}})=f(\boldsymbol{x}^0)$ 成立. 在图 6.5.1.6 中，如果切点 $\boldsymbol{x}^0$ 是唯一的（指在 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0)$ 中是唯一的），那么 $\boldsymbol{x}^0$ 就是严格局部极小值点，否则就只是弱局部极小值点[1].

在以上的论述中，已多次使用了这样两个表述：

(1) 区域 $D_d(\boldsymbol{x}^0)\cap X_f^+(\boldsymbol{x}^0)$ 位于 f^0 曲面的正向一侧；

(2) 区域 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0)\cap X$ 位于 f^0 曲面的正向一侧，并在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处与 f^0 曲面相连接.

以下就对这两个表述给出更准确的数学描述.

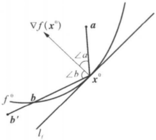


图 6.5.1.7

(1) 区域 $D_d(\boldsymbol{x}^0)\cap X_f^+(\boldsymbol{x}^0)$ 位于 f^0 曲面正向一侧的数学描述.

如图 6.5.1.7 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是 $D_d(\boldsymbol{x}^0)\cap X_f^+(\boldsymbol{x}^0)$ 中的点. 如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 这样的点都位于（包括 f^0 曲面在内的）f^0 曲面正向的一侧，即应位于 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$ 指向的一侧（或位于 f^0 曲面上）. 图 6.5.1.7 中的 l_f 是 f^0 曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的切线（切平面）. 将 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示为 $\boldsymbol{x}^0$ 点出发的射线上的点，有

[1] 以上的这些图只是一些示意图. 人所熟知的一些要点如在 R^m 空间中，X 可行区域的一个尖（端）点，一定要有 $g_i(\boldsymbol{x})=0$，$i=1,2,\cdots,m$ 个方程决定的边界曲面相交才能形成，等等均省略不叙.

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\beta}_a t_a \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\beta}_b t_b \quad t_a, t_b \geqslant 0$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_a$，$\boldsymbol{\beta}_b$ 为从 $\boldsymbol{x}^0$ 出发并指向 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 点的射线的方向向量. 则相对于图 6.5.1.7 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 位于$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$指向一侧的充要条件是$\angle a$，$\angle b$ 应为锐角. 由向量夹角余弦的定义即知，以上条件等价于

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta}_a \geqslant 0, \ \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta}_b \geqslant 0$$

作集合

$$Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{\beta} \mid \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta} \geqslant 0 \quad \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1\} \qquad \text{—(6.5.1.9)}$$

则 $Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0)$给出了包含 l_f 平面在内的$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$正向的 R^m 半空间上所有的归一化的方向向量.

对 $\delta > 0$，作集合

$$Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0, \delta) = \mathrm{cl}\left\{\boldsymbol{\beta} \middle| \boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\|}, \boldsymbol{x} \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap (D_d(\boldsymbol{x}^0) \cap X_f^+(\boldsymbol{x}^0)) \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^0\right\} \qquad \text{—(6.5.1.10)}$$

"cl"是闭包算子.

显然有

$$\text{当 } \delta \to 0, \ Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0, \delta) \to Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0) \qquad \text{—(6.5.1.11)}$$

这仍然可以利用在 f^0 曲面上过 $\boldsymbol{x}^0$ 点取截平面的方法予以证明. 即在 f^0 曲面 $\boldsymbol{x}^0$ 点的切平面上任取方向向量 $\boldsymbol{\alpha}$，并作直线

$$l_t: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\alpha}t \qquad t \in R$$

$$l_s: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \nabla f(\boldsymbol{x}^0) \cdot s \quad s \geqslant 0$$

则由 l_t、l_s 有向直线构造的坐标平面 Ots 过 $\boldsymbol{x}^0$ 点并与 f^0 曲面相交.

(a) 设 Ots 坐标平面上 f^0 曲面的交线如图 6.5.1.7. 现在 l_f 直线即为 l_t 直线，其正方向可以任意指定. 那么，由 $Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0)$的定义，$Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0)$是包含 l_f 直线在内$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$指向的那一侧的 R^m 半平面. 再由 $X_f^+(\boldsymbol{x}^0)$的定义及 $D_d(\boldsymbol{x}^0)$的意义知，$X_f^+(\boldsymbol{x}^0)$应在 f^0 曲面$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$指向的那一侧，所以，必有

$$Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0, \delta) \subseteq Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0)$$

现再任取 $\boldsymbol{\beta} \in Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0)$，且$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta} > 0$ 作

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\beta}t \qquad \delta \geqslant t \geqslant 0$$

可有

$$f(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\beta}t) = f(\boldsymbol{x}^0) + \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta}t + \varepsilon(t^2)$$

由于

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta} > 0$$

故若

$$\varepsilon(t^2) \geqslant 0$$

即已有

$$f(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\beta}t) \geqslant f(\boldsymbol{x}^0) \Rightarrow \boldsymbol{\beta} \in Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0, \delta)$$

现设 $\varepsilon(t^2) < 0$，将 $\varepsilon(t^2)$ 表示成

$$\varepsilon(t^2) = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0 + \theta\boldsymbol{\beta}t)\boldsymbol{\beta}\frac{t^2}{2} \quad 0 < \theta < 1$$

由图 6.5.1.7[1]

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0 + \theta\boldsymbol{\beta}t)\boldsymbol{\beta} < 0$$

并且二次型 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0 + \theta\boldsymbol{\beta}t)\boldsymbol{\beta}$ 不能对任意小的正数 $\delta > 0$ 都是趋近于 $-\infty$ 的，否则即要有

$$\lim_{t\to 0}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0 + \theta\boldsymbol{\beta}t)\boldsymbol{\beta} = -\infty$$

从而 f^0 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处(沿 $\boldsymbol{\beta}$ 方向)的曲率半径将为 0，即 f^0 曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处或为尖点或为折线，但这将与 $f(\boldsymbol{x})$ 的可微性矛盾. 故应有对于充分小的 $\delta > 0$，

$$-M < \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0 + \theta\boldsymbol{\beta}t)\boldsymbol{\beta} < 0 \quad 0 < M < +\infty$$

取

$$0 < t' \leqslant 2\frac{\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta}}{M}$$

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta}t' + \varepsilon(t'^2) > 0$$

故

$$f(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\beta}t') = f(\boldsymbol{x}^0) + \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta}t' + \varepsilon(t'^2) > f(\boldsymbol{x}^0)$$

而由 $Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0, \delta)$ 的构造，只要有一个 $\boldsymbol{x} \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap (D_d(\boldsymbol{x}^0) \cap X_f^+(\boldsymbol{x}^0))$，即可决定

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\|} \in Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0, \delta)$$

现在显然可以有

$$\delta' = 2\frac{\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta}}{M}$$

---

[1] 由本书前面关于二次型 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta}$ 符号的分析，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta}$ 的符号在 $f(\boldsymbol{x}) = c$ (c 为常数)决定的曲面，在 $-\nabla f(\boldsymbol{x})$ 方向上为上凸时，是负的，这即是图 6.5.1.7 中 f^0 曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域的性状.

从而

$$\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{\beta}t'\in N_{\delta'}(\boldsymbol{x}^0)\cap(D_d(\boldsymbol{x}^0)\cap X_f^+(\boldsymbol{x}^0))\Rightarrow\boldsymbol{\beta}\in Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0,\delta')$$

从几何上说，即是如图 6.5.1.7 若对任取的一个 $\boldsymbol{\beta}\in Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0)$ 以及 $\delta>0$，$0<t<\delta$，有 $f(\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{\beta}t)<f(\boldsymbol{x}^0)$，$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta}>0$，如图中的 $\boldsymbol{b}'$ 点，那么，总可以取

$$\delta'=\overline{\boldsymbol{x}^0\boldsymbol{b}}\qquad 0\leqslant t'\leqslant s'$$

由 f^0 曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域的凸性状，有

$$f(\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{\beta}t')\geqslant f(\boldsymbol{x}^0)\Rightarrow\boldsymbol{\beta}\in Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0,\delta')$$

这即表明，当 $\delta\to0$，总有

$$\boldsymbol{\beta}\in Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0)\Rightarrow\boldsymbol{\beta}\in Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0,\delta)$$

故得

$$Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0,\delta)\to Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0)\qquad 当\ \delta\to0$$

(b) 设 Ots 坐标平面与 f^0 曲面的交线如图 6.5.1.8，

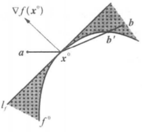


图 6.5.1.8

这时，对任意的 $\delta>0$，总有

$$Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0)\subset Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0,\delta)$$

因为 $Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0)$ 集合仅包含位于 l_f 直线上以及 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$ 所指向的那一侧半平面的方向向量（如 $\boldsymbol{a}$ 点），但 $Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0,\delta)$ 不仅要包含 $Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0)$ 中的全部方向向量，而且，还要包含图 6.5.1.8 中斑点阴影区域中的点（如 $\boldsymbol{b}'$ 点）所能决定的方向向量. 如

$$\boldsymbol{\beta}_b=\frac{\boldsymbol{b}'-\boldsymbol{x}^0}{\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{x}^0\|}\in Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0,\delta)\quad(\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{x}^0\|\leqslant\delta)$$

但现在显然有

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta}_b<0\Rightarrow\boldsymbol{\beta}_b\notin Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0)$$

然而，类似地可以有，设 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{\beta}_b t_b$

$$0<\boldsymbol{\beta}_b^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0+\theta\boldsymbol{\beta}_b t_b)\boldsymbol{\beta}_b<M<+\infty\quad 0<\theta<1$$

且由 $\boldsymbol{b}\in X_f^+(\boldsymbol{x}^0)$，故

$$f(\boldsymbol{b})=f(\boldsymbol{x}^0)+\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta}_b t_b+\varepsilon(t_b^2)>f(\boldsymbol{x}^0)\Rightarrow\varepsilon(t_b^2)>0$$

取

$$0 < \delta' < 2\frac{-\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta}_b}{M} \leqslant t_b$$

则对于 $0 \leqslant t \leqslant \delta'$ 作

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\beta}_b t$$

有

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}^0) + \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta}_b t + \varepsilon(t^2)$$

$$\varepsilon(t^2) = \boldsymbol{\beta}_b^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0 + \theta\boldsymbol{\beta}_b t)\boldsymbol{\beta}_b \frac{t^2}{2} > 0,\ 0 < \theta < 1$$

即

$$\varepsilon(t^2) \leqslant \boldsymbol{\beta}_b^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0 + \theta\boldsymbol{\beta}_b t)\boldsymbol{\beta}_b \cdot \delta' \cdot \frac{t}{2} < -\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta}_b \frac{\boldsymbol{\beta}_b^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0 + \theta\boldsymbol{\beta}_b t)\boldsymbol{\beta}_b}{M} \cdot t$$

注意

$$0 < \frac{\boldsymbol{\beta}_b^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0 + \theta\boldsymbol{\beta}_b t)\boldsymbol{\beta}_b}{M} < 1$$

故

$$0 < \varepsilon(t^2) < -\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta}_b \cdot t$$

从而对所有的 $0 \leqslant t \leqslant s'$ 有

$$f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}^0) + \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta}_b t + (-\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\beta}_b \cdot t) = f(\boldsymbol{x}^0)$$

因此，对于图 6.5.1.8 这样的情形，在斑点阴影区域中的任一点 $\boldsymbol{b}$ 所决定的方向向量 $\boldsymbol{\beta}_b$，在 $\delta \to 0$ 时，都将有

$$\boldsymbol{\beta}_b \notin Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0,\ \delta)$$

所以亦知，当 $\delta \to 0$，总有

$$Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0,\ \delta) \to Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0)$$

在几何上，以上的分析即是说，对于 $\boldsymbol{b}$ 这样的点，总可以取

$$0 < \delta' < \overline{\boldsymbol{x}^0\boldsymbol{b}'} < \overline{\boldsymbol{x}^0\boldsymbol{b}}$$

从而对于所有的 $0 \leqslant t \leqslant \delta'$ 都有

$$f(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\beta}_b t) < f(\boldsymbol{x}^0) \Rightarrow \boldsymbol{\beta}_b \notin Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0,\ \delta')$$

综合图(6.5.1.7)、(6.5.1.8)表示的情形，可将(6.5.1.11)式写成为

$$\lim_{\delta \to 0} Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0,\ \delta) = Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0) \qquad \text{—(6.5.1.12)}$$

除图 6.5.1.7～8 表示情形之外的是 f^0 曲面与 Ots 坐标平面的交线在 $\boldsymbol{x}^0$ 邻域如图 6.5.1.9 所示是既凹既凸的. 那么,对 f^0 凸的那一侧引用(a)的分析,对凹的那一侧引用以上(b)的分析,可知(6.5.1.12)式的结论总成立.

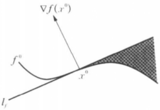


图 6.5.1.9

第 4 种情形即 f^0 与 Ots 坐标平面的交线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域是拟凸的从而与 l_f 重合. 显然这也不影响(6.5.1.12)式结论的成立. 由于(6.5.1.12)式的结论以及 $Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0, \delta)$ 的构造,对于"区域 $D_d(\boldsymbol{x}^0) \cap X_f^+(\boldsymbol{x}^0)$ 位于 f^0 曲面正向一侧"的数学描述,在 $\boldsymbol{x}^0$ 的无穷小邻域意义即是指对 $\delta > 0$, 构造

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{\beta} t \quad 0 \leqslant t \leqslant \delta \quad \boldsymbol{\beta} \in Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0)$$

当 $\delta \to 0$, 总有 $\boldsymbol{x} \in D_d(\boldsymbol{x}^0) \cap X_f^+(\boldsymbol{x}^0)$. —(6.5.1.13)

(2) 区域 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X$ 位于 f^0 曲面正向一侧的数学描述

利用(6.3.2.12)式定义的 $Z_\xi(\boldsymbol{x}^0, \delta)$ 集合

$$Z_\xi(\boldsymbol{x}^0, \delta) = \mathrm{cl}\left\{\boldsymbol{\xi} \left| \boldsymbol{\xi} = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\|} \quad \boldsymbol{x} \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X, \ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^0 \right.\right\} \text{—(6.3.2.12)}$$

由以上集合 $Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0, \delta)$ 的意义,当 $\delta \to 0$, 区域 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X$ 位于 f^0 曲面正向一侧,显然就是要求

$$Z_\xi(\boldsymbol{x}^0, \delta) \subseteq Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0, \delta) \qquad \text{—(6.5.1.14)}$$

再由(6.5.1.12)式,(6.5.1.13)式,显然,当条件(c)成立,应当有

$$\lim_{\delta \to 0} Z_\xi(\boldsymbol{x}^0, \delta) \subseteq \lim_{\delta \to 0} Z_\beta(\boldsymbol{x}^0, \delta) = Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0) \qquad \text{—(6.5.1.15)}$$

由以上(1)、(2)的分析,可以得到以下结论:

如果 $\boldsymbol{x}^0$ 是可行区域 X 的局部极小值点,就必定有[1]

$$\boldsymbol{\xi} \in Z_\xi(\boldsymbol{x}^0, \delta) \Rightarrow \boldsymbol{\xi} \in Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0) \quad (\delta \to 0)$$

从而 $\boldsymbol{\xi} \in Z_\xi(\boldsymbol{x}^0, \delta)$ 一定是与 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$ 向量的夹角成锐角的方向向量. 把这个结论表述成条件(c.1),并注意到(6.3.2.13)式,可有

条件(c.1): 若 $\boldsymbol{x}^0$ 是 X 的局部极小值点,必要条件是

---

[1] 这里 $\boldsymbol{\xi}$、$\boldsymbol{\beta}$ 符号上的差异不至于造成理解的困难. 使用 $\boldsymbol{\xi}$、$\boldsymbol{\beta}$ 符号所表示的方向向量意义上的差异仅仅在于 $\boldsymbol{\beta}$ 方向向量与目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 有关,而 $\boldsymbol{\xi}$ 方向向量仅由约束函数 $g_i(\boldsymbol{x})$ 决定.

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\xi} \geqslant 0 \quad \boldsymbol{\xi} \in \lim_{\delta \to 0} Z_\xi(\boldsymbol{x}^0, \delta) = S_\xi(X, \boldsymbol{x}^0) \quad —(6.5.1.16)$$

■

或者可将条件(**c.1**)写成等价的形式

条件(c.1)：若 $\boldsymbol{x}^0$ 是 X 的局部极小值点，必要条件是

$$S_\xi(X, \boldsymbol{x}^0) \subseteq Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0) \quad —(6.5.1.17)$$ ■

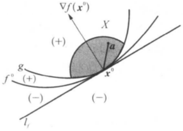


图 6.5.1.10

条件(**c.1**)就是"区域 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X$ 位于 f^0 曲面正向一侧"的意义所在．在坐标截平面 Ots 上，条件(**c.1**)可用图 6.5.1.10 予以说明．

图中的符号意义同前诸图．g 是 X 的边界(交)曲线，阴影区域是 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X$ 集合，$\boldsymbol{x}^0$ 是 X 的局部极小值点．显然阴影区域内的任一点 $\boldsymbol{a}$ 所决定的方向向量

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}^0}{\| \boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}^0 \|} \qquad \| \boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}^0 \| < \delta$$

都必要有 $$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\xi} \geqslant 0$$

成立．

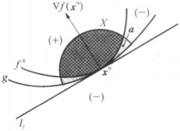


图 6.5.1.11

稍加思索就明白，条件(**c.1**)仅仅是 $\boldsymbol{x}^0$ 成为 X 的局部极小值点的必要条件．在图 6.5.1.11 中，条件(**c.1**)也是成立的，但 $\boldsymbol{x}^0$ 并不是 X 可行区域的局部极小值点．在图 6.5.1.11 中其他条件均相同于图 6.5.1.10，只是 X 的边界曲线 g 现在位于 f^0 曲面 $-\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$ 指向的那一侧半平面．从而，灰色+斑点阴影区域为 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X$，但 $(D_d(\boldsymbol{x}^0) \cap X_f^+(\boldsymbol{x}^0)) \cap N_\delta(\boldsymbol{x}^0)$ 集合现在只是斑点阴影区域，所以，

$$(N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X) \not\subset (D_d(\boldsymbol{x}^0) \cap X_f^+(\boldsymbol{x}^0))$$

这样，灰色阴影区域内如 $\boldsymbol{a}$ 这样的点，一定有

$$\boldsymbol{a} \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X \text{ 且 } f(\boldsymbol{a}) < f(\boldsymbol{x}^0)$$

故 $\boldsymbol{x}^0$ 不是 X 的局部极小值点，但是，作

$$\boldsymbol{\xi}_a = \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}^0}{\| \boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}^0 \|} \quad \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\xi}_a \geqslant 0 \quad (\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{x}^0)$$

仍是成立的. 所以,条件(**c.1**)不是 $\boldsymbol{x}^0$ 成为 X 的局部极小值点的充分条件.

比较图 6.5.1.10 与图 6.5.1.11,马上就可以明白,$\boldsymbol{x}^0$ 之成为 X 可行区域的局部极小值点必须不仅要有条件(**c.1**)成立同时还必须有 $\boldsymbol{x}^0$ 是 X 可行区域在 $\boldsymbol{x}^0$ 邻域的(交)边界曲面 g 上的局部极小值点. 图 6.5.1.10 中 $\boldsymbol{x}^0$ 点同时是 g 曲面上的局部极小值点,而在图 6.5.1.11 中 $\boldsymbol{x}^0$ 点则不是 g 边界曲面上的局部极小值点. 因此,应当再增加以下条件(**c.2**).

条件(c.2):若 $\boldsymbol{x}^0$ 是 X 可行区域的局部极小值点,则 $\boldsymbol{x}^0$ 也必定是 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap \partial X$ 的局部极小值点,即

$$f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{x}^0) \quad \boldsymbol{x} \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap \partial X \qquad —(6.5.1.18)$$

∂X 是 X 的边界点集合. ■

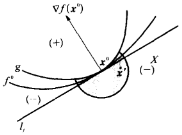


图 6.5.1.12

这里需要指出,单纯地有条件(**c.2**)成立,也不是 $\boldsymbol{x}^0$ 成为 X 可行区域的局部极小值点的充分条件. 这可以由图 6.5.1.12 中看到. 图 6.5.1.12 中的 X 可行区域现在位于 f^0 曲线的负向一侧,所以,虽然边界 g 曲线现在位于 f^0 曲面正向一侧,由于阴影区域表示的 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X$ 集合有部分区域也位于 $-\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$ 指向的那一侧半平面. 因此,阴影区域中如 $\boldsymbol{x}'$ 这样的点,就有

$$f(\boldsymbol{x}') < f(\boldsymbol{x}^0) \quad \boldsymbol{x}' \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X$$

从而,$\boldsymbol{x}^0$ 点就不可能是 X 区域的局部极小值点,但 $\boldsymbol{x}^0$ 点显然仍是 g 边界曲面上的局部极小值(因为 g 位于 $D_d(\boldsymbol{x}^0) \cap X_f^+(\boldsymbol{x}^0)$ 区域内),故条件(**c.2**)是成立的.

同时,可以理解,对于 $\boldsymbol{x}'$ 这样的点,作

$$\boldsymbol{\xi}' = \frac{\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}^0}{\| \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}^0 \|} \quad 有 \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\xi}' < 0$$

即条件(**c.1**)在图 6.5.1.12 的情形里是不成立的.

还应当重申,以上的图 6.5.1.10~12 对于 $m > 2$ 的高维 R^m 空间,可以理解为是利用了过 $\boldsymbol{x}^0$ 点且与 l_f 切平面正交的截平面所截出的曲线图形,因此 m 维数并不至于对以上分析造成本质上的障碍. 至于约束条件 $g_i(\boldsymbol{x})$ 的数量 k 的变动,也不对以上分析造成本质障碍.

对于 f^0、g 曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 处由 $-\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$ 方向看来是凹的情况,也与以上各图相似. 图 6.5.1.13 给出了几种 f^0、g 曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域凹的情形,图示符号意义同

上. 其中(a)图是 $\boldsymbol{x}^0$ 点为 X 的局部极小值点，这时，条件(**c. 1**)、(**c. 2**)均要成立；(b)图条件(**c. 1**)成立但(**c. 2**)不成立；(c)图条件(**c. 2**)成立但(**c. 1**)不成立，(b)、(c)两图所示情形下 $\boldsymbol{x}^0$ 点均不可能是局部极小值点；(d)图是 f^0、g 曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域非凸非凹，$\boldsymbol{x}^0$ 是 X 的局部极小值点，这时条件(**c. 1**)、条件(**c. 2**)均要成立；(e)图 f^0 曲线是凸的而 g 曲线是凹的，l_f 为分离 f^0、g 曲线的公切线，$\boldsymbol{x}^0$ 是局部极小值点，这是通常所说的“凸规划”[1]；(f)图即为 f^0、g 曲线为拟凸(直线)的情形. 由图 6.5.1.13 即见，$\boldsymbol{x}^0$ 点成为 X 可行区域的局部极小值点，条件(**c. 1**)、(**c. 2**)必要同时成立.

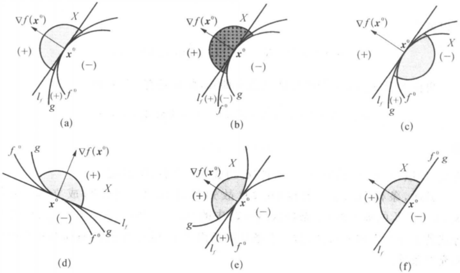


图 6.5.1.13

如果 $\boldsymbol{x}^0 \in X$，且 $\boldsymbol{x}^0$ 点处条件(**c. 1**)和条件(**c. 2**)均成立，$\boldsymbol{x}^0$ 点是否一定就是 X 的局部极小值点？回答是肯定的. 这可将条件(**c. 1**)、(**c. 2**)与条件(**b. 1**)、(**b. 2**)比较得知.

条件(**b. 1**)、(**b. 2**)其实只是对局部极小值点定义中 $\boldsymbol{x}^0$ 要成为局部极小值点所需要检验的集合 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X$ 作了一个二分法，

$$N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X = (N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap (X - \partial X)) \cup (N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap \partial X)$$

从而得到条件(**b. 1**)、(**b. 2**).

注意条件(**c. 1**)的(6.5.1.17)式以及 $S_\xi(X, \boldsymbol{x}^0)$ 的意义，可知，对任意小的

[1] f^0，g 曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的凹、凸性质取决于是从$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$方向还是从$-\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$方向上来定义. 本书使用的方向规定是在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处以 l_f 为横轴(方向任选)，以$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$方向为纵轴正方向的局部坐标系，故(e)图中 f^0 曲线上凸 g 曲线上凹.

正数 $\delta > 0$，任取 $\boldsymbol{x} \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap (X - \partial X)$，并作

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0}{\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0 \|} \in S_\xi(X, \boldsymbol{x}^0) \quad (\delta \to 0)$$

故

$$(N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap (X - \partial X)) \subset S_\xi(X, \boldsymbol{x}^0) \quad (\text{当 } \delta \to 0)$$

则若条件(c.1)成立并注意到(6.5.1.12)式，

$$S_\xi(X, \boldsymbol{x}^0) \subseteq Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{\delta \to 0} Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0, \delta)$$

所以就有

$$(N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap (X - \partial X)) \subseteq \lim_{\delta \to 0} Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0, \delta)$$

再由集合 $Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0, \delta)$的构造及意义即知，此时必有 $(\delta \to 0)$

$$\boldsymbol{x} \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap (X - \partial X) \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \lim_{\delta \to 0} Z_\beta^+(\boldsymbol{x}^0, \delta)$$

即

$$f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{x}^0)$$

成立. 所以，在 $\delta \to 0$ 的意义上，条件(c.1)成立⇒条件(b.1)成立.

其次，条件(c.2)⇔条件(b.2). 故知条件(c.1)、(c.2)成立，$\boldsymbol{x}^0$ 必是 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X$ 的极小值点. 条件(c.1～2)中的(6.5.1.16)、(6.5.1.18)式中的不等式若成立为严格不等式，这 2 个条件即给出了 $\boldsymbol{x}^0$ 成为 X 的严格局部极小值点的充要条件.

§6.5.2 局部极小值点的最优性条件

以下给出条件(c.1)、(c.2)的判别公式，从而导出 Kuhn - Tucker 条件的具体形式.

(Ⅰ) 条件(c.1)的判别式.

易知若 $\boldsymbol{x}^0$ 是 X 可行区域的局部极小值点，且 $\boldsymbol{x}^0$ 点处一阶约束品性成立，从而有

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) = S(X, \boldsymbol{x}^0)$$

成立，那么，条件(c.1)可表示为[1]

$$Z_\xi^1(\boldsymbol{x}^0) \subseteq Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0) \qquad \text{—(6.5.2.1)}$$

或等价地写成为

---

[1] 附带指出，可以将集合 $Z_\beta^f(\boldsymbol{x}^0)$ 理解为闭切锥 $S(X_f^+, \boldsymbol{x}^0)$.

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^{0})\boldsymbol{\xi} \geqslant 0 \quad \boldsymbol{\xi} \in Z_{\xi}^{1}(\boldsymbol{x}^{0}) \qquad \text{—(6.5.2.2)}$$

由线性化锥 $Z_{\xi}^{1}(\boldsymbol{x}^{0})$ 的构造以及 Farkas 引理的结论，就得到(P1)规划形式下的一个**一阶必要条件**：

设 $\boldsymbol{x}^{0}$ 是(P1)规划的解，$\boldsymbol{x}^{0}$ 点是正则的，并设一阶约束品性

$$Z^{1}(\boldsymbol{x}^{0}) = S(X, \boldsymbol{x}^{0})$$

成立，则存在向量 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = (\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_\nu})^{\mathrm{T}} \quad i_j \in I(\boldsymbol{x}^{0})$

$$\left.\begin{aligned} \nabla f(\boldsymbol{x}^{0}) &= \sum_{i_j \in I(\boldsymbol{x}^{0})} \omega_{i_j} \nabla g_{i_j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^{0}) \\ \omega_{i_j} &\geqslant 0 \quad i_j \in I(\boldsymbol{x}^{0}) \end{aligned}\right\} \qquad \text{—(6.5.2.3)}$$

■

与本章开始处所引的 Kuhn－Tucker 条件(一阶必要条件)相比较，这里给出的条件中没有了

$$\omega_i g_i(\boldsymbol{x}^{0}) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

这一条件. 在关于条件(c.2)的判别公式的推导中可以附带地得到这一条件. 但本书认为写出这一条件是多余的，并且还可能引起混淆.

这里要注意的是以上所给出的一阶必要条件所对应的是条件(c.1)即在 $\boldsymbol{x}^{0}$ 点处应成立的 $N_{\delta}(\boldsymbol{x}^{0}) \cap X$ 内点集合($\delta \to 0$ 时)上的最优性条件这一几何意义. 以下会理解，(6.5.2.3)式的重要意义不(仅)在于 $\nabla f(\boldsymbol{x}^{0})$ 向量是与 $\nabla g_{i_j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^{0})$，$i_j \in I(\boldsymbol{x}^{0})$ 向量组线性相关，而是在于 $\nabla f(\boldsymbol{x}^{0})$ 向量能被 $\nabla g_{i_j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^{0})$ 向量组以非负的线性组合方式表出，即 $\omega_{i_j} \geqslant 0$ 这一条件上. 同时，以上一阶条件中强调了 $\boldsymbol{x}^{0}$ 点的正则性(即 $\nabla f(\boldsymbol{x}^{0}) \neq 0$). 这是因为在内点最优条件(c.1)的几何意义下，必须保证乘子 $\boldsymbol{\omega}$ 向量不取为 $\boldsymbol{0}$ 向量才有其意义. 这一点与传统文献上的表述有所区别.

(Ⅱ) 条件(c.2)的判别式

由(6.5.2.3)式，$\nabla f(\boldsymbol{x}^{0})$ 与向量组 $\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^{0}) \quad i \in I(\boldsymbol{x}^{0})$ 是线性相关的，再由集合 $\hat{Z}^{1}(\boldsymbol{x}^{0})$ 的定义，任一 $\boldsymbol{z} \neq 0 \quad \boldsymbol{z} \in \hat{Z}^{1}(\boldsymbol{x}^{0})$，有

$$\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^{0})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \quad i \in I(x^{0})$$

且也必有

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^{0})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{z} \in \hat{Z}^{1}(\boldsymbol{x}^{0})$$

因此，由任一 $i \in I(\boldsymbol{x}^{0})$，

$$\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^{0})\boldsymbol{z} = 0$$

决定的 $g_i(\boldsymbol{x}) = 0$ 边界曲面在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{0}$ 点处的切平面的交集合 $\hat{Z}^{1}(\boldsymbol{x}^{0})$ 刚好就位于

$$f^0: f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}^0)$$

决定的目标函数等值曲面在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 处的切平面

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{z} = 0$$

之上. $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$是 f^0 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切平面上的一个子集合.

由本章上一节的分析,若设 $\boldsymbol{x}^0$ 点处二阶约束品性(Ⅰ)成立,那么,任一 $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$ $\boldsymbol{z} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 的方向向量,都是某一条 $\boldsymbol{x}(\theta; i_1, i_2, \cdots, i_r)$交曲线在 $\theta = 0$ 处的切方向向量,其中下标 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 是 $I(\boldsymbol{x}^0)$集合中的子列. 显然,这样的 $\boldsymbol{x}(\theta; i_1, i_2, \cdots, i_r)$曲线由二阶约束品性(Ⅰ)的条件是属于可行区域 X 的,它又是 X 的边界点所组成,这由 $\boldsymbol{x}(\theta; i_1, i_2, \cdots, i_r)$是由 $g_{i_j}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, r$ 方程组所构造即可知. 所以,这样的交曲线 $\boldsymbol{x}(\theta; i_1, i_2, \cdots, i_r) \subset \partial X(\theta \in [0, \varepsilon])$.

由以上的分析及条件(c.2)的要求,当 $\boldsymbol{x}^0$ 是 X 的局部极小值点,$\boldsymbol{x}^0$ 就必然是 $\boldsymbol{x}(\theta; i_1, i_2, \cdots, i_r)$曲线上的局部极小值. 以下推导出 $\boldsymbol{x}^0$ 作为 $\boldsymbol{x}(\theta; i_1, i_2, \cdots, i_r)$曲线上的局部极小值点的必要条件.

设 $\boldsymbol{x}^0$ 点处(6.5.2.3)式表示的一阶必要条件成立,且二阶约束品性(Ⅰ)成立.

以下所使用的方法,可以称为**投影函数方法**. 之所以要先利用"**投影函数方法**"来建立对应于条件(c.2)所要求的判别公式,是因为从这一方法中刚好可推导出 Lagrange 乘子法以及 Lagrange 函数本身.

为简化下标,对于构造 $\boldsymbol{x}(\theta; i_1, i_2, \cdots, i_r)$的下标子列,设经过重新编号,可成为 $1, 2, \cdots, r$ 子列并简写 $\boldsymbol{x}(\theta; \cdots)$为 $\boldsymbol{x}(\theta)$. 这即表示 Jacobi 矩阵 $G(\boldsymbol{x}^0)$的前 r 个行向量是线性无关的,并进一步设 $G(\boldsymbol{x}^0)$的前 $r \times r$ 阶顺序主子矩阵可逆. 这里 $r = \mathrm{rank}(G(\boldsymbol{x}^0))$.

由$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$构造以下集合

$$Z_\alpha(\boldsymbol{x}^0) = \{(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}, z) \mid \boldsymbol{\alpha} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0), z \in R\} \subset R^{m+1}$$

注意$(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}, z)$是 $m+1$ 维向量[1].

可知若记 $\Lambda(\boldsymbol{x}^0)$是

$$G(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$$

的基础解系矩阵,

---

[1] 由于以下分析中符号 z 用以表示目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的值,故以示区别,现改用符号 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合中的方向向量 $\boldsymbol{z}$.

$$\Lambda(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} -G_{r\times r}^{-1}(\boldsymbol{x}^0)\cdot G\begin{Bmatrix}1,\ 2,\ \cdots,\ r\\ r+1,\ r+2,\ \cdots,\ m\end{Bmatrix}(\boldsymbol{x}^0) \\ I_{(m-r)} \end{bmatrix} \quad —(6.4.2.27)$$

可将 $\boldsymbol{\alpha}\in\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 表示成

$$\boldsymbol{\alpha}=\Lambda\boldsymbol{h}\quad \boldsymbol{h}=(h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_{(m-r)})^{\mathrm{T}}\in R^{m-r} \quad —(6.5.2.4)$$

注意在这样构造出来的 $\boldsymbol{\alpha}$ 向量中，其分量

$$\alpha_{r+j}=h_j\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-r$$

由此知 $Z_a(\boldsymbol{x}^0)$ 实际上是 $m-r+1$ 个 $(m+1)$ 维向量张成的线性子空间，且 $Z_a(\boldsymbol{x}^0)$ 与 f^0 等值曲面及 $\boldsymbol{x}(\theta;\ 1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ 交曲线均在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处相切.

对任取的向量 $\boldsymbol{h}\neq\boldsymbol{0}$，令 $\boldsymbol{x}$ 的分量

$$x_{r+j}=x_{r+j}^0+h_j\theta\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-r\quad \theta\geqslant 0 \quad —(6.5.2.5)$$

如上一节所分析，可由

$$g_i(\boldsymbol{x})=0\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$$

在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域决定

$$x_i=X_i(x_{r+1},\ x_{r+2},\ \cdots,\ x_m)\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ r \quad —(6.5.2.6)$$

这等于是构造了上一节中的交曲线函数 $\boldsymbol{x}(\theta)$，只是使用的符号为了以下推导的清晰起见而略有变动.

将这样确定的 $x_j\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$ 代入 $f(\boldsymbol{x})$ 函数，可有

$$z=f(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_r,\ x_{r+1},\ x_{r+2},\ \cdots,\ x_m) \quad —(6.5.2.7)$$

易知，上式可写为

$$z=z(\theta)=f(\boldsymbol{h}\theta) \quad —(6.5.2.8)$$

现在 $z(\theta)$ 函数是参数化的，它是 $f(\boldsymbol{x})$ 由方向向量 $\boldsymbol{h}$ 决定的一个方向上的函数.

其次，对于所取的 $\boldsymbol{h}$ 向量，作

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{\alpha}\qquad \boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})=\Lambda(\boldsymbol{x}^0)\cdot\boldsymbol{h} \quad —(6.5.2.9)$$

并记

$$\boldsymbol{x}(\theta)=(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_r,\ x_{r+1},\ x_{r+2},\ \cdots,\ x_m)^{\mathrm{T}} \quad —(6.5.2.10)$$

以及

$$l_0=\|\boldsymbol{x}(\theta)-\boldsymbol{x}^0\|\qquad l_a=\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}^0\|=\|\boldsymbol{\alpha}\|$$

若记 φ 为向量 $(\boldsymbol{x}(\theta)-\boldsymbol{x}^0)$ 与 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}^0)$ 之间的夹角，那么，

$$\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{x}(\theta)-\boldsymbol{x}^0)^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}^0)}{l_0\cdot l_a}\qquad —(6.5.2.11)$$

构造 $t(\theta)$ 函数，

$$t=t(\theta)=l_0\cdot\cos\varphi=(\boldsymbol{x}(\theta)-\boldsymbol{x}^0)^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\qquad —(6.5.2.12)$$

$t(\theta)$是由 $\boldsymbol{h}$ 向量决定的从 $\boldsymbol{x}^0$ 点出发的射线，且这一射线位于

$$\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}=0\qquad i\in I(\boldsymbol{x}^0)$$

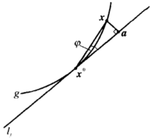


图 6.5.2.1

决定的各约束函数在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切平面的交集合上. 其几何意义如图 6.5.2.1. 其中 g 为 $\boldsymbol{x}(\theta)$决定的交曲线，l_f 是 g 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的切线. 该切线即由 $\boldsymbol{h}$ 方向向量决定. $\boldsymbol{x}$ 是 g 上的一点，则 l_f 上的线段 $\overline{\boldsymbol{x}^0\boldsymbol{a}}=t$.

由(6.5.2.8)、(6.5.2.12)式，便可建立参数方程组

$$\begin{cases}z=z(\theta)\\ t=t(\theta)\end{cases}\Leftrightarrow z=z(t)\qquad —(6.5.2.13)$$

这一方程组所代表的是 $z=z(t)$ 方程所决定的曲线. $z(t)$曲线由以上所分析的 t 的几何意义，是将 $z(\theta)$曲线投影到了 $Z_a(\boldsymbol{x}^0)$空间上的曲线. 由本书多处均使用的截平面方法，对于给定的方向向量 $\boldsymbol{h}$，等价于在 $Z_a(\boldsymbol{x}^0)$取出了一个截平面，并且，在这个截平面上建立了 Otz 坐标系. 其中可将 t 轴理解为横坐标轴，t 轴即是以图 6.5.2.1 所指的$\overline{\boldsymbol{x}^0\boldsymbol{a}}$线段. 纵轴是 z 轴. 由上文的规定，z 轴用以表示目标函数 $f(\boldsymbol{x})$的值. Otz 坐标系的原点在$\boldsymbol{x}^0$ 处.

由以上投影关系即知，若 $\boldsymbol{x}^0$ 是 $f(\boldsymbol{x})$在交曲线 g 上的局部极小值点，那么，$\boldsymbol{x}^0$ 必定也要是 $f(\boldsymbol{x})$的投影函数 $z(t)$上的局部极小值点.

显然，$z(t)$函数与 $f(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\theta)$ 函数是 0 阶等价的. 这里“0 阶等价”的意思是

$$z(0)=z(t)\mid_{t=0}\Leftrightarrow\begin{cases}z=z(\theta)\\ t=t(\theta).\end{cases}\theta=0\Rightarrow z(0)=f(\boldsymbol{x}^0)$$

再由参数方程求导法，从(6.5.2.12)式中有，

$$t'=\frac{\mathrm{d}t(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}\theta}+\sum_{j=1}^{m-r}\alpha_{r+j}h_j\right)\Big/\|\boldsymbol{\alpha}\|\qquad —(6.5.2.14)$$

由(6.5.2.5)式、(6.5.2.6)式，

$$\frac{dX_i}{d\theta} = \sum_{j=1}^{m-r} \frac{\partial X_i}{\partial x_{r+j}} h_j \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

由本章上一节关于隐函数定理的分析及(6.4.2.8)式、(6.4.2.4)式，若记

$$\Lambda(\boldsymbol{x}^0) = [\alpha_{ij}]_{m\times(m-r)}$$

那么，
$$\frac{\partial x_i}{\partial x_{r+j}} = \frac{\partial X_i}{\partial x_{r+j}} = \alpha_{ij} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \cdots, r \\ j = 1, 2, \cdots, m-r \end{matrix}$$

再由
$$\boldsymbol{\alpha} = \Lambda(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{h} \Rightarrow \alpha_i = \sum_{j=1}^{m-r} \alpha_{ij} h_j$$

在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 点处可得

$$\frac{dX_i}{d\theta} = \sum_{j=1}^{m-r} \alpha_{ij} h_j = \alpha_i$$

这里附带地得到
$$\sum_{j=1}^{m-r} \frac{\partial X_i}{\partial x_{r+j}} h_j = \alpha_i \qquad —(6.5.2.15)$$

另注意到 $\alpha_{r+j} = h_j$ 的关系，将以上结果代入 t' 的(6.5.2.14)式，有

$$t'(0) = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 + \sum_{j=1}^{m-r} \alpha_{r+j}^2\right) \Big/ \|\boldsymbol{\alpha}\| = \|\boldsymbol{\alpha}\| \qquad —(6.5.2.16)$$

再由

$$z' = \frac{dz(\theta)}{d\theta} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \left(\sum_{j=1}^{m-r} \frac{\partial X_i}{\partial x_{r+j}} h_j\right) + \sum_{j=1}^{m-r} \frac{\partial f}{\partial x_{r+j}} h_j \qquad —(6.5.2.17)$$

故在 $\theta = 0$ 处，有

$$z'(0) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_i} \alpha_i + \sum_{j=1}^{m-r} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_{r+j}} \alpha_{r+j} = \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} \qquad —(6.5.2.18)$$

所以，当 $\boldsymbol{x}^0$ 点满足一阶必要条件，即(6.5.2.3)式成立，再由 $\boldsymbol{\alpha} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 的性质，即知在 $z(t)$ 曲线上，

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = \frac{z'(0)}{t'(0)} = \frac{\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|} = 0 \qquad —(6.5.2.19)$$

(6.5.2.19)式表示在 $z(t)$ 曲线上，$\boldsymbol{x}^0$ 点也满足成为投影曲线的局部极小值点的一阶必要条件. 这个性质可称为 $z(t)$ 投影曲线与 $f(\boldsymbol{x}(\theta))$ 曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处具有 $\boldsymbol{x}^0$ 点为局部极小值点时的 1 阶等价性.

由于方向向量 $\boldsymbol{h} \in R^{m-r}$ 是随意的，由(6.5.2.9)式

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \cdot \Lambda(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{h} = 0$$

应有

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\Lambda(\boldsymbol{x}^0)=0 \qquad —(6.5.2.20)$$

由基础解系矩阵 $\Lambda(\boldsymbol{x}^0)$的构造，从上式可得在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0$ 处，

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2},\ \cdots,\ \frac{\partial f}{\partial x_r}\right]G_{r\times r}^{-1}(\boldsymbol{x}^0)\cdot G\begin{Bmatrix}1,\ 2,\ \cdots,\ r\\ r+1,\ r+2,\ \cdots,\ m\end{Bmatrix}(\boldsymbol{x}^0)$$

$$=\left[\frac{\partial f}{\partial x_{r+1}},\ \frac{\partial f}{\partial x_{r+2}},\ \cdots,\ \frac{\partial f}{\partial x_m}\right] \qquad —(6.5.2.21)$$

由于已设 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\neq 0$，故由以上关系可知在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0$ 处，

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2},\ \cdots,\ \frac{\partial f}{\partial x_r}\right]\neq\mathbf{0} \qquad —(6.5.2.22)$$

由此知可记

$$[G_{r\times r}^{-1}(\boldsymbol{x}^0)]^{\mathrm{T}}\cdot\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_r}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \vdots\\ \omega_r\end{bmatrix}=\boldsymbol{\omega}_r\neq\mathbf{0} \qquad —(6.5.2.23)$$

由(6.5.2.23)式，现 $\boldsymbol{\omega}_r$ 是唯一的，并且(6.5.2.23)式也给出了 $\boldsymbol{\omega}_r$ 乘子(即 Lagrange 乘子)的又一种表示. 从而可知，有

$$G^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix}1,\ 2,\ \cdots,\ r\\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m\end{Bmatrix}(\boldsymbol{x}^0)\cdot\boldsymbol{\omega}_r=\nabla f(\boldsymbol{x}^0) \qquad —(6.5.2.24)$$

成立.

注意(6.5.2.23)式只决定了 $\boldsymbol{\omega}_r$ 向量不可能为 **0** 向量，并没有给予 $\boldsymbol{\omega}_r$ 符号的限制要求. (6.5.2.24)式则是对于本章 §2 节关于 Lagrange 乘子基向量的分析给予了一个解释. 易知 $\boldsymbol{\omega}_r$ 向量其实是与上面所说的 $G(\boldsymbol{x}^0)$矩阵中的极大线性无关(行)向量组$\nabla g_{i_j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$的下标子列 i_j 的选取有关. 故可记为是

$$\boldsymbol{\omega}_r=\boldsymbol{\omega}_r(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_r)$$

从而可以有以下结论.

设 $\operatorname{rank}(G(\boldsymbol{x}^0))=r$, $\nabla g_{i_j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$ $j=1,\ 2,\ \cdots,\ r$ 是 $G(\boldsymbol{x}^0)$中的极大线性无关(行)向量组，在 $\boldsymbol{x}^0$ 邻域由 $g_{i_j}(\boldsymbol{x})=0$ 决定的交曲线 $\boldsymbol{x}(\theta;\ i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_r)\subset X$ $\theta\in[0,\ \varepsilon]$，那么，当 $\boldsymbol{x}^0$ 是 $\boldsymbol{x}(\theta)$曲线上的局部极小值点，任取 $G(\boldsymbol{x}^0)$矩阵的

可逆子矩阵

$$G\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ j_1, j_2, \cdots, j_r \end{Bmatrix}(\boldsymbol{x}^0)$$

则必有 r 维向量 $\boldsymbol{\omega}_r(i_1, i_2, \cdots, i_r) \neq 0$，使

$$G^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ 1, 2, \cdots, m \end{Bmatrix}(\boldsymbol{x}^0) \cdot \boldsymbol{\omega}_r(i_1, i_2, \cdots, i_r) = \nabla f(\boldsymbol{x}^0)$$

其中 $$\boldsymbol{\omega}_r(i_1, i_2, \cdots, i_r) = \left[G^{-1}\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_r \\ j_1, j_2, \cdots, j_r \end{Bmatrix}(\boldsymbol{x}^0)\right]^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_{j_1}} \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_{j_2}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_{j_r}} \end{bmatrix}$$

—(6.5.2.25)

并且，$\boldsymbol{\omega}_r(i_1, i_2, \cdots, i_r)$的值与列下标(子列)$j_1, j_2, \cdots, j_r$ 的选取无关.

例 6.5.2.1 由例 6.1.1 的数值验证(6.5.2.23)式.

由那里的数值实例，$\boldsymbol{x}^0$ 点处，$I(\boldsymbol{x}^0) = \{1, 2, 3\}$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla g_1(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla g_3(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jacobi 矩阵 G 的秩 $r = 2$. 易知

$$\boldsymbol{\omega}_r(1, 2) = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

同理知

$$\boldsymbol{\omega}_r(1, 3) = \boldsymbol{\omega}_r(1, 2) \quad \boldsymbol{\omega}_r(2, 3) = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{6}{11} \end{bmatrix}$$

这一结果就是例 6.1.1 中的结果.

(6.5.2.25)式表明，可有以下条件.

X 可行区域在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域边界交曲线上的一阶必要条件：

设 Jacobi 矩阵 $G(\boldsymbol{x}^0)$ 的秩为 r，任取$\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$的下标子列 i_j, $j=1, 2, \cdots, r$，若$\nabla g_{i_j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$向量组是线性无关的，且

$$g_{i_j}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, r$$

可决定在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域内的交曲线 $\boldsymbol{x}(\theta; i_1, i_2, \cdots, i_r)$, $\theta \in [0, \varepsilon]$，则 $\boldsymbol{x}^0$ 是 $\boldsymbol{x}(\theta; i_1, i_2, \cdots, i_r)$曲线上的局部极小值点的一阶必要条件是(6.5.2.25)式成立. ■

换句话说，在 Jacobi 矩阵 $G(\boldsymbol{x}^0)$中所能构造出的所有这样的交曲线 $\boldsymbol{x}(\theta; i_1, i_2, \cdots, i_r) \subset X$, $\theta \in [0, \varepsilon]$ 所对应的

$$\boldsymbol{\omega}_r(i_1, i_2, \cdots, i_r)$$

向量全体就是使

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \sum_{i=1}^{v} \omega_i \nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)$$

成立的全部基乘子向量.

记

$$\Phi_\omega^0 = \{\boldsymbol{\omega}_r \mid \boldsymbol{\omega}_r = \boldsymbol{\omega}_r(i_1, \cdots, i_r),\ j = 1, 2, \cdots, r,\ i_j \in I(\boldsymbol{x}^0)\quad \nabla g_{i_j}(\boldsymbol{x}^0) \text{ 线性无关}\}$$

显然，当(P1)规划的约束条件由不等式变为**等式**时，$\boldsymbol{x}^0 \subset X$ 是极小值点的一阶必要条件就是以上的“边界交曲线上的一阶必要条件”. 此时 $\boldsymbol{\omega}_r$ 向量没有符号要求. $\boldsymbol{\omega}_r$ 向量全体集合就是基向量(矩阵)Φ_ω^0.

当(P1)规划的约束条件为不等式时，则由条件(**c.1**)即对于 X 可行区域内点集合上的最优性要求，则产生了(6.5.2.3)式的一阶必要条件，在这一条件中，对 $\boldsymbol{\omega}_r$ 乘子向量给予了非负的要求. 而(6.5.2.25)式则在(6.5.2.3)式成立的条件下，说明了乘子向量可由一组线性无关的$\nabla g_{i_j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$向量决定. 综合起来就有，本章§2 节中的基乘子向量(矩阵)

$$\Phi_\omega = \{\boldsymbol{\omega}_r \mid \boldsymbol{\omega}_r \in \Phi_\omega^0,\ \boldsymbol{\omega}_r \geqslant \mathbf{0}\} \subset \Phi_\omega^0$$

在投影曲线 $z(t)$上的 $\boldsymbol{x}^0$ 点作为局部极小值点的二阶充分条件.

这一条件显然是要求在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 处成立

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0} \geqslant 0 \quad \left(\text{且}\frac{\mathrm{d}^2 z(0)}{\mathrm{d}t^2} = 0 \Rightarrow z(t) = \text{常数，当}|t|\text{充分小}\right)$$

可以把这一条件理解为在局部极小值点 $\boldsymbol{x}^0$ 处，$z(t)$与 $f(\boldsymbol{x}(\theta))$应具有的 2 阶等价性质. 由于

$$\frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{z''t'-t''z'}{(t')^3}$$

且由上已知 $t'=\|\boldsymbol{\alpha}\|\neq 0$（当 $\boldsymbol{\alpha}\neq 0$），并易知 t''、z''存在以及 $z'(0)=0$，故

$$\frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{z''}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}$$

所以在 $z(t)$上的二阶充分条件是

$$z''(\theta)\mid_{\theta=0}\geqslant 0$$

由(6.5.2.17)式、(6.5.2.16)式，

$$\begin{aligned}z''(0)=\frac{\mathrm{d}^2 z(0)}{\mathrm{d}\theta^2}&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_i}\alpha_k\alpha_i+\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m-r}\frac{\partial^2 f}{\partial x_{r+k}\partial x_i}h_k\alpha_i+\\&+\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial f}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{m-r}\sum_{k=1}^{m-r}\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_{r+k}\partial x_{r+j}}h_kh_j+\sum_{j=1}^{m-r}\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_{r+j}}\alpha_ih_j+\\&+\sum_{j=1}^{m-r}\sum_{k=1}^{m-r}\frac{\partial^2 f}{\partial x_{r+k}\partial x_{r+j}}h_kh_j\end{aligned}$$

所有偏导数均在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处取值，并注意到 $\alpha_{r+j}=h_j$ 的关系. 上式可写成为

$$z''(0)=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}+\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial f}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{m-r}\sum_{k=1}^{m-r}\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_{r+k}\partial x_{r+j}}h_kh_j \qquad —(6.5.2.26)$$

注意这里的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 X_i}{\partial x_{r+k}\partial x_{r+j}}$ 就是(6.4.2.35)式中的 $\dfrac{\partial^2 x_i}{\partial x_{r+s}\partial x_{r+k}}$，故引用(6.4.2.37)式，并代入到上式等号右边的第二项，可表示成

$$\begin{aligned}z''(0)-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}&=\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\cdot\sum_{j=1}^{m-r}\sum_{k=1}^{m-r}\nabla^2\boldsymbol{x}_{j,k}^{r}\cdot h_kh_j\\&=-\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\cdot G_{r\times r}^{-1}(\boldsymbol{x}^0)\cdot\end{aligned}$$

$$\cdot\sum_{j=1}^{m-r}\sum_{k=1}^{m-r}\left[\nabla^2\boldsymbol{g}^{j,k}+\nabla^2 g_{j,r}\nabla\boldsymbol{x}_k^r+\nabla^2 g_{k,r}\nabla\boldsymbol{x}_j^r+\begin{bmatrix}(\nabla\boldsymbol{x}_j^r)^{\mathrm{T}}\nabla^2 g_{r\times r}^1\nabla\boldsymbol{x}_k^r\\(\nabla\boldsymbol{x}_j^r)^{\mathrm{T}}\nabla^2 g_{r\times r}^2\nabla\boldsymbol{x}_k^r\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\(\nabla\boldsymbol{x}_j^r)^{\mathrm{T}}\nabla^2 g_{r\times r}^r\nabla\boldsymbol{x}_k\end{bmatrix}\right]h_kh_j$$

—(6.5.2.27)

注意(6.4.2.35)～(6.4.2.37)式的各缩写符号的意义，有

$$\sum_{j=1}^{m-r}\nabla x_j^r h_j=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{m-r}\frac{\partial X_1}{\partial x_{r+j}}h_j\\ \sum_{j=1}^{m-r}\frac{\partial X_2}{\partial x_{r+j}}h_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{m-r}\frac{\partial X_r}{\partial x_{r+j}}h_j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_r\end{bmatrix}\qquad —(6.5.2.28)$$

所以

$$\sum_{j=1}^{m-r}\sum_{k=1}^{m-r}\begin{bmatrix}(\nabla \boldsymbol{x}_j^r)^{\mathrm{T}}\,\nabla^2 g_{r\times r}^1\,\nabla \boldsymbol{x}_k^r\\ (\nabla \boldsymbol{x}_j^r)^{\mathrm{T}}\,\nabla g_{r\times r}^2\,\nabla \boldsymbol{x}_k^r\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\nabla \boldsymbol{x}_j^r)^{\mathrm{T}}\,\nabla g_{r\times r}^r\,\nabla \boldsymbol{x}_k^r\end{bmatrix}\cdot h_k h_j=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(r)\,\nabla^2 g_{r\times r}^1\boldsymbol{\alpha}(r)\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(r)\,\nabla^2 g_{r\times r}^2\boldsymbol{\alpha}(r)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(r)\,\nabla^2 g_{r\times r}^r\boldsymbol{\alpha}(r)\end{bmatrix}\qquad —(6.5.2.29)$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}(r)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)^{\mathrm{T}}$$

$$\sum_{j=1}^{m-r}\sum_{k=1}^{m-r}\nabla^2 g_{k,r}\,\nabla \boldsymbol{x}_j^r h_k h_j=\sum_{k=1}^{m-r}\nabla^2 g_{k,r}h_k\cdot\boldsymbol{\alpha}(r)\qquad —(6.5.2.30)$$

注意

$$\nabla^2 g_{k,r}=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_{r+k}\partial x_1} & \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_{r+k}\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_{r+k}\partial x_r}\\ \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_{r+k}\partial x_1} & \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_{r+k}\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_{r+k}\partial x_r}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial^2 g_r}{\partial x_{r+k}\partial x_1} & \frac{\partial^2 g_r}{\partial x_{r+k}\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 g_r}{\partial x_{r+k}\partial x_r}\end{bmatrix}$$

再引用缩写符号

$$\nabla^2 g_{(m-r)\times r}^i=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_{r+1}\partial x_1} & \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_{r+1}\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_{r+1}\partial x_r}\\ \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_{r+2}\partial x_1} & \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_{r+2}\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_{r+2}\partial x_r}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_m\partial x_1} & \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_m\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_m\partial x_r}\end{bmatrix}$$

则(6.5.2.30)式可写成为

$$\sum_{k=1}^{m-r} \nabla^2 g_{k,\cdot r} h_k \cdot \boldsymbol{\alpha}(r) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \nabla^2 g^1_{(m-r)\times r} \boldsymbol{\alpha}(r) \\ \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \nabla^2 g^2_{(m-r)\times r} \boldsymbol{\alpha}(r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \nabla^2 g^r_{(m-r)\times r} \boldsymbol{\alpha}(r) \end{bmatrix} \quad \text{—(6.5.2.31)}$$

同理可有

$$\sum_{j=1}^{m-r} \sum_{k=1}^{m-r} \nabla^2 g_{j,\cdot r} \nabla \boldsymbol{x}_k^r h_k h_j = \sum_{j=1}^{m-r} \nabla^2 g_{j,\cdot r} h_j \boldsymbol{\alpha}(r) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(r) \nabla^2 g^1_{r\times(m-r)} \boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(r) \nabla^2 g^2_{r\times(m-r)} \boldsymbol{h} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(r) \nabla^2 g^r_{r\times(m-r)} \boldsymbol{h} \end{bmatrix}$$

—(6.5.2.32)

其中

$$\nabla^2 g^i_{r\times(m-r)} = (\nabla^2 g^i_{(m-r)\times r})^{\mathrm{T}}$$

其次还可以有

$$\sum_{j=1}^{m-r} \sum_{k=1}^{m-r} \nabla^2 \boldsymbol{g}^{j,\cdot k} h_k h_j = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \nabla^2 g^1_{(m-r)\times(m-r)} \boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \nabla^2 g^2_{(m-r)\times(m-r)} \boldsymbol{h} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \nabla^2 g^r_{(m-r)\times(m-r)} \boldsymbol{h} \end{bmatrix} \quad \text{—(6.5.2.33)}$$

其中

$$\nabla^2 g^i_{(m-r)\times(m-r)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 g_i}{\partial x_{r+1} \partial x_{r+1}} & \dfrac{\partial^2 g_i}{\partial x_{r+1} \partial x_{r+2}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 g_i}{\partial x_{r+1} \partial x_m} \\ \dfrac{\partial^2 g_i}{\partial x_{r+2} \partial x_{r+1}} & \dfrac{\partial^2 g_i}{\partial x_{r+2} \partial x_{r+2}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 g_i}{\partial x_{r+2} \partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 g_i}{\partial x_m \partial x_{r+1}} & \dfrac{\partial^2 g_i}{\partial x_m \partial x_{r+2}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 g_i}{\partial x_m \partial x_m} \end{bmatrix}$$

将(6.5.2.29)～(6.5.2.33)式代入(6.5.2.27)式，并可知应有

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(r) \nabla^2 g^i_{r\times r} \boldsymbol{\alpha}(r) + \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \nabla^2 g^i_{(m-r)\times r} \boldsymbol{\alpha}(r) + \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(r) \nabla^2 g^i_{r\times(m-r)} \boldsymbol{h} + \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \nabla^2 g^i_{(m-r)\times(m-r)} \boldsymbol{h}$$

$$= \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \nabla^2 g^i_{r\times r} & \nabla^2 g^i_{r\times(m-r)} \\ \nabla^2 g^i_{(m-r)\times r} & \nabla^2 g^i_{(m-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \nabla^2 g_i(\boldsymbol{x}^0) \boldsymbol{\alpha}$$

以及(6.5.2.23)式，便有

$$z''(0)-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\omega}_r^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\nabla^2 g_1(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\nabla^2 g_2(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\nabla^2 g_r(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}\end{bmatrix}$$

所以

$$z''(0)=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\left[\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)-\sum_{i=1}^{r}\omega_i\nabla^2 g_i(\boldsymbol{x}^0)\right]\boldsymbol{\alpha}\qquad—(6.5.2.34)$$

因此，在投影目标函数 $z(t)$ 上，$\boldsymbol{x}^0$ 为局部极小值点的充分条件就是

$$z''(0)\geqslant 0\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\left[\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)-\sum_{i=1}^{r}\omega_i\nabla^2 g_i(\boldsymbol{x}^0)\right]\boldsymbol{\alpha}\geqslant 0\quad—(6.5.2.35)$$

但由(6.5.2.4)式，决定 $\boldsymbol{\alpha}$ 的方向向量 $\boldsymbol{h}\in R^{m-r}$ 是任取的，且全部任取的 $\boldsymbol{h}\in R^{m-r}$ $\boldsymbol{h}\neq\boldsymbol{0}$ 所决定的 $\boldsymbol{\alpha}$ 向量(全体)刚好就是 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合，所以，便知在 $\boldsymbol{x}^0$ 是(P1)规划的所有如 $\boldsymbol{x}(\theta;\ i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_r)\subset X$ 决定的**交曲线上的局部极小值点的二阶充分条件**是对于任一不为 0 的 $\boldsymbol{\alpha}\in\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 成立

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\left[\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)-\sum_{i=1}^{r}\omega_i\nabla^2 g_i(\boldsymbol{x}^0)\right]\boldsymbol{\alpha}\geqslant 0\qquad\boldsymbol{\alpha}\in\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)\qquad—(6.5.2.36)$$

■

至此，实际上已经导出了本章一开始所引的非线性规划中的广义 Kuhn-Tucker 条件和二阶(必要)最优条件. 但在继续分析之前，先利用以上的结果导出 Lagrange 函数及乘子法，并说明其几何意义.

在本章开始处已经指出，Lagrange 函数的导出及其意义在传统的约束最优分析中(似乎)是存在含糊的问题. 而由以上的分析，从(6.5.2.3)式到(6.5.2.36)式，可知对任取的 $\boldsymbol{h}\in R^{m-r}$ 可决定 $\boldsymbol{\alpha}\in\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 并由此决定投影函数 $z(t)$，且 $z(t)$ 的图像在 $Z_\alpha(\boldsymbol{x}^0)$ 线性子空间，$z(t)$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 沿 $\boldsymbol{x}(\theta)\subset X$ 边界曲线上的局部极小值意义上与 $f(\boldsymbol{x}(\theta))$ 曲线具有 0 阶、1 阶、2 阶等价性质，同时可知若构造以下函数

$$L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\omega}_r)=f(\boldsymbol{x})-\sum_{i=1}^{r}\omega_i\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\qquad i\in I(\boldsymbol{x}^0)\quad—(6.5.2.37)$$

显然 $L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\omega}_r)$ 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\theta;\ 1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ 曲线上的图像，在 $\boldsymbol{x}^0$ 是 $f(\boldsymbol{x}(\theta))$ 曲线的局部极小值点时，令 $\boldsymbol{\omega}_r$ 满足(6.5.2.23)式，那么，$L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\omega}_r)$ 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0$ 处与 $z(t)$ 的图像也具有 0 阶、1 阶、2 阶等价性质，因此利用 $L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\omega}_r)$ 函数便可以直接

地利用(6.5.2.3)式、(6.5.2.36)式用以判断 $\boldsymbol{x}^0$ 是否能够成为 X 的局部极小值点. 这就是 Lagrange 乘子法的由来. 事实上，当我们将 $Z_a(\boldsymbol{x}^0)$ 看成是原点在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的 R^{m-r+1} 维坐标超平面 $Oh_1h_2\cdots h_{m-r}z$ 那么，对任取的 $\boldsymbol{h}\in R^{m-r}$，当 $\boldsymbol{x}$ 沿 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 边界曲线移动时所决定的 $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}_r)$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处与 $z(t)$ 曲线相切，并且 $f(\boldsymbol{x}(\theta))$ 曲线也在 $\boldsymbol{x}^0$ 点与 $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}_r)$、$z(t)$ 曲线相切，同时，由于 $\boldsymbol{x}(\theta)\subset X$ 从而 $g_i(\boldsymbol{x}(\theta))=0\quad \theta\in[0,\epsilon]$，$i\in I(\boldsymbol{x}^0)$，故 $L(\boldsymbol{x}(\theta),\boldsymbol{\omega}_r)$ 曲线与 $f(\boldsymbol{x}(\theta))$ 曲线是重合的.

从几何意义上讲，可以有图 6.5.2.2. 其中，设 $g_i(\boldsymbol{x})$ 都是 Ox_1x_2 坐标平面上的函数. 在图(Ⅱ)中，g 是 X 的边界曲线(由 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 所决定). g 上的 $\boldsymbol{x}^0$ 是 X 的局部极小值点. 避免三维作图，将 $f(\boldsymbol{x})$ 沿 g 曲线上的值以与 g 曲线垂直方向的距离直接标注在图(Ⅱ)上. 这里设 $f(\boldsymbol{x}(\theta))>0$ 标在 g 曲线的上方：

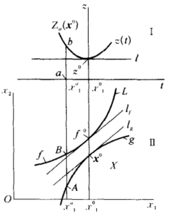


图 6.5.2.2

现在用图(Ⅰ)表示 $Z_a(\boldsymbol{x}^0)$ 空间，并在其上建立 Otz 坐标系. Otz 的原点在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处(为方便起见，Otz 原点与 $\boldsymbol{x}^0$ 的分量 x_1^0 对齐，并使 t 轴与 x_1 轴平行，这相当于将图(Ⅱ)中 g 曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切线 l_g 上的点投影到 x_1 轴上). 将图(Ⅱ)中 f 曲线与 g 曲线间的距离对应到图(Ⅰ)的 Otz 坐标系上，如 x_1^a 处 f、g 曲线间的距离是 $\overline{AB}$，便可决定图(Ⅰ)中 x_1^a 点处的 $\overline{ab}$ 线段，从而得 b 点，b 点就是 $z(t)$ 曲线上的点. 以这种方法便可决定图(Ⅰ)上的 $z(t)$ 曲线. 由上述的分析，应注意

$$L=f-g$$

的意义，故图(Ⅰ)中的 z 曲线同时就是 Lagrange 函数沿 g 曲线上的图像.

那么，由以上的作图法即知，$z(t)$ 曲线与 f 曲线在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的 0 阶等价是指

$$z^0=z(0)=f(\boldsymbol{x}^0)=\overline{\boldsymbol{x}^0 f^0}$$

$z(t)$ 曲线与 f 曲线的 1 阶等价性是指 z^0 是 $z(t)$ 曲线的极小值点，从而 $\dfrac{\mathrm{d}z(0)}{\mathrm{d}t}=0\Rightarrow z(t)$ 曲线在 x_1^0 点(即 $\boldsymbol{x}^0$ 点处)的切线 l 是水平线(见图 6.5.2.2(Ⅰ)).

f^0 是 f 曲线上的极小值点，故 f、g 曲线在 f^0、$\boldsymbol{x}^0$ 点处的切线应是平行的，如图 6.5.2.2(Ⅱ)中的 l_f、l_g 切线. 从而，

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=\boldsymbol{\omega}\nabla g\Rightarrow\nabla_x L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\omega}_r)=0$$

这就是(6.5.2.3)式.

$z(t)$曲线与 f 曲线的 2 阶等价性是指在 z^0 点处，$z(t)$曲线是上凹的$\Rightarrow$ $\dfrac{dz(0)}{dt^2}\geqslant 0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}_r)\boldsymbol{\alpha}\geqslant 0$（或 $z(t)$在 $t=0$ 附近为常数）；在 f^0点处，f 曲线是沿 g 曲线递增的，而从以上的分析易见 $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}_r)$曲线与 $z(t)$曲线在 $Z_a(\boldsymbol{x}^0)$空间上亦具有 0 阶、1 阶、2 阶等价性质.

注意到 $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}_r)$应具有与 $f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域内的 0 阶等价性质，并且，下标集合 $I(\boldsymbol{x}^0)$预先并不知道，因此，形式上，(6.5.2.3)式、(6.5.2.36)等式中的 $i\in I(\boldsymbol{x}^0)$ 条件可以用

$$\omega_i g_i(\boldsymbol{x}^0) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, k \qquad —(6.5.2.38)$$

条件替代. 但这样做的代价则是易造成误解(见 § 6.6 节附录一).

利用以上的各个结论，就可以得到以下条件

定理 6.5.2.1　广义 Kuhn－Tucker 条件(一阶必要条件)

设 $\boldsymbol{x}^0$ 是(P1)规划的解，$\boldsymbol{x}^0$ 点是正则的，并设 $\boldsymbol{x}^0$ 点处一阶约束品性

$$Z^1(\boldsymbol{x}^0) = S(X, \boldsymbol{x}^0)$$

成立，则存在向量 $\boldsymbol{\omega}_r = (\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_r})$ 并使

$$\begin{cases}\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \sum_j^r \omega_{i_j}\nabla g_{i_j}(\boldsymbol{x}^0) \\ \omega_{i_j} g_{i_j}(\boldsymbol{x}^0) = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, r \\ \omega_{i_j}\geqslant 0\end{cases} \qquad —(6.5.2.39)$$

且 $i_j\in I(\boldsymbol{x}^0)$，$r$ 是向量组 $\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)\quad i\in I(\boldsymbol{x}^0)$ 的秩. ■

若利用(6.5.2.38)式，可得到以上条件判别式(6.5.2.39)的另一种表示(即更接近传统形式的表示)：

$$\begin{cases}\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \sum_i \omega_i\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0) \\ \qquad \omega_i g_i(\boldsymbol{x}^0) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, k \\ \qquad \omega_i\geqslant 0\end{cases} \qquad —(6.5.2.40)$$

但需要注意，(6.5.2.40)式的准确意义仍只能被理解为是指(6.5.2.39). 这即是说，(6.5.2.40)式中的乘子 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k)$ 只能被看成是由(6.5.2.39)式中的乘子 $\boldsymbol{\omega}_r = (\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_r})$，通过下式拓展而成，即对(6.5.2.40)式中的乘子分量 ω_i，$i = 1, 2, \cdots, k$，可取为

$$\omega_i = \begin{cases}\omega_{i_j}\geqslant 0 & i = i_j \quad i_j\in I(\boldsymbol{x}^0) \quad j = 1, 2, \cdots, r \\ 0 & i\neq i_j \qquad\qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, k\end{cases}$$

r 是 Jacobi 矩阵 $G(\boldsymbol{x}^0)$ 的秩. 对本书以下(为方便叙述)所使用的(6.5.2.40)式形式的乘子 $\boldsymbol{\omega}$ 都只应如此理解.

再重复指出,将含有等式约束 $h_j(\boldsymbol{x}) = 0$ 条件的一般规划问题,用 $h_j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$, $-h_j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 不等式约束替代,并由关于核规划的分析中的结论,马上可以从以上定理中得到传统形式上的 Kuhn - Tucker(一阶)条件(如(6.1.3)式). 对此不再予以详述.

定理 6.5.2.1 与本章开始处所引的 Kuhn - Tucker 条件形式上的区别仅在于用一阶约束品性 $Z^1(\boldsymbol{x}^0) = S(X, \boldsymbol{x}^0)$ 替代了 $(Z^1(\boldsymbol{x}^0))' = (S(X, \boldsymbol{x}^0))'$.

定理 6.5.2.2 二阶(必要)条件

设 $\boldsymbol{x}^0$ 是规划(P1)的局部极小值点,并设一阶最优条件成立,并且在 $\boldsymbol{x}^0$ 处二阶约束品性(Ⅰ)成立,则对 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$,有

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\Big[\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) - \sum_{i=1}^{k} \omega_i \nabla^2 g_i(\boldsymbol{x}^0)\Big]\boldsymbol{\alpha} \geqslant 0 \qquad \text{—(6.5.2.36)}$$

■

定理 6.5.2.2 与本章开始处所引的二阶必要条件的差异,在于用"二阶约束品性(Ⅰ)"替代了那里的"二阶约束品性(A)".

这里尚可对于定理 6.5.2.2 为何仍只是二阶必要条件给予一些解释. 由上文的分析已经指出,(6.5.2.36)式相对于某个具体的方向向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 及所决定的边界交曲线 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 而讲,是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 交曲线上以 $\boldsymbol{x}^0$ 点为局部极小值点时的充分条件. 但对于可行区域 X(在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的邻域)来讲,要使条件(**c.1**)与条件(**c.2**)同时成立,$\boldsymbol{x}^0$ 点成为局部极小值点才具有充分性. 但现在在定理 6.5.2.2 中所要求的实际仅是(6.5.2.36)式,即仅考察了 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合中的全体(非 0)的方向向量 $\boldsymbol{\alpha}$. 由上一节的分析已说明了,一般地成立 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) \subseteq \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$,且在二阶约束品性(Ⅱ)成立时,$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合中的任一非 0 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 也可以对应于 X 区域在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域中的二次可微边界曲线 $\boldsymbol{x}(\theta)$. 而这些 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 中,尚有部分未及验证是否全部成立

$$f(\boldsymbol{x}(\theta)) \geqslant f(\boldsymbol{x}^0) \qquad \theta \in [0, \varepsilon]$$

所以,当且仅当 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 时,定理 6.5.2.2 才是充分性的. 一般地,定理 6.5.2.2 只具有必要性.

这一问题后面还会涉及. 从以上关于 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 曲线上的局部极小值点的分析中,其实附带地已经得到了等式约条件下的一阶必要条件即(6.5.2.24)式(且对于 $\boldsymbol{\omega}$,乘子没有符号限制)以及二阶充分条件(6.5.2.36)式. 这些结论为人所熟知,毋需再行详述. 所需特别指出的仅是(6.5.2.24)式

中的乘子向量 $\boldsymbol{\omega}$, 是由(等式)约束条件 $g_j(\boldsymbol{x})=0$ 中,极大线性无关$\nabla g_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$向量组决定的. 当局部极小值点 $\boldsymbol{x}^0$ 满足一阶约束品性以及二阶约束品性(Ⅰ)时,由这样的极大线性无关向量组的下标子列所决定的 $g_j(\boldsymbol{x})=0$ 构造的交曲线 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 上的局部极小值点 $\boldsymbol{x}^0$ 一定也就是全部约束条件 $g_j(\boldsymbol{x})=0$, $j\in I(\boldsymbol{x}^0)$ 时的即 X 可行集合上的局部极小值点.

同时,由以上分析易知,要求 $z(t)$ 曲线在 $t=0$ 处的二阶导数大于等于 0,即

$$\frac{\mathrm{d}^2 z(0)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{z''(0)}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}=\frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\geqslant 0 \qquad \text{—(6.5.2.41)}$$

其中
$$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\omega})=\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)-\sum_i \omega_i\nabla^2 g_i(\boldsymbol{x}^0)$$

并且,$\dfrac{\mathrm{d}^2 z(0)}{\mathrm{d}t^2}$也就是 $z(t)$ 曲线在 $t=0$ 处的曲率[1]. 且由(6.5.2.36)式,对全体 $\boldsymbol{\alpha}\in\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$, $\boldsymbol{\alpha}\neq 0$, 在同样的下标子列下所构造的交曲线 $\boldsymbol{x}(\theta;i_1,i_2,\cdots,i_r)$ 以及由此决定的 $z(t)$ 投影曲线全体理解为线性子空间 $Z_a(\boldsymbol{x}^0)$ 上的曲面 L_z, 那么,由(6.5.2.36)式的要求,以及 Gauss 主法截曲率的定义,其实就是要去检验以下规划所决定的主法截曲率的符号,

$$\begin{cases}\text{极值} & \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\alpha}\\ \text{s. t.} & \begin{cases}\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\cdot\boldsymbol{\alpha}=0 & i=1,2,\cdots,r\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1\end{cases}\end{cases} \qquad \text{—(6.5.2.42)}$$

这里设$\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$为极大线性无关向量组,并且 $g_i(\boldsymbol{x})=0$ 决定的交曲线 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 邻域内成立 $g_i(\boldsymbol{x}(\theta))=0\quad i=1,2,\cdots,k$.

由以上分析已经知道,(6.5.2.42)式的规划的解就是以下 μ 多项式

$$\begin{vmatrix}\mu I-\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\omega}) & \nabla g_1(\boldsymbol{x}^0),\nabla g_2(\boldsymbol{x}^0),\cdots,\nabla g_r(\boldsymbol{x}^0)\\ \nabla g_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) & \\ \nabla g_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) & \\ \vdots & \mathbf{0}\\ \nabla g_r^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) & \end{vmatrix}=0 \qquad \text{—(6.5.2.43)}$$

的 $m-r$ 个解 μ_i. μ_i 就是$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})$ 矩阵在$\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}=0$ 约束下的拟特征值. 并且(6.5.2.43)式中$\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)$的下标可换成 $I(\boldsymbol{x}^0)$ 中的任一 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 子列,只要$\nabla g_{i_j}(\boldsymbol{x}^0)$线性无关,$\mu_i$ 就是不变的. 已知 μ_i 就是 $Z_a(\boldsymbol{x}^0)$线性子空间上的 L_z 曲

〔1〕 参见§2.1节的(2.1.7~10)式及其后的说明.

面在 $z(t)$，$t=0$ 处的 $m-r$ 个主法截方向曲率. 故等式约束条件下二阶充分条件(6.5.2.36)式的要求也就是 $\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$ 矩阵的 $m-r$ 个拟特征值 $\mu_i \geqslant 0$. 这一条件等价于 $\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$ 矩阵半正定，其传统的判定方法也就是由 Arrow、Enthoven 导出的判别法.

以下给出一个示例，表明投影函数的构造.

例 6.5.2.2[1]

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + (x_2-2)^2 \\ \text{s.t.} \quad & h(\boldsymbol{x}) = \beta x_1^2 - x_2 = 0 \quad (\beta \neq 0) \end{aligned}$$

解出局部极小值点，并构造出投影曲线.

作 Lagrange 函数

$$L = f(\boldsymbol{x}) - \zeta h(\boldsymbol{x})$$

现在 $h(\boldsymbol{x})$ 是 Ox_1x_2 坐标平面上的

$$x_2 = \beta x_1^2$$

曲线即抛物线. 极小值点处的一阶必要条件是

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2\zeta\beta x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ or } 1-\zeta\beta = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2-2) + \zeta = 0 \Rightarrow x_2 = 2 - \frac{\zeta}{2} \geqslant 0 \Rightarrow \zeta \leqslant 4$$

由

$$\nabla_x^2 L = \begin{bmatrix} 2(1-\zeta\beta) & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

当 $1-\zeta\beta \geqslant 0$，$\nabla_x^2 L$ 是(半)正定的，且拟特征值由

$$\begin{vmatrix} \mu - 2(1-\zeta\beta) & 0 & -2\beta x_1 \\ 0 & \mu - 2 & 1 \\ -2\beta x_1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

决定，得

$$\mu = \frac{2(1-\zeta\beta) + 8\beta^2 x_1^2}{1 + 4\beta^2 x_1^2}$$

---

〔1〕 引自《现代应用数学手册——运筹学与最优化理论卷》，清华大学出版社. 1999 年. 第 102 页. 但此例应属于 McCormick，可见《非线性规划》上册，M. Avriel，第 45 页.

易知当 $x_1 \neq 0 \Rightarrow 1-\zeta\beta=0 \quad \zeta=\beta^{-1}$. 再由 $x_2>0$ 知必应有 $\beta>\frac{1}{4}$，此时有 $\mu>0$，即有 2 个严格局部极小值.

$$x_1=\pm\left[\frac{1}{2\beta}\left(4-\frac{1}{\beta}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \quad x_2=\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{\beta}\right)$$

当 $x_1=0$ 可得 $\zeta=4$，要使 $\mu\geqslant 0$，应有 $\beta\leqslant\frac{1}{4}$.

例如取 $\beta=\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$，局部极小值点是 $\boldsymbol{x}^0=(\pm\sqrt{2},\ 1)^{\mathrm{T}}$ 处. 不妨取 $\boldsymbol{x}^0=(\sqrt{2},\ 1)^{\mathrm{T}}$，此时

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=(2\sqrt{2},\ -2)^{\mathrm{T}} \quad \nabla h(\boldsymbol{x}^0)=(\sqrt{2},\ -1)^{\mathrm{T}}$$

以下利用坐标平移及正交变换方法来构造投影函数. 先确定 $Z_a(\boldsymbol{x}^0)$ 子空间.

从 $\nabla h(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}=0$ 中得到归一化的 $\boldsymbol{\alpha}$ 向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \sqrt{\frac{2}{3}}\end{bmatrix}$$

从而
$$\hat{Z}_\xi^1(\boldsymbol{x}^0)=\left\{\boldsymbol{\alpha}\,\middle|\,\boldsymbol{\alpha}=\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right]^{\mathrm{T}}k \quad k=\pm 1\right\}$$

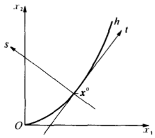


图 6.5.2.3

作
$$\boldsymbol{d}=\frac{-\nabla f(\boldsymbol{x}^0)}{\|\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\|}=\begin{bmatrix}-\sqrt{\frac{2}{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

有 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}=0$. $\boldsymbol{d}$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}$ 正交的归一化方向向量[1].

在 $h(\boldsymbol{x})=0$ 曲线上的 $\boldsymbol{x}^0$ 点处建立 Ots 坐标系，如图 6.5.2.3 所示. 其中

t 轴：$\boldsymbol{x}_t=\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{\alpha}t$ （t 轴即是 h 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的切线）

s 轴：$\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{d}s$

由此将 Ox_1x_2 坐标系变换到 Ots 坐标系. 并令 $\forall\,(t,\ z)=Z_a(\boldsymbol{x}^0)$，$z\in R$ 有

[1] 在决定 $\boldsymbol{d}$ 的时候也可以使用 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)/\|\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\|$ 的方式.

$$x_1 = x_1^0 - \frac{\alpha_2 s - d_2 t}{\alpha_1 d_2 - \alpha_2 d_1} = \sqrt{2} - \sqrt{\frac{2}{3}}s - \frac{1}{\sqrt{3}}t$$

$$x_2 = x_2^0 - \frac{\alpha_1 s - d_1 t}{\alpha_1 d_2 - \alpha_2 d_1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}s - \sqrt{\frac{2}{3}}t$$

从而可将 $h(\boldsymbol{x}) = 0$ 变换成 $h(t, s) = 0$，即

$$h: \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{2}{3}}s - \frac{1}{\sqrt{3}}t\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}s - \sqrt{\frac{2}{3}}t\right) = 0$$

由此可得到在 $t = s = 0$ 处

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{3}{\sqrt{3}} \neq 0 \quad \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

从 $h(t, s) = 0$ 中可得到 $s = s(t)$ 函数，且

$$\frac{\mathrm{d}s(0)}{\mathrm{d}t} = 0$$

另由 $f(\boldsymbol{x}) \to f(t, s)$ 的变换得到

$$f(t, s) = \left(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{2}{3}}s - \frac{1}{\sqrt{3}}t\right)^2 + \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}s - \sqrt{\frac{2}{3}}t\right)^2$$

则令

$$z = f(t, s(t)) = z(t)$$

这就是 $f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}$ 沿 $h(\boldsymbol{x}) = 0$ 曲线变动时，在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域处投影到 $Z_\alpha(\boldsymbol{x}^0)$线性空间上的函数形式.

易证

$$z^0 = f(0, s(0)) = f(\boldsymbol{x}^0) = 3$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$$

从而投影函数 $z(t)$ 在 $t = 0$ 处的切线，在 $Z_\alpha(\boldsymbol{x}^0)$空间上是平行于 t 轴的水平线，这在 Ox_1x_2z 坐标系上即表示 $f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}$ 沿 $h(\boldsymbol{x}) = 0$ 曲线上变动时，在 $\boldsymbol{x}^0$ 处，$f(\boldsymbol{x})$的切线与 $h(\boldsymbol{x}) = 0$ 的切线平行.

$$\frac{\mathrm{d}^2 z(0)}{\mathrm{d}t^2} = z\left(1 - \frac{3}{\sqrt{3}}s''(0)\right)$$

易知 $s''(0)=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$，从而 $\dfrac{\mathrm{d}^2z(0)}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{4}{3}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\nabla_x^2L(\boldsymbol{x}^0,\zeta)\boldsymbol{\alpha}=\mu>0$

故 $\boldsymbol{x}^0$ 就是 $f(\boldsymbol{x})$在 $h(\boldsymbol{x})=0$ 上的局部极小值点.

此例中，$Z_\alpha(\boldsymbol{x}^0)$就是 Ox_1x_2z 坐标空间上，

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{\alpha}t\quad t\in R$$

决定的与 z 轴平行的平面. $Z_\alpha(\boldsymbol{x}^0)$子空间与 $h(\boldsymbol{x})=0$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处相切，故又可将 $Z_\alpha(\boldsymbol{x}^0)$看成是 $h(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切空间.

以上解法是以坐标变换的方式构造出 $z(t)$投影函数，虽然繁琐，但几何关系很清晰. 下面再给出利用上文所用的参数化方法构造投影函数.

由 $\dfrac{\partial h}{\partial x_2}=-1\neq 0$ 可知总能将 $h(\boldsymbol{x})=0$ 看成是 $x_2=x_2(x_1)$ 这样的函数.

作参数化的 $x_2(x_1)$函数，即将 x_1 看成为参数且在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0$ 处，由

$$\nabla h(\boldsymbol{x}^0)=\begin{bmatrix}2\beta x_1^0\\-1\end{bmatrix}$$

得

$$\nabla h^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}=0\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\2\beta x_1^0\end{bmatrix}k\quad k\in R$$

作

$$\boldsymbol{x}(\theta)=\begin{cases}x_1=x_1^0+k\theta\\x_2=\beta(x_1^0+k\theta)^2\end{cases}$$

得到

$$z(\theta)=f(\boldsymbol{x}(\theta))=(x_1^0+k\theta)^2+[\beta(x_1^0+k\theta)^2-2]^2$$

$$t(\theta)=\frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}=\frac{(k\theta+2\beta x_1^0[\beta(x_1^0+k\theta)^2-x_2^0])}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}k$$

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=(1+4\beta^2(x_1^0)^2)^{\frac{1}{2}}\ |k|$$

有

$$t'(\theta)=\frac{(1+4\beta^2x_1^0(x_1^0+k\theta))k^2}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}$$

$$z'(\theta)=2x_1(1+2\beta(x_2-2))k$$

故
$$z'(0)=2x_1^0(1+2\beta(\beta(x_1^0)^2-2))k\quad t'(0)=\|\boldsymbol{\alpha}\|$$

由一阶必要条件,令

$$z'(0)=0$$

得(1)若 $x_1^0\neq 0\Rightarrow 1+2\beta^2(x_1^0)^2-4\beta=0$

$$(x_1^0)^2=\frac{4\beta-1}{2\beta^2}\quad\Rightarrow \text{要求有 } \beta\geqslant\frac{1}{4}$$

且
$$x_1^0=\pm\frac{\sqrt{8\beta-2}}{2\beta}\quad x_2^0=2-\frac{1}{2\beta}$$

(2) 若 $x_1^0=0\Rightarrow x_2^0=0$

考虑二阶条件,

$$z''(\theta)=(2+4\beta(x_2-2)+8\beta x_2)k^2$$

$$z''(0)=(2+4\beta(\beta(x_1^0)^2-2)+8\beta^2(x_1^0)^2)k^2$$

$z(t)$曲线在 $t=0$ 处的曲率是

$$\mu=\frac{\mathrm{d}^2z(0)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{z''(0)}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}=\frac{2-8\beta+12\beta^2(x_1^0)^2}{1+4\beta^2(x_1^0)^2}$$

(1) 当 $x_1^0\neq 0$, $x_1^0=\pm\dfrac{\sqrt{8\beta-2}}{2\beta}$,得

$$\mu=\frac{\mathrm{d}^2z(0)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{16\beta-4}{8\beta-1}\geqslant 0\quad\left(\beta\geqslant\frac{1}{4}\right)$$

若 $\beta=\dfrac{1}{2}$ 即知 $\mu=\dfrac{4}{3}$,此结果与以上坐标变换投影方法一致.

(2) 当 $x_1^0=0$

$$\mu=2(1-4\beta)$$

故 当 $\beta\leqslant\dfrac{1}{4}$ $\quad\boldsymbol{x}^0=(0,0)^{\mathrm{T}}$ 为局部极小值点;

当 $\beta>\dfrac{1}{4}$ $\quad\boldsymbol{x}^0=(0,0)^{\mathrm{T}}$ 为局部极大值点.

易知,在 $x_1^0\neq 0$ 时

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=\frac{1}{\beta}\nabla h(\boldsymbol{x}^0)\Rightarrow \text{Lagrange 乘子为 } \zeta=\frac{1}{\beta}$$

在 $x_1^0=0$ 时

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = 4\,\nabla h(\boldsymbol{x}^0) \qquad \zeta = 4$$

这些结果与利用 Lagrange 乘子法的结果一致.

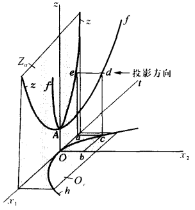


图 6.5.2.4

图 6.5.2.4 画出了空间 Ox_1x_2z 上在 $\boldsymbol{x}^0=(0,\ 0)^{\mathrm{T}}$ 处的投影曲线空间示意图. 这里设 $\beta<\dfrac{1}{4}$. Z_α 阴影区域即为 $Z_\alpha(\boldsymbol{x}^0)$子空间,$O_x$ 阴影区域为 Ox_1x_2 坐标平面. f、h 分别为 $\boldsymbol{x}$ 沿 $h(\boldsymbol{x})=0$ 曲线上的目标函数曲线及约束函数曲线. Z_α 分别与 f、h 在 A、O 点相切. f 曲线投影到 Z_α 空间上就得到了 z 曲线. A 点就是 z 曲线的局部极小值点. A 点的 x_1、x_2 坐标就是 $\boldsymbol{x}^0=(0,\ 0)^{\mathrm{T}}$. 在 z 曲线上利用求取极值的一、二阶条件,就可以推导出 Lagrange 乘子方法.

$\boldsymbol{x}^0$ 局部极小值点的充分性判别公式. 上文已经指出,由于一般地可以有

$$\hat{Z}{}^1(\boldsymbol{x}^0) \subseteq \overset{\wedge\!\!\wedge}{Z}{}^1(\boldsymbol{x}^0)$$

故仅基于$\hat{Z}{}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合的方法向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的判别条件(6.5.2.36)式仍只能具有必要性的意义,那么,若将(6.5.2.36)式中 $\boldsymbol{\alpha}\in\hat{Z}{}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 的条件扩展为 $\boldsymbol{\alpha}\in\overset{\wedge\!\!\wedge}{Z}{}^1(\boldsymbol{x}^0)$ [1],即设 $\boldsymbol{x}^0$ 点处二阶约束品性(Ⅱ)成立,且 $\boldsymbol{x}^0$ 点满足一阶必要条件,则若

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\cdot\left[\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)-\sum_{i=1}^{k}\omega_i\cdot\nabla^2 g_i(\boldsymbol{x}^0)\right]\boldsymbol{\alpha}>0 \quad \boldsymbol{\alpha}\in\overset{\wedge\!\!\wedge}{Z}{}^1(\boldsymbol{x}^0) \quad \boldsymbol{\alpha}\neq 0$$

—(6.5.2.44)

则 $\boldsymbol{x}^0$ 就是 X 可行区域的严格局部极小值点的判断,是否成立? 对此,已经知道以上条件是成立的. 这里只需给予具体的说明即可.

可以理解,当要求 $\boldsymbol{x}^0$ 点是 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0)\cap X$ 的严格局部极小值点,所对应的条件(c.1)的判别式应是将(6.5.2.2)式改变成

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\xi}>0 \quad \boldsymbol{\xi}\in Z_\xi^1(\boldsymbol{x}^0) \qquad —(6.5.2.45)$$

而所要求的一阶约束品性成立的条件不变. 由线性化锥 $Z_\xi^1(\boldsymbol{x}^0)$的定义,对所有

---

[1] 显然易见,将(6.5.2.4)式中的 $\boldsymbol{\alpha}\in\hat{Z}{}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 的条件,拓展为 $\boldsymbol{\alpha}\in\overset{\wedge\!\!\wedge}{Z}{}^1(\boldsymbol{x}^0)$,依然可推导出相对应的(6.5.2.34)式,即将(6.5.2.34)式中的下标 i 替换成 i_j,把 r 替换成 d.

的 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{int}Z_\xi^1(\boldsymbol{x}^0)$ 的方向向量，有

$$\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} > 0 \quad i \in I(\boldsymbol{x}^0)$$

因此，若 $\boldsymbol{x}^0$ 点处一阶必要条件成立，即(6.5.2.3)式成立，就总有(亦可参见上一章关于加强的 Farkas 引理的论述)

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} > 0 \quad \text{当 } \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{int}Z_\xi^1(\boldsymbol{x}^0) \qquad \text{—(6.5.2.46)}$$

也就是说，对于 $Z_\xi^1(\boldsymbol{x}^0)$集合的内点集合，所要求的 $\boldsymbol{x}^0$ 为严格局部极小值点的条件(**c.1**)的要求(6.5.2.45)式，已包含在判别式(6.5.2.3)式之中. 这样，对于(6.5.2.44)式只需再考察

$$\boldsymbol{\alpha} \in (Z_\xi^1(\boldsymbol{x}^0) - \mathrm{int}Z_\xi^1(\boldsymbol{x}^0)) \quad \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0} \qquad \text{—(6.5.2.47)}$$

的方向向量即可. 但可注意，任一由(6.5.2.47)式决定的方向向量 $\boldsymbol{\alpha}$，必定是形如

$$\begin{cases} \nabla g_{i_j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, d \quad i_j \in I(\boldsymbol{x}^0) \\ \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} \geqslant 0 \quad i \in I(\boldsymbol{x}^0) \quad i \neq i_j \end{cases} \qquad \text{—(6.5.2.48)}$$

等式一不等式方程组的解.

设(6.5.2.3)式中，有

$$\begin{cases} \nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \sum_{k=1}^{r'} \omega_{j_k} \nabla g_{j_k}(\boldsymbol{x}^0) \quad 1 \leqslant r' \leqslant \mathrm{rank}(G(\boldsymbol{x}^0)) = r \\ \omega_{j_k} > 0 \quad j_k \in I(\boldsymbol{x}^0) \end{cases} \qquad \text{—(6.5.2.49)}$$

成立. 那么，对于满足(6.5.2.47)式的任一 $\boldsymbol{\alpha}$ 向量，它或者是

$$\begin{cases} \nabla g_{j_k}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0 \quad k = 1, 2, \cdots, r' \\ \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} \geqslant 0 \quad i \in I(\boldsymbol{x}^0) \quad i \neq j_k \end{cases} \qquad \text{—(6.5.2.50)}$$

方程组的解，或者不是. 当这一满足(6.5.2.47)式的 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是(6.5.2.50)式的解时，即是说至少有一个下标 $j_k \quad 1 \leqslant k \leqslant r'$，使

$$\nabla g_{j_k}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} > 0 \quad \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} \geqslant 0 \quad i \in I(\boldsymbol{x}^0) \quad i \neq j_k$$

成立，那么，由(6.5.2.49)式，因为 $\omega_{j_k} > 0$，对这一 $\boldsymbol{\alpha}$ 总又成立

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} > 0$$

也就是说，对于(6.5.2.47)式决定的 $\boldsymbol{\alpha}$ 全体中，所有不是(6.5.2.50)式方程组的解的 $\boldsymbol{\alpha}$ 是满足(6.5.2.45)式的要求的. 换句话说，对于 $\boldsymbol{x}^0$ 成为严格局部极小值点所对应的条件(**c.1**)成立的判别式(6.5.2.45)，尚需检验的仅仅是(6.5.2.50)

式决定的 $\boldsymbol{\alpha}$. 显然,(6.5.2.50)式决定的 $\boldsymbol{\alpha}$ 全体刚好就是$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合[1].

另一方面,设 $\boldsymbol{x}^0$ 点处二阶约束品性(Ⅱ)成立,并设(6.5.2.49)式中的下标子列 $j_1, j_2, \cdots, j_d$ 就是满足二阶约束品性(Ⅱ)条件中所指的下标子列 $\{i_1, i_2, \cdots, i_d\}$. 这样,任一 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 的方向向量都可决定交曲线 $\boldsymbol{x}(\theta) = \boldsymbol{x}(\theta; j_1, j_2, \cdots, j_d) \subset X$, $\theta \in [0, \varepsilon]$. 由于 $\boldsymbol{x}^0$ 是交曲线 $\boldsymbol{x}(\theta)$上的严格局部极小值点的二阶充分条件,显然就是(6.5.2.44)式成立. 故(6.5.2.44)式成立就满足了条件(c.2)成为严格不等式,同时由以上的分析,(6.5.2.44)式成立时刚好也满足了对于条件(c.1)的检验的完整性要求. 而至于 $\boldsymbol{x}^0$ 为其他的(可能的)边界交曲线上的严格局部极小值点的检验,由以上的分析,其实亦已包含在由(6.5.2.47)式决定的 $\boldsymbol{\alpha}$ 同时又是(6.5.2.48)式的解(但不是(6.5.2.50)式的解),由一阶必要条件成立(6.5.2.49)式即保证(6.5.2.45)式成立的检验之中,即已含在一阶必要条件成立之中. 由此即知,有以下二阶充分必要条件成立.

定理 6.5.2.3　严格局部极小值点的充要条件

对于(P1)规划,设 $\boldsymbol{x} \in X$, 并设 $\boldsymbol{x}^0$ 点处一阶约束品性和二阶约束品性(Ⅱ)成立,若存在向量 $\boldsymbol{\omega}$,满足

$$\begin{cases}\nabla f(\boldsymbol{x}^0) - \sum_{i=1}^{k} \omega_i \nabla g_i(\boldsymbol{x}^0) = 0 \\ \omega_i \nabla g_i(\boldsymbol{x}^0) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, k \\ \omega_i \geqslant 0\end{cases}$$

以及 $\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0) \quad j \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$ 向量组线性无关,且对于每个 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$, 有

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\left[\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) - \sum_{i=1}^{k} \omega_i \nabla^2 g_i(\boldsymbol{x}^0)\right]\boldsymbol{\alpha} > 0 \qquad \text{—(6.5.2.44)}$$

则 $\boldsymbol{x}^0$ 是 X 的严格局部极小值点. ■

这一条件的必要性易见而充分性已由以上论述了. 这一条件与本章开始处所引条件的差异,在于第一是关于二阶约束品性(Ⅱ)的表述上[2]. 当二阶约束品性(Ⅱ)成立,若 $\boldsymbol{x}^0$ 是 X 的(P1)规划的严格局部极小值点,即表示了至少能有 1 个基乘子向量 $\boldsymbol{\omega}^j$,由 $\boldsymbol{\omega}^j$ 的正数分量的下标子列所决定的$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合存在,且使在$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$上 $\boldsymbol{x}^0$ 点能满足严格局部极小值点的充要条件的要求. 第二即在于增加了 $\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0) \quad j \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$ 向量组线性无关(由推论 6.2.1.1 的结论)这一条件.

---

[1] 严格地说应是 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 的方向锥 $\hat{\hat{Z}}^1_{\xi}(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{\xi} \mid \boldsymbol{\xi} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0), \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = 1\}$,但这不会对以下分析造成实质性的影响.

[2] 本章开始处所引用的严格局部极小值点的充分、必要条件,其实隐含地引用了二阶约束品性(A).

对这一点,以下还有进一步的说明.

由上分析易知,当 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$,则二阶(必要)条件(如果(6.5.2.36)式能成为严格不等式)同时就是充分的.

应着重指出,定理 6.5.2.3 中的增加的条件"$\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0) \quad j \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$ 线性无关"不能省略. 这一条件等价于要求 $\boldsymbol{\omega}$ 乘子向量是由某个基乘子向量扩展而来的. 若省略这一条件,定理 6.5.2.3 就只能看成是充分条件了[1]. 以下的示例可予以具体说明.

例 6.5.2.3 考虑例 6.1.2 中的(P1)规划问题的二阶最优性条件. 由例 6.1.2 的结果,有 $\boldsymbol{x}^0 = (a, 0)^{\mathrm{T}}$, $0 < a < 2$,

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 2a \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla g_1(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \nabla^2 g_1(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \nabla^2 g_2(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{ \boldsymbol{z} \,\middle|\, \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t \quad t \in R \right\}$$

并已知

$$\boldsymbol{\omega}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2a \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\omega}^2 = \begin{bmatrix} 4-2a \\ 4 \end{bmatrix}$$

都是满足一阶、二阶必要条件的乘子向量. 现取 $\boldsymbol{\omega}^2$,有

$$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}^2) = \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) - (4-2a) \cdot \nabla^2 g_1(\boldsymbol{x}^0) - 4 \cdot \nabla^2 g_2(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

是半正定的,且对于 $\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \quad \boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$,有

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}^2) \boldsymbol{z} = 0$$

即不满足(6.5.2.44)式. 但可以知道 $\boldsymbol{x}^0$ 点是严格极小值点. 因为若取 $\boldsymbol{\omega}^1$ 向量,作

$$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}^1) = \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) - 0 \cdot \nabla^2 g_1(\boldsymbol{x}^0) - 2a \cdot \nabla^2 g_2(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2-a \end{bmatrix}$$

由于 $0 < a < 2$,故 $\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}^1)$ 是正定的,所以,$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}^1)$ 一定也是约束正

---

[1] 在传统文献中,定理 6.5.2.3 确只是作为充分条件的形式存在的,且其表述中条件"$\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0) \quad j \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$ 线性无关"是没有的.

定的. 对 $z \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ $\ z \neq \mathbf{0}$ 有

$$z^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}^1) z = (2-a)t^2 > 0$$

即知以上结论.

产生 $\boldsymbol{\omega}^2$、$\boldsymbol{\omega}^1$ 所决定的$\nabla_x^2 L(\cdot)$矩阵的有定性质的差异,原因在于 $\boldsymbol{\omega}^2$ 向量不是基乘子向量. 因为由基乘子向量的定义,基乘子向量 $\boldsymbol{\omega}$ 中正数分量 $\omega_{i_j} > 0$, $j = 1, 2, \cdots, d \leqslant r$ 的下标 i_j 所对应的$\nabla g_{i_j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)$向量一定是线性无关的. 而在 $\boldsymbol{\omega}^2$ 向量中,它的 2 个正数分量所对应的$\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0)$、$\nabla g_2(\boldsymbol{x}^0)$是线性相关的,所以,$\boldsymbol{\omega}^2$ 不是基乘子向量. 由推论 6.2.1.1 所述,从 $\boldsymbol{\omega}^2$ 中总可以消除掉 ω_i^2, $i = 1, 2$ 中的一个,从而得到基乘子向量. 由本章 § 2 节所述的方法(6.2.1.13)~(6.2.1.18)式,

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = (4-2a) \cdot \nabla g_1(\boldsymbol{x}^0) + 4 \cdot \nabla g_2(\boldsymbol{x}^0)$$

由
$$\nabla g_2(\boldsymbol{x}^0) = -\nabla g_1(\boldsymbol{x}^0) \qquad \nabla g_1(\boldsymbol{x}^0) + \nabla g_2(\boldsymbol{x}^0) = 0$$

得
$$\min\left(\frac{4-2a}{1}, \frac{4}{1}\right) = \frac{4-2a}{1}$$

$$\omega_1 = (4-2a) - 1 \times \frac{4-2a}{1} = 0 \quad \omega_2 = 4 - 1 \times \frac{4-2a}{1} = 2a$$

刚好就得到了基乘子向量 $\boldsymbol{\omega}^1$.

澄清这一点以后,即知存在以下关于(弱)局部极小值点的充要条件.

定理 6.5.2.4 (弱)局部极小值点的充要条件

对于(P1)规划,设 $\boldsymbol{x}^0 \in X$, 并设 $\boldsymbol{x}^0$ 点处一阶约束品性和二阶约束品性(Ⅱ)成立,若存在向量 $\boldsymbol{\omega}$,满足

$$\begin{cases} \nabla f(\boldsymbol{x}^0) - \sum_{i=1}^{k} \omega_i \nabla g_i(\boldsymbol{x}^0) = 0 \\ \omega_i g_i(\boldsymbol{x}^0) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, k \\ \omega_i \geqslant 0 \end{cases}$$

以及 $\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0)$ $\ j \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$ 向量组线性无关,且对于每个 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ $\ \boldsymbol{\alpha} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 有

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\left[\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) - \sum_{i=1}^{k} \omega_i \nabla^2 g_i(\boldsymbol{x}^0)\right]\boldsymbol{\alpha} \geqslant 0 \quad \boldsymbol{\alpha} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \quad \text{—(6.5.2.51)}$$

即是说或者,(1):$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\alpha} > 0$ $\quad \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) = \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) - \sum_{i=1}^{k} \omega_i \nabla^2 g(\boldsymbol{x}^0)$

或者,(2):$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\alpha} = 0$, 且有正实数 $\delta > 0$,使对 $0 \leqslant t \leqslant \delta$,
$f(\boldsymbol{x}^0 + t\boldsymbol{\alpha}) =$ 常数

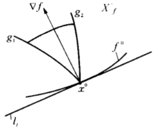
则 $\boldsymbol{x}^0$ 是 X 的(弱)局部极小值点. ■

§6.5.3 多重约束的 Lagrange 函数 Hessian 矩阵有定性的判别

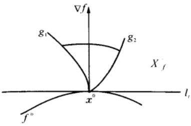
在以上诸定理中出现的(6.5.2.36)式、(6.5.2.44)式和(6.5.2.51)式二次型符号的判别，本质都可以看成是多重约束条件下的 Hessian 矩阵有定性的判别.

在以上包含有$\nabla_x^2 L(\cdot)$矩阵的二次型判定条件中，若 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)=\{\boldsymbol{0}\}$（即此时总有 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)=\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 成立），不论$\nabla_x^2 L(\cdot)$矩阵是负定、正定或不定的，二次型判定条件均可视为成立. 这一点在前面已提及，此处略加说明.

这是因为此时约束函数组的 Jacobi 矩阵中必含有 $m\times m$ 阶可逆(子)矩阵. 简单地设 $G(\boldsymbol{x}^0)$矩阵为 $m\times m$ 阶可逆矩阵，所以可行区域 X 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处成一个尖点状，如下图. 其中阴影区域为某个 Ots 截平面与 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0)\cap X$ 的交集合，$g_{1,2}$为其边界曲线，f^0是 $f(\boldsymbol{x}^0)=f(\boldsymbol{x})$ 等值曲面与 Ots 的交曲线，l_t 是其在 $\boldsymbol{x}^0$ 点切线，∇f是法方向向量. 由于 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0)\cap X$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处是尖点，故若 $\boldsymbol{x}^0$ 处关于一阶必要条件成立，那么，不论 f^0是上凹(如上图中的(a))亦或是上凸(如上图中的(b))再或是其他情形，总必是出现 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0)\cap X\subset X_f^+$ 的情形，所以，$\boldsymbol{x}^0$ 点在一阶必要条件的保证下即可成立为局部极小值点了. 这就是在这种情形下，可视二阶条件已满足的原因.



(a)



(b)

图 6.5.3.1

例 6.5.3.1

$$\min \quad f(\boldsymbol{x})=-x_1^2-(x_2-a)^2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x})=-x_1+x_2\geqslant 0 \\ g_2(\boldsymbol{x})=bx_1+x_2\geqslant 0 \qquad a,\ b,\ c>0 \\ g_3(\boldsymbol{x})=-x_2+c\geqslant 0 \end{cases}$$

检验 $\boldsymbol{x}^0=(0,0)^{\mathrm{T}}$ 是否为极小值点. 作

$$L=-x_1^2-(x_2-a)^2-\omega_1(-x_1+x_2)-\omega_2(bx_1+x_2)-\omega_3(-x_2+c)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 + \omega_1 - b\omega_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2(x_2 - a) - \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 = 0$$

在 $\boldsymbol{x}^0 = (0, 0)^{\mathrm{T}}$ 处有

$$\omega_1 = b\omega_2 \qquad \omega_1 + \omega_2 = 2a$$

有
$$\omega_1 = \frac{2ab}{1+b} \quad \omega_2 = \frac{2a}{1+b} \quad \omega_1, \omega_2 > 0 \quad \omega_3 = 0$$

$$I(\boldsymbol{x}^0) = \{1, 2\} = \hat{I}(\boldsymbol{x}^0).$$

$$G(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

知 $G(\boldsymbol{x}^0)$可逆，所以，$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{0}\}$. 由上知，可视二阶条件总成立. 故 $\boldsymbol{x}^0$ 点是极小值点. 而实际上，此例中

$$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

是负定的(这也表示本例不是凸规划). 容易验证(0, 0)点确是极小值点. 如用

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{1+b}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^2 \qquad c \geqslant \frac{b}{1+b}u_1 + \frac{1}{1+b}u_2 \geqslant 0$$

从而可行区域 $X = \{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})\}$

可得变换后的 $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{u})$. 且

$$\nabla_u f(\boldsymbol{u})\big|_{\boldsymbol{u}=0} = \left[\frac{2ab}{1+b}, \frac{2a}{1+b}\right]^{\mathrm{T}} > 0$$

即知 $\boldsymbol{u} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 处是局部极小值点.

设 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \neq \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$. 此时，检验局部极小值点的充要条件就涉及到(6.5.2.44)式或(6.5.2.51)式的二次型约束有定性质的判定. 上文已经指出，对于(6.5.2.36)式表示的二次型约束有定性质的判定，可以方便地用(6.5.2.43)式表示的拟特征值多项式的根的符号即以决定. 这由$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合的定义即知. 但对于(6.5.2.51)式，由于所检查的方向向量 $\boldsymbol{\alpha} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$，情况就稍许复杂一些. 由$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$集合的构造，$\boldsymbol{\alpha} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$，则

$$\begin{cases} \nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0 & i \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0) \\ \nabla g_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} \geqslant 0 & j \in I(\boldsymbol{x}^0) - \hat{I}(\boldsymbol{x}^0) \end{cases}$$

是等式—不等式方程组的解，所以，不能简单地用以下拟特征值多项式的根的符号来判断(6.5.2.51)式二次型的有定性质.

即如果仅由 $\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}=0 \quad i\in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$ 的 $\boldsymbol{\alpha}$，要判断二次型

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\alpha}\geqslant 0$$

显然可以构造多项式

$$\begin{vmatrix} \mu I-\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\omega}) & \nabla g_{i_1}(\boldsymbol{x}^0) & \nabla g_{i_2}(\boldsymbol{x}^0) & \cdots & \nabla g_{i_d}(\boldsymbol{x}^0) \\ \nabla g_{i_1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) & & & & \\ \nabla g_{i_2}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) & & \mathbf{0} & & \\ \vdots & & & & \\ \nabla g_{i_d}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) & & & & \end{vmatrix}=0 \qquad \text{—(6.5.3.1)}$$

其中 $\{i_1,i_2,\cdots,i_d\}=\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$，并由此得到 $m-d$ 个拟特征值 μ_i. 若 $\mu_i\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots,m-d$，则以上二次型就成立了. 由以上的分析显然有，

$$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\omega})\ \text{正定}\Rightarrow\begin{bmatrix} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\omega}) & \nabla f(\boldsymbol{x}^0) \\ \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) & 0 \end{bmatrix}\text{正定}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\omega}) & \nabla g_{i_1}(\boldsymbol{x}^0),\nabla g_{i_2}(\boldsymbol{x}^0),\cdots,\nabla g_{i_d}(\boldsymbol{x}^0) \\ \nabla g_{i_1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) & \\ \nabla g_{i_2}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) & \mathbf{0} \\ \vdots & \\ \nabla g_{i_d}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) & \end{bmatrix}\text{正定}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\omega}) & \nabla g_{i_1}(\boldsymbol{x}^0),\nabla g_{i_2}(\boldsymbol{x}^0),\cdots,\nabla g_{i_r}(\boldsymbol{x}^0) \\ \nabla g_{i_1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) & \\ \nabla g_{i_2}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) & \mathbf{0} \\ \vdots & \\ \nabla g_{i_r}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) & \end{bmatrix}\text{正定}$$

$$(1\leqslant d\leqslant r) \qquad \text{—(6.5.3.2)}$$

其中“⇒”表示蕴涵关系. 将(6.5.3.2)式中的“正定”改为“半正定”，以上关系依

旧成立，对于加边的$\nabla_x^2 L(\cdot)$矩阵“(半)正定”应理解为是“约束(半)正定”.

现由于$\hat{\hat{Z}}^1(x^0)$中还包含不等式$\nabla g_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}\geqslant 0 \quad j\in I(\boldsymbol{x}^0)-\hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$约束条件，判断以上二次型就需要利用法曲率符号分区的方法. 在$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)\neq\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$，由(6.5.2.37)式，Lagrange 函数为

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}_d)=f(\boldsymbol{x})-\sum_{j=1}^{d}\omega_{i_j}g_{i_j}(\boldsymbol{x}) \qquad i_j\in\hat{I}(\boldsymbol{x}^0) \quad —(6.5.3.3)$$

这里总设一阶必要条件成立，ω_{i_j}是某个基乘子向量的正数分量.

定义

$$Z_f(\boldsymbol{x}^0)=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}=0 \quad \boldsymbol{\alpha}\in R^m \quad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1\} \quad —(6.5.3.4)$$

$Z_f(\boldsymbol{x}^0)$是目标函数在R^m空间中的等值曲面f^0在$\boldsymbol{x}^0$处的切空间(用方向向量$\boldsymbol{\alpha}$表示). $Z_f(\boldsymbol{x}^0)$在几何上是$m-1$维的超平面上的以$\boldsymbol{x}^0$为圆心的单位圆. 这一超平面就是f^0曲面在$\boldsymbol{x}^0$点的切平面. 故由一阶条件，对任一$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1 \quad \boldsymbol{\alpha}\in\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}\in Z_f(\boldsymbol{x}^0)$.

作 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}t)=\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{\alpha}t \quad t\in R \quad \boldsymbol{\alpha}\in Z_f(\boldsymbol{x}^0)$

记 $$R^L=\forall(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}t),z) \quad z\in R \quad R^L\subset R^{m+1}$$

则 R^L是m维线性空间，且R^L与R^m正交，并可知$Z_a(\boldsymbol{x}^0)\subseteq R^L$.

定义

$$F_L(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}t),z)=z-L(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}t),\boldsymbol{\omega}_d)=0 \qquad —(6.5.3.5)$$

其中的$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}_d)$由(6.5.3.3)式定义.

对于全体$\boldsymbol{\alpha}\in Z_f(\boldsymbol{x}^0)$，$t$、$z\in R$，$F_L(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}t),z)$给出了$R^L$空间上的一个曲面$L_F$. 对于任一给定的$\boldsymbol{\alpha}\in Z_f(\boldsymbol{x}^0) \quad \boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，则

$$F_L(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}t),z)=F_L(t,z)=0$$

可以看成是曲面L_F与法截坐标平面Otz的交曲线. 其中Otz坐标系的原点在$\boldsymbol{x}^0$点，t轴即是R^m空间中的$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}t)$直线.

这样，可得到在$t=z=0$处$F_L(t,z)$的一、二阶偏导数

$$\frac{\partial F_L}{\partial t}=-\nabla_x L^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\omega}_d)\boldsymbol{\alpha}=0 \qquad \frac{\partial F_L}{\partial z}=1$$

$$\frac{\partial^2 F_L}{\partial t^2}=-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\alpha} \qquad \frac{\partial^2 F_L}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 F_L}{\partial t\partial z}=\frac{\partial^2 F_L}{\partial z\partial t}=0$$

并由此得到$F_L(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}),z)$沿$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}t)$直线方向上的在$\boldsymbol{x}^0$处的法截曲率

$\kappa_L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\alpha})$,

$$\kappa_L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F_L}{\partial t^2} & \dfrac{\partial^2 F_L}{\partial t \partial z} & \dfrac{\partial F_L}{\partial t} \\ \dfrac{\partial^2 F_L}{\partial z \partial t} & \dfrac{\partial^2 F_L}{\partial z^2} & \dfrac{\partial F_L}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_L}{\partial t} & \dfrac{\partial F_L}{\partial z} & 0 \end{vmatrix}}{\left(\left(\dfrac{\partial F_L}{\partial t}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F_L}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}_d)\boldsymbol{\alpha} \qquad —(6.5.3.6)$$

(6.5.3.6)式从另一个角度，将二次型 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}_d)\boldsymbol{\alpha}$ 看成为以(6.5.3.5)式定义的 R^L 空间上的一个曲面的法截曲率 $\kappa_L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\alpha})$. 这个定义的几何意义与从给定的 $\boldsymbol{\alpha} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \subset Z_f(\boldsymbol{x}^0)$ 构造出 $z(t)$ 曲线，并得到的(6.5.2.34)式的几何意义是有区别的[1].

(6.5.2.34)式是指的 $\boldsymbol{x}$ 沿某个 $\boldsymbol{\alpha} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$（或拓展为 $\boldsymbol{\alpha} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$）$\boldsymbol{\alpha} \neq 0$ 的方向向量所决定的 $g_{i_j}(x) = 0$ 边界曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域的交曲线 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 上趋近于 $\boldsymbol{x}^0$ 时，$f(\boldsymbol{x})$ 趋近于 $f(\boldsymbol{x}^0)$ 的二阶导数. 而(6.5.3.6)式则是指的 R^L 空间上 $F_L(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}t), \boldsymbol{\omega}_d)$ 曲面沿 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向的法截曲率. 这一法截曲率是由 $\boldsymbol{x}$ 沿 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}t)$ 直线趋近于 $\boldsymbol{x}^0$ 时 $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}_d)$ 趋近于 $L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}_d)$ 的二阶导数. 一般地，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}t)$ 直线与 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 交曲线是不同的. 并且，因为已假设二阶约束品性(Ⅱ)成立，故 $\boldsymbol{x}(\theta) \subset X \quad \theta \in [0, \varepsilon]$，当 $\boldsymbol{x}$ 沿 $\boldsymbol{x}(\theta)$ 曲线趋近于 $\boldsymbol{x}^0$ 时，注意到

$$g_{i_j}(\boldsymbol{x}(\theta)) = 0 \quad i_j \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$$

所以，这时的 $L(\boldsymbol{x}(\theta), \boldsymbol{\omega}_d) = f(\boldsymbol{x}(\theta))$，即 $L(\boldsymbol{x}(\theta), \boldsymbol{\omega}_d)$ 与 $f(\boldsymbol{x}(\theta))$ 是重合的；而当 $\boldsymbol{x}$ 沿 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}t)$ 直线趋近于 $\boldsymbol{x}^0$ 时，一般地可能并不成立 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}t) \subset X$，故此时 $L(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}t), \boldsymbol{\omega}_d) \neq f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}t))$.

注意，(6.5.2.44)式、(6.5.2.51)式本质上都是由(6.5.2.34)式推导出来的. 现在，(6.5.3.6)式表明，要判断(6.5.2.44)式或(6.5.2.51)式是否成立的问题，可以通过分析 R^L 空间上的 $F_L(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}t), z)$ 曲面在 $t = z = 0$（即在 R^m 空间的 $\boldsymbol{x}^0$ 点）处的法截曲率的符号加以解决. 这就是(6.5.3.6)式的意义所在.

由法截曲率的定义，可以将 $\kappa_L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\alpha})$ 表示成以下形式

$$\kappa_L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}_d)\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}} \qquad \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0 \quad —(6.5.3.7)$$

---

[1] 注意，(6.5.3.6)式右边的二次型前没有"－"号. 这一点与(2.2.1.9)式不同.

这样 $\kappa_L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\alpha})$ 关于 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向向量取极值的主法方向曲率，就是

$$\begin{vmatrix} \mu I - \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}_d) & \nabla f(\boldsymbol{x}^0) \\ \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad —(6.5.3.8)$$

式决定的 $m-1$ 个拟特征根. 显然，若(6.5.3.8)式的 $m-1$ 个拟特征根 $\mu_i \geqslant 0$ (或 $\mu_i \leqslant 0$)，(6.5.2.44)式(或(6.5.2.51)式)的判定问题就可以解决了. 这时总有

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}_d)\boldsymbol{\alpha} \begin{cases} \geqslant 0 \\ \leqslant 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{\alpha} \neq 0 \quad \boldsymbol{\alpha} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \quad 当\ \mu_i \begin{cases} \geqslant 0 \\ \leqslant 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, m-1$$

但一般地，应考虑 μ_i 中既有正数、0 特征根同时又有负数拟特征根的情形.

由(6.5.2.51)式，在 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) \subset \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 时，(6.5.2.51)式成立的必要条件显然是(6.5.2.36)式应成立. 由此即知，要使(6.5.2.51)式成立，其必要条件即是(6.5.3.1)式决定的 $m-d$ 个拟特征根中至少有 $m-r$ 个根是大于等于 0 的.

设(6.5.3.1)式决定的 $m-d$ 个拟特征根中，有 $m-r$ 个是非负的，其余的 $r-d$ 个拟特征根中，如果也全是非负的，那么(6.5.2.51)式就成立. 若余下的 $r-d$ 个拟特征根中含有负数根，就必须进一步予以考察. 注意到推论 3.2.4.26 的存在，故若(6.5.3.1)式中含有负数拟特征根，那么，(6.5.3.8)式决定的 $m-1$ 个拟特征根中一定也含有负数根. 此时，可以说 $F_L(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}t), z)$ 决定的曲面(记为 L_F)在 R^L 上的原点(即 R^m 的 $\boldsymbol{x}^0$ 点)处一定是鞍面. 由关于鞍面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的切空间上的法截曲率正、负分区的结论，可以将 L_F 曲面在

$$L_f:\ \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0$$

决定的切超平面 L_f 上，曲率的正、负分区确定下来.

设 $L_f^+(\boldsymbol{x}^0)$、$L_f^-(\boldsymbol{x}^0)$ 和 $L_f^0(\boldsymbol{x}^0)$ 是 L_F 曲面在切超平面 L_f 上的分区，那么，$L_f^+(\boldsymbol{x}^0)$、$L_f^-(\boldsymbol{x}^0)$、$L_f^0(\boldsymbol{x}^0)$ 一定是 L_f 上的顶点在原点(即 R^m 中的 $\boldsymbol{x}^0$ 点)的闭锥(及闭锥的并集合)，并可以注意到决定 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合的等式方程组

$$\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0 \qquad i \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$$

决定了 L_f 超平面上的一个子集合(交平面集合)，而不等式方程组

$$\nabla g_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} \geqslant 0 \qquad j \in I(\boldsymbol{x}^0) - \hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$$

则限定了一个顶点在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的 R^m 空间的闭锥. 这就是(6.4.2.22)式[1]，

---

〔1〕 为与前几章公式中的符号一致，以下延用 z 符号表示可行方向向量.

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^1 + \boldsymbol{z}^+ \quad \boldsymbol{z}^1 \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) \quad \boldsymbol{z}^+ \in \hat{Z}^1_+(\boldsymbol{x}^0)\}$$
—(6.4.2.22)

由以上已叙述过的(6.5.2.51)式成立的必要条件是对所有

$$\boldsymbol{z} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) \subset \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$$

并将 $\boldsymbol{\omega}_d$ 简记为 $\boldsymbol{\omega}$(或者说规定 $\boldsymbol{\omega}$ 均是基乘子向量),有

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z} \geqslant 0$$

成立,再由以上关于 $\boldsymbol{x}^0$ 点处鞍面曲率正、负分区的分析,(6.5.2.51)式成立,还必须有

$$\boldsymbol{z} \in \hat{Z}^1_+(\boldsymbol{x}^0) \Rightarrow \boldsymbol{z} \in L_f^+(\boldsymbol{x}^0) \cup L_f^0(\boldsymbol{x}^0) \qquad \text{—(6.5.3.9)}$$

式成立.这也是一个必要条件.

由此即得以下定理.

定理 6.5.3.1 Lagrange 函数二次型(约束)半正定的充要条件

对于(P1)规划,设 $\boldsymbol{x}^0 \in X$,并设 $\boldsymbol{x}^0$ 点处一阶约束品性与二阶约束品性(Ⅱ)成立,$\boldsymbol{\omega}$ 是满足一阶必要条件的乘子,且 $\nabla g_j(\boldsymbol{x}^0)$, $j \in \hat{I}(\boldsymbol{x}^0)$ 则二次型

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z} \geqslant 0 \qquad \boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \qquad \text{—(6.5.2.51)}$$

成立的充要条件是

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z} \geqslant 0 \qquad \boldsymbol{z} \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$$

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z} \geqslant 0 \qquad \boldsymbol{z} \in \hat{Z}^1_+(\boldsymbol{x}^0)$$

以及

$$((\boldsymbol{z}^1)^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z}^+)^2 \leqslant (\boldsymbol{z}^1)^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z}^1 \cdot (\boldsymbol{z}^+)^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z}^+$$
$$\boldsymbol{z}^1 \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) \quad \boldsymbol{z}^+ \in \hat{Z}^1_+(\boldsymbol{x}^0) \qquad \text{—(6.5.3.10)}$$

■

若将以上条件中的不等式改为严格不等式,就是二次型正定,即

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z} > 0 \qquad \boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \quad \boldsymbol{z} \neq 0 \qquad \text{—(6.5.2.44)}$$

的充要条件.

若记

$$A_1 = (\boldsymbol{z}^1)^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z}^1 \quad \boldsymbol{z}^1 \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$$

$$A_2 = (\boldsymbol{z}^+)^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z}^1 \quad \boldsymbol{z}^+ \in \hat{Z}_+^1(\boldsymbol{x}^0)$$

$$A_3 = (\boldsymbol{z}^1)^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z}^+$$

则对于 $\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 且 $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$ 的向量 $\boldsymbol{z}$，二次型

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z} = A_1 + A_2 + 2A_3 \qquad \text{—(6.5.3.11)}$$

显然，A_1，A_2 必须是非负的. 若否，注意 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^1 + \boldsymbol{z}^+$，且单独的 $\boldsymbol{z}^1$、$\boldsymbol{z}^+$ 是可以取为 $\boldsymbol{0}$ 向量(即 $\boldsymbol{z}^1$、$\boldsymbol{z}^+$ 不能取为同时为 $\boldsymbol{0}$). 故，如 $A_1 < 0$，则取 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^1$ 即知 $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z} < 0$，对 $A_2 < 0$ 类似. 而在 A_1、A_2 非负时，若(6.5.3.10)式成立，则可以设有 $0 \leqslant a \leqslant 1$，使

$$A_3^2 = a^2 A_1 A_2 \Rightarrow |A_3| = a\sqrt{A_1 A_2}$$

注意，由 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合的构造，$\boldsymbol{z}^1 \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$，总可表成

$$\boldsymbol{z}^1 = \Lambda \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{v} \in R^{m-r}$$

故选取 $\boldsymbol{v}$ 或 $-\boldsymbol{v}$，可以取到 $A_3 \leqslant 0$ 也可以取到 $A_3 \geqslant 0$.
即有

$$A_1 + A_2 + 2A_3 \geqslant A_1 + A_2 - 2a\sqrt{A_1 A_2}$$

于是即知在(6.5.3.10)式成立(且 A_1，$A_2 \geqslant 0$) 时，有

$$A_1 + A_2 + 2A_3 \geqslant A_1 + A_2 - 2a\sqrt{A_1 A_2} = (1-a)(A_1 + A_2) + a(\sqrt{A_1} - \sqrt{A_2})^2 \geqslant 0$$

此即表示(6.5.2.51)式成立.

(6.5.3.10)式的必要性可从以下分析得知. 注意 $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$、$\hat{Z}_+^1(\boldsymbol{x}^0)$ 都是锥集合，故若有任意的 $\pm\boldsymbol{z}^1 \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$、$\boldsymbol{z}^+ \in \hat{Z}_+^1(\boldsymbol{x}^0)$，使 $\boldsymbol{z} = \pm\boldsymbol{z}^1 + \boldsymbol{z}^+$，有

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z} \geqslant 0$$

则可选取 $\boldsymbol{z}^1$ 或 $-\boldsymbol{z}^1$，使 $A_3 \leqslant 0$，不妨设取 $\boldsymbol{z}^1$ 便有 $A_3 \leqslant 0$. 再取任意的非负实数 λ、ζ，因为 $\lambda\boldsymbol{z}^1 \in \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$、$\zeta\boldsymbol{z}^+ \in \hat{Z}_+^1(\boldsymbol{x}^0)$，从而，(6.5.2.51)式成立，应要求取 $\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{z}^1 + \zeta\boldsymbol{z}^+$，有

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z} = \lambda^2 A_1 + \zeta^2 A_2 - 2\lambda\zeta |A_3| \geqslant 0 \quad (\lambda, \zeta \geqslant 0)$$

由下一节的定理 6.5.4.1 即可推知(6.5.3.10)式的必要性.

这里易知，若$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$矩阵自身即是(半)正定的，那么，(6.5.2.51)式自然是成立的. 反之，若$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$矩阵是(半)负定的，那么，(6.5.2.51)式的不等

号就要反向. 在这两种情形下,判定问题即已解决. 因此,以下的分析是要给出一个在$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$矩阵为不定矩阵时,对(6.5.2.51)式是否成立的判别方法.

在本节以下内容中,先利用 L_F 曲面在 L_f 切平面上的正、负曲率分区的方法,给出(6.5.3.9)式成立与否的一个简单的分析及利用拟特征向量的谱分解方法给出一个(6.5.2.51)式成立与否的充分条件. 在下一节再给出关于定理6.5.3.1的一般的判别方法.

以下再给出 L_F 曲面在 L_f 切平面上的正、负曲率分区的方法. 类似前 2 章已叙述的,引进辅助参量 $\eta(\eta \in R)$,则对应于(6.5.3.8)式的拟特征根 μ_i 的拟特征向量记为 $\boldsymbol{\gamma}^i$. $\boldsymbol{\gamma}^i$由下式给出

$$\begin{cases}(\nabla^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) - \mu_i I)\boldsymbol{\gamma}^i - \nabla f(\boldsymbol{x}^0)\eta = \boldsymbol{0} \\ \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\gamma}^i = 0 \\ \|\boldsymbol{\gamma}^i\| = 1\end{cases} \qquad \text{—(6.5.3.12)}$$

利用(6.5.3.8)式、(6.5.3.12)式,由本书前 2 章给出的方法,就可以确定 L_F 曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的正、负法曲率方向在 L_f 切平面上的分区表示[1].

以下先给出一个简单的示例已说以上的分析方法.

例 6.5.3.1 利用例 6.4.1.2(参见图 6.4.1.1)的结果,给出利用曲率符号分区方法判断(6.5.2.47)式的示例.

由例 6.4.1.2 的结果知在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处有

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

由(6.5.3.8)式易知$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$矩阵的拟特征值是

$$\mu_1 = \mu_2 = 4$$

由

$$(\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) - \mu_i I)\boldsymbol{\gamma}^i - \nabla f(\boldsymbol{x}^0)\eta = 0$$

可得 $\eta = 0$,由切平面 L_f 的方程

$$L_f: \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\gamma}^i = 0 \Rightarrow -2\gamma_3^i = 0$$

从而基础解系是

$$\boldsymbol{\gamma}^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad i = 1, 2$$

[1] 参见本书§3.4 节.

不妨记
$$\boldsymbol{\gamma}^1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{\gamma}^2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

显然 $\boldsymbol{\gamma}^{1,2}$就是 $\mu_{1,2}$所对应的 2 个拟特征向量.但从
$$\|\boldsymbol{\gamma}^{1,2}\|=1$$
可得到的拟特征向量共有
$$\boldsymbol{\gamma}^1=\begin{bmatrix}\pm 1\\0\\0\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{\gamma}^2=\begin{bmatrix}0\\\pm 1\\0\end{bmatrix}$$
任取 $\boldsymbol{\gamma}^1$、$\boldsymbol{\gamma}^2$ 非 0 分量前的＋、－号并加以组合,都是 $\mu_{1,2}$对应的特征向量.这样的符号组合即
$$(\boldsymbol{\gamma}^1,\boldsymbol{\gamma}^2)_{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\quad (\boldsymbol{\gamma}^1,\boldsymbol{\gamma}^2)_{\mathrm{II}}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\quad (\boldsymbol{\gamma}^1,\boldsymbol{\gamma}^2)_{\mathrm{III}}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\\0&0\end{bmatrix}$$
$$(\boldsymbol{\gamma}^1,\boldsymbol{\gamma}^2)_{\mathrm{IV}}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\\0&0\end{bmatrix}$$

在以 $\boldsymbol{\gamma}^1$、$\boldsymbol{\gamma}^2$ 为基所决定的 L_f 切平面上以 $\boldsymbol{x}^0$ 为原点的正交坐标系上,对应了坐标系的第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ象限.由已叙述过的曲面上一点的法截曲率符号分区在各象限上的对称关系即知,对于$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$中的任一方向向量 $\boldsymbol{z}$,用$(\boldsymbol{\gamma}^1,\boldsymbol{\gamma}^2)_{\mathrm{I},\cdots,\mathrm{IV}}$中的某一个作为基一定能得到 $\boldsymbol{z}$ 在$(\boldsymbol{\gamma}^1,\boldsymbol{\gamma}^2)$基下的坐标 $\boldsymbol{z}^{\gamma}$.若 $\boldsymbol{z}^{\gamma}$坐标能落在该象限的正曲率分区内,则沿 $\boldsymbol{z}$ 方向向量决定的交曲线 $\boldsymbol{x}(\theta)$上,二次型(6.5.2.51)式一定成立.

由例 6.4.1.2,现在在切平面 L_f 的任一方向上,$F_L(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}t),z)$在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的曲率均是正的,故 $L_f^+=L_f$. 且已知
$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)=\left\{\boldsymbol{z}\,\middle|\,\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}v\quad t\in R\quad v\geqslant 0\right\}$$
故
$$\boldsymbol{z}\in\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)\Rightarrow\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}v\\t\\0\end{bmatrix}\quad t\in R\quad v\geqslant 0$$

这样的 $\boldsymbol{z}$ 显然是切平面 L_f 上的方向向量,故 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)\subset L_f^+$ 即(6.5.3.9)式成立.

例 6.5.3.2

$$\min \quad f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 1)^3 + 2x_2^2 - 3x_3^{\frac{3}{2}} - x_4^2$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = 10 - x_1^2 - 2x_2^2 - (x_3 + 2)^2 + x_4 \geqslant 0 \\ g_2(\boldsymbol{x}) = 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 6 \geqslant 0 \\ g_3(\boldsymbol{x}) = x_1(x_2 - 1) + x_3(x_4 + 4)^{\frac{1}{2}} - 1 \geqslant 0 \\ g_4(\boldsymbol{x}) = 2x_1 + x_2^2 + \dfrac{3}{2}x_3 - x_4 - \dfrac{7}{2} \geqslant 0 \\ g_5(\boldsymbol{x}) = x_3 \geqslant 0 \\ g_6(\boldsymbol{x}) = x_4 \geqslant -4 \end{cases}$$

取 $\boldsymbol{x}^0 = (1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$，给出 L_F 曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的法曲率符号分区.

有 $I(\boldsymbol{x}^0) = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{9}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla g_1(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\nabla g_3(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ \dfrac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \nabla g_4(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \dfrac{3}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

可方便地取 $\boldsymbol{\omega} = (1, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ $\quad \hat{I}(\boldsymbol{x}^0) = \{1, 4\}$. 注意 $G(\boldsymbol{x}^0)$ 可逆，$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{0}\}$. 可得

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{ \boldsymbol{z} \;\middle|\; \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -\dfrac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^2 \right\}$$

$$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

由

$$\begin{vmatrix} \mu-2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu-6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu+\dfrac{1}{4} & 0 & -\dfrac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \mu+2 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{9}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu_1 = -2 \quad \mu_2 = 2 \quad \mu_3 = 6$$

拟特征值中含有正、负数.

对于 $\mu_1 = -2$，由

$$\begin{cases} (\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\omega}) - (-2)I)\boldsymbol{\gamma}^1 - \nabla f(\boldsymbol{x}^0)\eta = 0 \\ \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\gamma}^1 = 0 \end{cases}$$

可得到

$$\gamma_1^1 = \gamma_2^1 = \gamma_3^1 = 0$$

再由

$$\| \boldsymbol{\gamma}^1 \| = 1$$

即得

$$\boldsymbol{\gamma}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{bmatrix}$$

同理可得

$$\boldsymbol{\gamma}^2 = \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\gamma}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由拟特征向量的 $\boldsymbol{\gamma}^{1,2,3}$ 的±符号组合，可将切平面(为 3 维线性子空间)划分成 8 个象限. 以 $\boldsymbol{\gamma}^{1,2,3} \geqslant \mathbf{0}$ 为基向量构造 L_f 切平面上原点在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的坐标系$Ot_1t_2t_3$ 为例.

在 $\boldsymbol{\gamma}^{1,2,3}$ 为基的坐标系上，$\boldsymbol{\gamma}^{1,2,3} \geqslant 0$ 象限上的正(非负)曲率分区由以下不等式组决定(其中 t_i 是以 $\boldsymbol{\gamma}^1$、$\boldsymbol{\gamma}^2$、$\boldsymbol{\gamma}^3$ 为基的坐标分量值)

$$\begin{cases} -2t_1 + 2t_2 + 6t_3 \geqslant 0 \\ t_1 + t_2 + t_3 = 1 \\ t_1,\ t_2,\ t_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

这一等式一不等式方程组的解是

$$\boldsymbol{t}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{s} \qquad \boldsymbol{s}\geqslant\boldsymbol{0} \qquad s_1+s_2+s_3+s_4=1$$

曲率的分区的割平面图形如下图 6.5.3.2

将以上的 $\boldsymbol{t}$ 表示为

$$\boldsymbol{t}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}s_1+\frac{3}{4}s_2\\ \frac{1}{2}s_1+s_3\\ \frac{1}{4}s_2+s_4\end{bmatrix} \qquad s_i\geqslant 0 \qquad \sum_i s_i=1$$

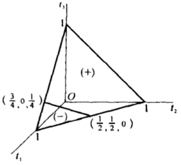


图 6.5.3.2

并利用坐标开方变换，可导出在 R^3 空间上即 L_f 切超平面上，从 $\boldsymbol{x}^0$ 点出发且使二次型（即$F_L(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}),z)$曲面的法曲率）

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\alpha}\geqslant 0$$

的方向向量 $\boldsymbol{\alpha}$，应有以下形式

$$\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{1}{2}s_1+\frac{3}{4}s_2\right)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\gamma}^1+\left(\frac{1}{2}s_1+s_3\right)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\gamma}^2+\left(\frac{1}{4}s_2+s_4\right)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\gamma}^3$$

易证这样的 $\boldsymbol{\alpha}$，有 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\alpha}=2s_3+6s_4\geqslant 0 \quad 0\leqslant s_3+s_4\leqslant 1$（不论取 $\boldsymbol{\gamma}^{1,2,3}\geqslant 0$ 或取 $\boldsymbol{\gamma}^{1,2,3}\leqslant 0$）或者说是

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}\pm\left(\frac{1}{2}s_1+s_3\right)^{\frac{1}{2}}\\ \pm\left(\frac{1}{4}s_2+s_4\right)^{\frac{1}{2}}\\ 0\\ \pm\left(\frac{1}{2}s_1+\frac{3}{4}s_2\right)^{\frac{1}{2}}\end{bmatrix}$$

注意可将 $\boldsymbol{z}\in\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 表示为 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}^+\in\hat{Z}_+^1(\boldsymbol{x}^0)$

$$z = z^{+} = D_{+}\,u \quad u \in R_{+}^{2} \qquad D_{+} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -\dfrac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = [d_{+}^{1},\ d_{+}^{2}]$$

d_{+}^{1}、d_{+}^{2} 是 D_{+} 矩阵的第 1、2 列向量. 则在(γ^{1}, γ^{2}, γ^{3})坐标系上, $d_{+}^{1,2}$ 的坐标是 $\tilde{d}_{+}^{1,2}$

$$\tilde{d}_{+}^{1} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \tilde{d}_{+}^{2} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

即 $\tilde{d}_{+}^{1}$ 位于($-\gamma^{1}$, $-\gamma^{2}$, $-\gamma^{3}$)象限, $\tilde{d}_{+}^{2}$ 位于($-\gamma^{1}$, $-\gamma^{2}$, $+\gamma^{3}$)象限.

在($-\gamma^{1}$, $-\gamma^{2}$, $-\gamma^{3}$)象限, R^{3} 坐标系上的非负的法曲率方向向量 α 所在区域应为

$$\alpha = -\left(\frac{1}{2}s_{1} + \frac{3}{4}s_{2}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma^{1} - \left(\frac{1}{2}s_{1} + s_{3}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma^{2} - \left(\frac{1}{4}s_{2} + s_{4}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma^{3}$$

或说是

$$\alpha = \begin{bmatrix} -\left(\dfrac{1}{2}s_{1} + s_{3}\right)^{\frac{1}{2}} \\ -\left(\dfrac{1}{4}s_{2} + s_{4}\right)^{\frac{1}{2}} \\ 0 \\ -\left(\dfrac{1}{2}s_{1} + \dfrac{3}{4}s_{2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

注意 s_{i} 是权参数. 故由上式决定的 α 集合的线性近似锥集合可表示成 R^{4} 空间中标准坐标系的以下凸组合,

$$\alpha = T^{1}s,\ T^{1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix},\ s \geqslant 0 \quad \sum_{i} s_{i} = 1$$

这里 T^1 矩阵即是 $(-\boldsymbol{\gamma}^1, -\boldsymbol{\gamma}^2, -\boldsymbol{\gamma}^3)$ 象限上非负法曲率分区的线性近似锥的极方向量向量组矩阵(参见 §3.4.1 节).

类似地,在 $(-\boldsymbol{\gamma}^1, -\boldsymbol{\gamma}^2, +\boldsymbol{\gamma}^3)$ 象限里,非负法曲率方向向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 所在区域应为

$$\boldsymbol{\alpha} = -\left(\frac{1}{2}s_1 + \frac{3}{4}s_2\right)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\gamma}^1 - \left(\frac{1}{2}s_1 + s_3\right)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\gamma}^2 + \left(\frac{1}{4}s_2 + s_4\right)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\gamma}^3$$

应有

$$\boldsymbol{\alpha} = T^2\boldsymbol{s},\ T^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \sum_i s_i = 1$$

注意,以 $\boldsymbol{\alpha} = T^{1,2} \cdot \boldsymbol{s}$ 形式表示的方向向量,已转换到由 R^4 坐标系表示.

容易验证,在 R^4 坐标系上,D_+ 的列向量

$$\boldsymbol{d}_+^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{d}_+^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

中,$\boldsymbol{d}_+^1$ 不能表示成

$$\boldsymbol{d}_+^1 = T^1\boldsymbol{s}\lambda \quad \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \sum_i s_i = 1 \qquad \lambda > 0$$

的形式,只有 $\boldsymbol{d}_+^2$ 可表示成

$$\boldsymbol{d}_+^2 = T^2\boldsymbol{s}\lambda,\ \sum_i s_i = 1,\ \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 1 \\ 2\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{bmatrix},\ \lambda = 1$$

由此即知

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \cap (L_f^+(\boldsymbol{x}^0) \cup L_f^0(\boldsymbol{x}^0)) \neq \varnothing$$

但有

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \hat{Z}^1_+(\boldsymbol{x}^0) \not\subseteq (L_f^+(\boldsymbol{x}^0) \cup L_f^0(\boldsymbol{x}^0))$$

所以，所有的 $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$ $\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 中，二次型

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z}$$

的符号，一定可以取到正值，也可以取到负值的. 事实上，由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \quad \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z} &= \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} D_+^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) D_+ \boldsymbol{u} \\ &= -\frac{9}{2}u_1^2 - 36u_1u_2 + 90u_2^2 \quad u_1、u_2 \geqslant 0\end{aligned}$$

如令 $u_1 = 0$，$u_2 > 0$ 则二次型取正值，令 $u_1 > 0$，$u_2 = 0$ 则二次型取负值. 即知本例中 $\boldsymbol{x}^0$ 不是局部极小值点.

例 6.5.3.3

$$\min \quad f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 - 2\left(x_2 + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{2}(x_3 - 1)^2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 \geqslant 0 \\ g_2(\boldsymbol{x}) = x_1 - 4x_2 + x_3^2 \geqslant 0 \\ g_3(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}(x_3 + 1)^2 - \frac{1}{2} \geqslant 0 \end{cases}$$

取 $\boldsymbol{x}^0 = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ 检验二阶最优性条件是否成立.

由

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \nabla g_1(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla g_3(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

取 $\boldsymbol{\omega} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ $I(\boldsymbol{x}^0) = \{1, 2, 3\}$ $\hat{I}(\boldsymbol{x}^0) = \{1\}$

$$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$G(\boldsymbol{x}^0)$矩阵可逆. $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{0}\}$

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{ \boldsymbol{z} \middle| \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u} \in R_+^2 \right\}$$

由
$$\begin{vmatrix} \mu-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu+4 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \mu+1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu_1 = -\frac{17}{5} \quad \mu_2 = 2$$

$\mu_1 = -\frac{17}{5}$ 时，拟特征向量 $\boldsymbol{\gamma}^1$ 由下式决定

$$\begin{cases} \frac{27}{5}\gamma_1^1 = 0 \\ -\frac{3}{5}\gamma_2^1 + \frac{1}{2}\eta = 0 \\ \frac{12}{5}\gamma_3^1 - \eta = 0 \\ -\frac{1}{2}\gamma_2^1 + \gamma_3^1 = 0 \\ \|\boldsymbol{\gamma}^1\| = 1 \end{cases}$$

得

$$\boldsymbol{\gamma}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

在 $\mu_2 = 2$ 时，类似地可得到

$$\boldsymbol{\gamma}^2 = \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

再由

$$\begin{cases} -\dfrac{17}{5}t_1 + 2t_2 \geqslant 0 \\ t_1 + t_2 = 1 \\ t_1,\ t_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

方程组,可解出

$$\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} \dfrac{10}{27} & 0 \\ \dfrac{17}{27} & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{s} \qquad \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad s_1 + s_2 = 1$$

或写成为

$$\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} \dfrac{10}{27}s_1 \\ \dfrac{17}{27}s_1 + s_2 \end{bmatrix}$$

则非负法曲率方向向量的 $\boldsymbol{\alpha}$ 是

$$\boldsymbol{\alpha} = \pm\left(\frac{10}{27}s_1\right)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\gamma}^1 \pm \left(\frac{17}{27}s_1 + s_2\right)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\gamma}^2$$

这仍是以 $\boldsymbol{\gamma}^1$、$\boldsymbol{\gamma}^2 \geqslant 0$ 构造的切平面 L_f 上的原点在 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 Ot_1t_2 坐标系上的表示.

类似上例中的符号 D_+ 矩阵在 Ot_1t_2 坐标系中的表示是

$$\widetilde{D}_+ = [\tilde{\boldsymbol{d}}_+^1,\ \tilde{\boldsymbol{d}}_+^2] = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

故$\tilde{\boldsymbol{d}}_+^{1,2}$均位于$(+\boldsymbol{\gamma}^1,\ +\boldsymbol{\gamma}^2)$象限上.在这一象限上非负法曲率方向向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的分区是

$$\boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{10}{27}s_1\right)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\gamma}^1 + \left(\frac{17}{27}s_1 + s_2\right)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\gamma}^2 \qquad (\boldsymbol{\gamma}^1、\boldsymbol{\gamma}^2 \geqslant 0)$$

应有线性近似表示

$$\boldsymbol{\alpha} = T\boldsymbol{s},\ T = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{17}{3}} & 1 \\ \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}} & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{s} \geqslant 0 \quad s_1 + s_2 + s_3 = 1$$

则由

$$\boldsymbol{d}_+^1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=T\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{d}_+^2=\begin{bmatrix}4\\1\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}=T\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\\0\\4\end{bmatrix}$$

知

$$\hat{Z}_+^1(\boldsymbol{x}^0)=\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)\subset L_f^+(\boldsymbol{x}^0)$$

由此即知对任一 $\boldsymbol{z}\in\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$，$\boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{0}$ 有

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\nabla_x^2L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z}>0$$

成立.

实际上易知 $\boldsymbol{z}\in\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)\quad \boldsymbol{z}\neq 0$

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\nabla_x^2L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z}=2u_1^2+16u_1u_2+27.75u_2^2\quad(u_1、u_2\geqslant 0)$$

在 u_1 或 $u_2>0$ 时，以上二次型恒取正值. 故本例中的 $\boldsymbol{x}^0$ 点是严格局部极小值点.

这里应指出，上例与本例所利用的 D_+ 矩阵的各列向量 $\boldsymbol{d}_+^i$ 能否被 L－函数的非负法曲率分区的线性近似锥的极方向向量(即上述矩阵 T 的列向量)以正线性组合表出的判别方法，只是定理 6.5.3.1 的成立的必要条件(详见下节分析).

注意，对 $\boldsymbol{z}\in\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 取

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}^1+\boldsymbol{z}_+^1\qquad \boldsymbol{z}^1\in\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)\qquad \boldsymbol{z}_+^1\in\hat{Z}_+^1(\boldsymbol{x}^0)$$

的形式. 以上已说明了，二次型(见(6.5.2.36)式)

$$(\boldsymbol{z}^1)^{\mathrm{T}}\nabla_x^2L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z}^1\qquad \boldsymbol{z}^1\in\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$$

的符号判断，可方便地利用(6.5.2.43)式决定的拟特征值多项式的根的符号予以解决. 而二次型

$$(\boldsymbol{z}_+^1)^{\mathrm{T}}\nabla_x^2L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z}_+^1=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}D_+^{\mathrm{T}}\nabla_x^2L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\omega})D_+\boldsymbol{u}\qquad \boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}$$

这里设

$$\hat{Z}_+^1(\boldsymbol{x}^0)=\{\boldsymbol{z}\mid\boldsymbol{z}=D_+\boldsymbol{u}\qquad \boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}\}$$

则若记

$$LD = D_+^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) D_+ \qquad —(6.5.3.13)$$

则若(6.5.3.9)式成立

$$(\boldsymbol{z}_+^1)^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{z}_+^1 = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} LD\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad —(6.5.3.14)$$

显然,通过判断 LD 在约束 $\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$ 条件下的有定性质也就可以判断(6.5.3.14)式的符号问题了.这通常比利用曲率符号分区的检验方法来得简便.但曲率符号分区方法可以更准确地给出(6.5.3.14)式符号判断问题的几何意义[1].但在下一节中,会利用(6.5.3.14)式给出更简便的约束二次型(半)正定的判别方法.

当然,也可以直接利用$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$矩阵的特征值及特征向量来判断(6.5.3.14)式的符号问题.

设 λ_i, $i = 1, 2, \cdots, m$ 是$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$矩阵的 m 个特征值.如果 $\lambda_i \geqslant 0$ (或 $\lambda_i \leqslant 0$)对所有 i 下标成立,那么(6.5.3.14)式的符号就已经有了定论.一般地,设 λ_i 中既含有正数同时又含有负数特征值.用 λ_i^+ 、λ_j^- 分别表示正数、负数特征值. $\lambda_i^+ > 0$, $\lambda_j^- < 0$ $\quad i = 1, 2, \cdots, n^+ \quad j = 1, 2, \cdots, n^-$,且 $n^+ + n^- \leqslant m$.用 $\lambda_k^0 = 0$ 表示 0 特征值. $k = 1, 2, \cdots, k_0 \quad k_0 = \max[0, m - (n^+ + n^-)]$.

由以下定理 6.5.3.2 可知在 $\boldsymbol{x}^0$ 满足二阶必要条件时,总有 $0 \leqslant n^- \leqslant r$.

这是因为,由实对称矩阵特征值分割其加边矩阵的拟特征值的性质,可以得到

定理 6.5.3.2 如果(6.5.2.36)式成立,那么$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$空间的正交补空间的维数大于或等于$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$矩阵的负特征根的个数(计算根的重数)[2]. ■

证明: $\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$空间的正交补空间的维数显然是 $r = \mathrm{rank}(G(\boldsymbol{x}^0))$,且由于$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$的 m 个特征值 λ_i 是分割(6.5.2.43)式表示的 $m-r$ 个拟特征值 μ_j 的, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, m-r$,所以,如果(6.5.2.36)式成立,即有 $\mu_j \geqslant 0$,这即表示 λ_i 中最多只能有 r 个特征值$\leqslant 0$,如以下分割

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_r \leqslant 0 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_{r+1} \leqslant \mu_2 \leqslant \lambda_{r+2} \leqslant \cdots \leqslant \mu_{m-r} \leqslant \lambda_m$$

即知结论.

注意$\hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0)$的正交补空间即是$\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) \quad i \in I(\boldsymbol{x}^0)$向量组生成的空间.

再设 $\boldsymbol{\beta}_+^i$、$\boldsymbol{\beta}_-^j$、$\boldsymbol{\beta}_0^k$分别是 λ_i^+ 、λ_j^- 及 0 特征值对应的(单位)特征向量.各个 $\boldsymbol{\beta}$ 特征向量均为列向量.构造矩阵

---

[1] 注意,由(6.5.3.15)式,成立 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} LD\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$,并不一定要求 LD 矩阵(半)正定.如 LD 是不定矩阵,对 $\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$,也可以有 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} LD\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$ 成立.详见下节内容.

[2] 引自《全局优化引论》R Horst, P. M. Pardalos, N. V. Thoai,黄红选译,梁治安校,清华大学出版社,2003 年,第 28 页,定理 1.30.

$Q = [\boldsymbol{\beta}_+^i, \boldsymbol{\beta}_0^k, \boldsymbol{\beta}_-^j] \quad i = 1, 2, \cdots, n^+ \quad j = 1, 2, \cdots, n^- \quad k = 1, 2, \cdots, k_0$

则 Q 是正交变换矩阵，且

$$Q^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) Q = \begin{bmatrix} \lambda_1^+ & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \mathbf{0} & \\ & & \lambda_{n^+}^+ & & & & & & \\ & & & \lambda_1^0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_{k_0}^0 & & & \\ & & & & & & \lambda_1^- & & \\ & \mathbf{0} & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_{n^-}^- \end{bmatrix}$$

且由于 $$Q^{\mathrm{T}} Q = I \Rightarrow QQ^{\mathrm{T}} = I$$

故对于 $\boldsymbol{z}_+^1 \in \hat{Z}_+^1(\boldsymbol{x}^0)$，有

$$(\boldsymbol{z}_+^1)^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{z}_+^1 = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} D_+^{\mathrm{T}} QQ^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(x^0, \omega) QQ^{\mathrm{T}} D_+ \boldsymbol{u}$$

$$= \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} D_+^{\mathrm{T}} Q \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^+ & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \mathbf{0} & \\ & & \lambda_{n^+}^+ & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & \lambda_1^- & & \\ & \mathbf{0} & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_{n^-}^- \end{bmatrix} \cdot Q^{\mathrm{T}} D_+ \boldsymbol{u}$$

—(6.5.3.15)

设向量 $\boldsymbol{u}$ 的维数是 h 维 $(h \leqslant m)$. 乘积矩阵 $Q^{\mathrm{T}} D_+$ 就是 $m \times h$ 阶矩阵，记

$$Q^{\mathrm{T}} D_+ = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_m^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}$ 为(h 维)行向量.

(6.5.3.15)式就可以表示为

$$(\boldsymbol{z}_+^1)^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{z}_+^1 = \sum_{i=1}^{n^+} \lambda_i^+ \cdot (\boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u})^2 - \sum_{j=1}^{n^-} |\lambda_j^-| \cdot (\boldsymbol{q}_{n^+ + k_0 + j}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u})^2 \quad —(6.5.3.16)$$

显然,(6.5.3.16)式的符号 $\geqslant 0$ 的充分条件是

$$(\boldsymbol{\beta}_-^j)^{\mathrm{T}} D_+ = \boldsymbol{q}_{n^+ + k_0 + j}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0} \quad j = 1, 2, \cdots, n^- \quad —(6.5.3.17)$$

即$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$矩阵中负数特征值 λ_j^- 对应的特征向量 $\boldsymbol{\beta}_-^j$ 是与 D_+ 矩阵正交的向量,则 $\boldsymbol{q}_{n^+ + k_0 + j}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}$ 便成立.

再由以上利用拟特征值 μ_i 及拟特征向量 $\boldsymbol{\gamma}^i$ 所作的 L_F 曲面在 L_f 切平面上的法曲率非负分区的分析,如果(6.5.3.16)式的符号是非负的,那么,D_+ 矩阵的列向量 $\boldsymbol{d}_+^j$ 就可以由拟特征向量 $\boldsymbol{\gamma}^i$ 的线性组合表出并且刚好位于法曲率非负分区内. 故,设 D_+ 矩阵的列向量 $\boldsymbol{d}_+^j$ 由下式表出

$$\boldsymbol{d}_+^j = \sum_i^{m-1} t_{ij} \boldsymbol{\gamma}^i \quad —(6.5.3.18)$$

$\boldsymbol{\gamma}^i$ 是$\nabla^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$在 $\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0$ 约束下的拟特征向量. 那么,

$$(\boldsymbol{\beta}^j)^{\mathrm{T}} D_+ = \left(\sum_i^{m-1} t_{i1} (\boldsymbol{\beta}^j)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\gamma}^i,\ \sum_i^{m-1} t_{i2} (\boldsymbol{\beta}^j)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\gamma}^i,\ \cdots,\ \sum_i^{m-1} t_{ih} (\boldsymbol{\beta}^j)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\gamma}^i \right)$$

并由 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \subseteq Z_f(\boldsymbol{x}^0)$ 的性质,易知,将(6.5.3.16)式中的 $\boldsymbol{z}_+^1 \in \hat{Z}_+^1(\boldsymbol{x}^0)$,扩展为 $\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$,也是可以的,综合以上分析,即知以下定理.

定理 6.5.3.3 若$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$在 $\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0$ 约束下的拟特征值 μ_i 决定的拟特征值向量 $\boldsymbol{\gamma}^i$, $i = 1, 2, \cdots, m-1$ 与$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$ 矩阵的负数特征值 λ_i^- 决定的特征向量 $\boldsymbol{\beta}_-^j$, $j = 1, 2, \cdots, n^-$ 均是正交的,那么,对 $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$,

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{z} \geqslant 0$$

成立. ■

易见定理 6.5.3.3 给出的条件不是(6.5.2.51)成立的必要条件(如以上例 6.5.3.3).

以下示例用以说明定理 6.5.3.3 的充分条件

例 6.5.3.4

$$\min \quad f(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 - (x_2 - a)^2 \qquad a > \frac{1}{2}$$

$$\text{s. t.}\quad \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 + x_2 \geqslant 0 \\ g_2(\boldsymbol{x}) = -x_2 + b \geqslant 0 \quad (b > 0) \\ g_3(\boldsymbol{x}) = x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

取 $\boldsymbol{x}^0 = (0, 0)^{\mathrm{T}}$ 验证 $\boldsymbol{x}^0$ 处的最优性条件

由

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2a \end{bmatrix} \quad \nabla g_1(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \nabla g_3(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

不妨取 $\boldsymbol{\omega} = (2a, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ $\quad I(\boldsymbol{x}^0) = \{1, 3\}$ $\quad \hat{I}(\boldsymbol{x}^0) = \{1\}$.

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) = \hat{Z}^1(\boldsymbol{x}^0) = \left\{ \boldsymbol{z} \,\middle|\, \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} \quad t \in R \right\}$$

$$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 4\left(a - \dfrac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ $\quad \boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$ 有

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{z} = 4\left(a - \frac{1}{2}\right) t^2 > 0$$

易知$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$的负数特征值是 $\lambda_1^- = -2$, 对应的特征向量是 $\boldsymbol{\beta}_1^- = (0, 1)^{\mathrm{T}}$. $\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$在 $\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0$ 约束下的拟特征值是 $\mu_1 = 4\left(a - \frac{1}{2}\right)$, 拟特征向量是 $\boldsymbol{\gamma}^1 = (1, 0)^{\mathrm{T}}$, 故 $\boldsymbol{\beta}_1^-$ 与 $\boldsymbol{\gamma}^1$ 正交.

由于$\nabla_x^2 L(\cdot)$矩阵在 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0$ 单约束下的拟特征向量共有 $m-1$ 个,并且,它们是线性无关的,所以,若$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$符合定理 6.5.3.3 的条件,那么,$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$的负数特征值不多于 1 个,且这个负数特征值 λ_1^- 所对应的特征向量 $\boldsymbol{\beta}_-^1$ 一定与$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$向量成比例,即

$$\boldsymbol{\beta}_-^1 = a \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}^0)$$

a 是非 0 实数. 具有这种属性的实对称矩阵(如例 6.5.3.4 中的$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$矩阵),与所谓的**"仅次正定"**对称矩阵相类似[1].

利用$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$矩阵在 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0$ 约束下的拟特征向量 $\boldsymbol{\gamma}^i$ 具有的性质

---

〔1〕 参见《非线性规划》上册,M. Avriel,第 6 章"广义凸性".

$$\begin{bmatrix} (\boldsymbol{\gamma}^1)^{\mathrm{T}} \\ (\boldsymbol{\gamma}^2)^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ (\boldsymbol{\gamma}^{m-1})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \cdot \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) \cdot [\boldsymbol{\gamma}^1, \boldsymbol{\gamma}^2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}^{m-1}] = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & \boldsymbol{0} \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & \mu_{m-1} \end{bmatrix}_{(m-1)\times(m-1)} \tag{6.5.3.19}$$

以及 $\boldsymbol{\gamma}^i \perp \boldsymbol{\gamma}^j$ 的性质，作正交变换矩阵

$$Q = [\boldsymbol{\gamma}^1, \boldsymbol{\gamma}^2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}^{m-1}]$$

则对于 $\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 有

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} QQ^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})QQ^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}$$

并且，由于 $\boldsymbol{z}$ 总是 $\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0$ 切平面上的方向向量，且由

$$\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$$

$$\boldsymbol{z} = \Lambda \boldsymbol{h} + D_+ \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{h} \in R^{m-r} \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$$

的表示方式，易知 Λ 矩阵作为 $\nabla g_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0 \quad i \in I(\boldsymbol{x}^0)$ 方程组的基础解系矩阵，总有（当一阶必要条件成立时）

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\Lambda = \boldsymbol{0}$$

故由 Q 矩阵的意义，一定有 $(m-1)\times(m-r)$ 阶实矩阵 S 存在，使

$$\Lambda = Q \cdot S$$

同理也有 $(m-1)\times h$ 阶矩阵 T 存在，使

$$D_+ = Q \cdot T$$

所以 $\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 有

$$Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} = Q^{\mathrm{T}}Q \cdot S\boldsymbol{h} + Q^{\mathrm{T}}Q \cdot T\boldsymbol{u} = S\boldsymbol{h} + T\boldsymbol{u}$$

这样

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} T^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}})\mathrm{diag}[\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{m-1}](S\boldsymbol{h} + T\boldsymbol{u})$$

记

$$S = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{s}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{s}_{m-1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{t}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{t}_{m-1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}}、\boldsymbol{t}_i^{\mathrm{T}} \text{ 均为行向量，}$$

总可以有

$$z^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) z = \sum_i \mu_i^+ (\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h} + \boldsymbol{t}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u})^2 - \sum_j |\mu_j| \cdot (\boldsymbol{s}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h} + \boldsymbol{t}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u})^2 \quad —(6.5.3.20)$$

这里 $\mu_i^+ > 0$，$\mu_j^- < 0$ 为正、负数拟特征值.

显然，若(6.5.3.20)式中的 $\boldsymbol{s}_j^T = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{t}_j^T = \boldsymbol{0}$，则二次型

$$z^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) z \geqslant 0 \qquad z \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$$

成立. 这个充分条件可表示为以下定理.

定理 6.5.3.4 对于 $z \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ $\;z = \Lambda \boldsymbol{h} + D_+ \boldsymbol{u}\;$ $\boldsymbol{h} \in R^{m-r}$ $\;\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的方向向量，若$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$矩阵在 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0$ 约束下的拟特征值 μ_i 中的负数拟特征值 $\mu_j^- < 0$ 所对应的拟特征向量 $\boldsymbol{\gamma}_-^j$ 与矩阵 Λ、D_+ 全都是正交的，即

$$(\boldsymbol{\gamma}_-^j)^{\mathrm{T}} \Lambda = \boldsymbol{0}$$

$$(\boldsymbol{\gamma}_-^j)^{\mathrm{T}} D_+ = \boldsymbol{0}$$

那么，

$$z^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) z \geqslant 0 \qquad z \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$$

成立. ■

这一定理所给出的条件仍不是必要的.

§6.5.4 约束二次型 $x^{\mathrm{T}} A x \quad Bx \geqslant 0$ (半)正定的判别条件

在上一节例 6.5.3.2～3 中是利用 Lagrange 函数在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的切超平面上的法曲率符号分区方法，并检验能否用法曲率非负分区的线性近似锥的极方向向量(即 T 矩阵的列向量)组以正线性组合方式表出锥$\hat{Z}_+^1(\boldsymbol{x}^0)$集合的极方向向量(即 D_+ 矩阵的列向量)组. 应说明，这个检验方法严格地说，若记 T 是$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$矩阵的拟特征向量组($\boldsymbol{\gamma}^1, \boldsymbol{\gamma}^2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}^{m-1}$)给出的标架系的某一个象限上的法曲率非负分区的极方向向量矩阵，T 相当于(3.4.1.22a)式中的 $Q(\Phi^+)^{\frac{1}{2}}$ 乘积矩阵. 并且，设有

$$\hat{Z}_+^1(\boldsymbol{x}^0) \subseteq \{z \mid z = Ts \quad s \geqslant \boldsymbol{0}\} \subseteq L_f^+(\boldsymbol{x}^0) \quad —(6.5.4.1)$$

成立，这一方法就具有充要性，否则，这一方法只具必要性意义.

这是因为由§3.4.1 节的内容，已说明了 $L_f^+(\boldsymbol{x}^0)$集合并不一定是凸的，但集合 $\{z \mid z = Ts \quad s \geqslant \boldsymbol{0}\}$ 一定是凸锥，故可能成立

$$\{z \mid z = Ts \quad s \geqslant \mathbf{0}\} \not\subseteq L_f^+(\mathbf{x}^0)$$

从而，既便有

$$\hat{Z}_+^1(\mathbf{x}^0) \subseteq \{z \mid z = Ts \quad s \geqslant \mathbf{0}\}$$

也可能有 $\hat{Z}_+^1(\mathbf{x}^0) \not\subseteq L_f^+(\mathbf{x}^0)$.

其次，若 $\hat{Z}_+^1(\mathbf{x}^0)$ 的极方向向量 $\mathbf{d}_+^j$ 要由标架系 $(\boldsymbol{\gamma}^1, \boldsymbol{\gamma}^2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}^{m-1})$ 的不同象限上的 T 矩阵的列向量组的正线性组合方式表出，那末，即便

$$\{z \mid z = T^j s \quad s \geqslant \mathbf{0}\} \subseteq L_f^+(\mathbf{x}^0) \quad \forall j$$

也不一定有

$$\hat{Z}_+^1(\mathbf{x}^0) \subseteq L_f^+(\mathbf{x}^0)$$

这里 T^j 是 $\boldsymbol{\gamma}^i$ 标架系不同象限上的线性近似分区矩阵. 这可用图 6.5.4.1 予以说明.

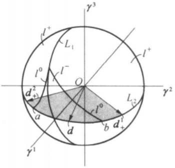


图 6.5.4.1

图 6.5.4.1 中 $(\boldsymbol{\gamma}^1, \boldsymbol{\gamma}^2, \boldsymbol{\gamma}^3)$ 标架系上有 L—函数法曲率符号分区的单位球面表示. l^0、l^+ 分别是法曲率为 0 及为正的分区(球面)表示. $L_{1,2}$是球面与坐标平面的交线. 阴影区域则是 $\hat{Z}_+^1(\mathbf{x}^0)$ 集合. 因而 $\hat{Z}_+^1(\mathbf{x}^0)$ 的极方向 $\mathbf{d}_+^1$、$\mathbf{d}_+^2$ 可以分别由 $(\boldsymbol{\gamma}^1, \boldsymbol{\gamma}^2, \boldsymbol{\gamma}^3)$ 正象限及 $(\boldsymbol{\gamma}^1, -\boldsymbol{\gamma}^2, \boldsymbol{\gamma}^3)$ 象限上的 l^+ 分区的线性近似分区矩阵 T^1、T^2 的列向量组正线性组合表出. 然而 $\hat{Z}_+^1(\mathbf{x}^0)$ 中的 $\mathbf{d}$ 方向向量的终点位于$\widehat{ab}$弧上，而$\widehat{ab}$弧显然属于 l^- 分区，故

$$\mathbf{d} \in \hat{Z}_+^1(\mathbf{x}^0) \text{ 且 } \mathbf{d}^{\mathrm{T}} LD\mathbf{d} < 0 \Rightarrow \hat{Z}_+^1(\mathbf{x}^0) \not\subseteq L_f^+(\mathbf{x}^0)$$

鉴此，先给出(6.5.3.14)式相应的符号判别条件.

(6.5.3.14)式可以表示为一般的约束二次型的形式.

即对 $A \in R^{m\times m} \quad A^{\mathrm{T}} = A \quad \mathbf{u} \in R^m$

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{\mathrm{T}} A\mathbf{u} \geqslant 0 \\ \text{s. t. } \mathbf{u} \geqslant \mathbf{0} \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \end{cases} \qquad \text{—(6.5.4.2)}$$

是否成立这样一个判别问题.

当矩阵 $A \geqslant 0$, (6.5.4.2)式自然成立. 这是平凡的情形. 以下总设 $A \not\geqslant 0$.

当(6.5.4.2)式成立，则称矩阵 A 在 $\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}$ 约束下(半)正定. 对于(6.5.4.2)式的符号判别问题，当然也可以求解以下

$$\begin{cases}\min & \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}\\ \text{s.t.} & \boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}$$

规划问题予以解决，但这又是在循环推理. 故应当寻找(6.5.4.2)式的直接判别条件.

可以注意到，A 在 $\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}$ 约束下(半)正定并不一定要求 A 矩阵本身是(半)正定的.

例 6.5.4.1 设

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

有

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}=2u_1^2+u_3^2+4u_1u_3+(u_1-u_2)^2$$

故对任取的 $\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$，都有 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}>0$. 但 A 是不定矩阵.

(6.5.4.2)式的判别问题，显然等价于

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}\geqslant 0\\ \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=1\\ \boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}\qquad —(6.5.4.3)$$

的判别问题. 因为已设 A 不是非负矩阵，记 $A=[a_{ij}]$，作下标集合

$$I(-)=\{i\mid a_{ij}<0\quad\forall\, i,\,j\}\quad I(+)=\{1,\,\cdots,\,m\}-I(-)\qquad —(6.5.4.4)$$

故 $I(-)\subset\{1,\,2,\,\cdots,\,m\}$，并且 $I(-)\neq\varnothing$. 为方便，不妨设

$$\begin{cases}I(-)=\{1,\,2,\,\cdots,\,n\} & 1\leqslant n<m\\ I(+)=\{n+1,\,\cdots,\,m\}\end{cases}\qquad —(6.5.4.5)$$

从而，

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}=\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ii}u_i^2+2\sum_{\substack{k<h\\ k,\,h\in I(-)}}a_{kh}u_ku_h\Big)+\Big(\sum_{j=n+1}^{m}a_{jj}u_j^2+2\sum_{\substack{s<t\\ t\in I(+)\\ s\in\{1,\,\cdots,\,m\}}}a_{st}u_su_t\Big)\qquad —(6.5.4.6)$$

现在，因为上式右边的第二项(·)中的系数

$$a_{jj}、a_{st} \geqslant 0 \quad (\because j、t \in I(+))$$

故这一项对任取的 $\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$ 恒为非负. 所以，即知二次型 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}$ 在约束 $\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$ 条件下(半)正定的充要条件即是(6.5.4.6)式右边第一项(·)对于任取的 $\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$ 是非负的. 若否，就可以取 $\boldsymbol{u}$ 向量的前 n 个分量非负，而后 $m-n$ 个分量为 0，从而，总可以取到这样的 $\boldsymbol{u}$ 使 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u} < 0$. 但这即是说 A 的前 $n \times n$ 阶顺序主子矩阵 A_n 应成立

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A_n\boldsymbol{y} \geqslant 0 \quad A_n \in R^{n\times n} \quad \boldsymbol{y} \in R^n \\ \text{s.t.} \begin{cases} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 1 \\ \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \end{cases} \qquad \text{—(6.5.4.7)}$$

注意到(6.5.4.7)式成立的一个必要条件是 A_n 的主对角元素 $a_{ii} \geqslant 0$. 若否，取 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{e}_i$ 是 n 维标准单位向量，就有

$$\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}A_n\boldsymbol{e}_i = a_{ii} < 0$$

所以，使(6.5.4.7)式成立的 A_n 矩阵(由 A_n 矩阵的来源)应是主对角元素非负，非主对角元素均为负数的对称矩阵. 由此性质，构造(6.5.4.7)式的 Rayleigh 商

$$R_n(\boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A_n\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}} \qquad \text{—(6.5.4.8)}$$

即知 $R_n(\boldsymbol{y})$的极小值在 $\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的 $\boldsymbol{y}$ 向量上达到，并且，$R_n(\boldsymbol{y})$的极小值就是 A_n 矩阵的特征值. 因此，(6.5.4.7)式成立，即 A_n 的特征值均为非负，即 A_n 是(半)正定的.

由此即得到(6.5.4.2)式，判别问题的以下定理

定理 6.5.4.1 $A \in R^{m\times m}$ $A^{\mathrm{T}} = A$ $\boldsymbol{u} \in R^m$ $A \ngeqslant 0$，则二次型 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}$ 在约束条件 $\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$ 下(半)正定的充要条件是 A 的子矩阵

$$A_{I(-)} = A\begin{Bmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_n \\ i_1, i_2, \cdots, i_n \end{Bmatrix} \quad i_j \in I(-) \quad j = 1, \cdots, n$$

是(半)正定的. ■

这里的 $A_{I(-)}$ 即等价于上述的 A_n 矩阵，它的非主对角线元素是均为负数的对称矩阵.

由此定理即知，若 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u} \geqslant 0$ $\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$ 成立，则 A 的主对角元素必是非负的，且对于 $a_{ij} < 0$，应成立

$$a_{ii}a_{jj} \geqslant a_{ij}^2 \Rightarrow a_{ii}、a_{jj} > 0 \quad (\text{当 } a_{ij} < 0) \qquad \text{—(6.5.4.9)}$$

这是便于运用的两个性质.

当下标集合 $I(-) = \{1, \cdots, m\}$，即 A 矩阵本身就是非主对角元素均为负

数的矩阵，当且仅当 A 是(半)正定的，$u^T Au \geqslant 0 \quad u \geqslant 0$ 才能成立.

将(6.5.4.2)式表成以下形式

$$u^T Au = y^T A_{I(-)} y + \Big(\sum_{j \in I(+)} a_{jj} u_j^2 + 2 \sum_{\substack{s<t \\ t \in I(+) \\ s \in \{1, \cdots, m\}}} a_{st} u_s u_t \Big)$$

则可知，要成立 $u^T Au > 0 \quad u \geqslant 0$，$A_{I(-)}$ 矩阵必须是正定的. 若否，便有 $y \geqslant 0$，使 $y^T A_{I(-)} y = 0$ 这样，取

$$u_i = \begin{cases} y_{i_h} & i = i_h \in I(-) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

便知有 $u \geqslant 0$ 使 $u^T Au = 0$. 所以，有以下推论

推论 6.5.4.2 二次型 $u^T Au$ 在 $u \geqslant 0$ 约束条件下是正定的，充要条件是

$$A_{I(-)} = A\begin{Bmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_n \\ i_1, & i_2, & \cdots, & i_n \end{Bmatrix} \quad i_j \in I(-) \quad j = 1, \cdots, n$$

矩阵是正定的，并且

$$a_{jj} > 0 \quad j \in I(+) \qquad \text{—(6.5.4.10)}$$

■

(6.5.4.10)式的意义可从上例得知. 由例 6.5.4.1 中的矩阵 A，知 $I(-) = \{1, 2\}$，$I(+) = \{3\}$，现

$$A_{I(-)} = A\begin{Bmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

是正定的.

$$a_{jj} = a_{33} = 1 > 0 \quad j \in I(+)$$

故知 $u^T Au$ 在 $u \geqslant 0$ 约束下正定. 如果取

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $I(-)$、$I(+)$ 下标集合不变，$A_{I(+)}$ 亦不变仍是正定的，但因为

$$a_{jj} = a_{33} = 0 \quad j \in I(+)$$

可知 $u^T Au$ 在 $u \geqslant 0$ 约束下不可能是恒为正的. 因为取

$$u = (0, 0, 1)^T$$

即知 $u^T Au = 0$. 故 $u^T Au$ 在 $u \geqslant 0$ 约束下只能是半正定的.

由以上推论可知，在 $\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$ 约束下正定的 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{u}$ 二次型，矩阵 A 的主对角元素必全部为正数，并且，(6.5.4.9)式必要成立为严格不等式. 这也是便于应用的性质.

可以利用矩阵 A 的特征值决定的二次型 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{u}$ 符号在 $\boldsymbol{u} \in R^m$ 全空间上的分区，说明以上关于 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{u}$ 在约束 $\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$ 条件下(半)正定的充要条件(定理6.5.4.1)的几何意义.

设 λ_j 是实对称矩阵 A 的特征值 $(\lambda_j \leqslant \lambda_{j+1})$，$\boldsymbol{\alpha}^j$ 是对应的特征向量. 作以下方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \cdots + \lambda_m v_m^2 \geqslant 0 \\ v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_m^2 = 1 \end{cases} \qquad \text{—(6.5.4.11)}$$

作 $t_i = v_i^2$ 替换，可得到等式—不等式线性方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \cdots + \lambda_m t_m \geqslant 0 \\ t_1 + t_2 + \cdots + t_m = 1 \\ t_i \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{—(6.5.4.12)}$$

这一方程组类似于(3.4.1.10)式. 区别在于这里是用矩阵 A 的特征值 λ_j（而非拟特征值）去决定二次型 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{u}$ 符号在 $\boldsymbol{u} \in R^m$ 全空间（而非曲面的切超平面）上，以特征向量（而非拟特征向量）组 $\boldsymbol{\alpha}^j$ 构造的标架系上表示的一个非负符号分区.

由 § 3.4.1 节的分析，可以通过解出(6.5.4.12)式以得到二次型 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{u}$ 在 R^m 上非负的分区 L_A^+，

$$L_A^+ = Q(\boldsymbol{\Phi}^+ \boldsymbol{s})^{\frac{1}{2}} \quad \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \quad \sum s_i = 1 \qquad \text{—(6.5.4.13)}$$

其中 $Q = [\boldsymbol{\alpha}^1, \boldsymbol{\alpha}^2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}^m]$ 是特征向量矩阵，$\boldsymbol{\Phi}^+$ 矩阵由(3.4.1.20)式给出，记 $(\boldsymbol{\varphi}_i^+)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\Phi}^+$ 的行向量，则符号

$$(\boldsymbol{\Phi}^+ \boldsymbol{s})^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \pm((\boldsymbol{\varphi}_1^+)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{s})^{\frac{1}{2}} \\ \pm((\boldsymbol{\varphi}_2^+)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{s})^{\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ \pm((\boldsymbol{\varphi}_m^+)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{s})^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

即对于乘积 $\boldsymbol{\Phi}^+ \boldsymbol{s}$ 向量作各分量的开方. 上式开方前的符号选择，即可给出($\boldsymbol{\alpha}^1$，$\boldsymbol{\alpha}^2$，…，$\boldsymbol{\alpha}^m$)标架系上各个象限上 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{u}$ 符号非负的分区表示. 则 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{u}$ 二次型在 $\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$ 约束下(半)正定的几何意义即在于 R^m 空间正象限上的单位球体属于 L_A^+，即

$$\{x \mid x \geqslant 0,\ 0 \leqslant x^{\mathrm{T}} x \leqslant 1\} \subseteq L_A^+ \qquad —(6.5.4.14)$$

仍设 $1 \leqslant |I(-)| = n < m$，则在 $x \in R^m$ 空间上，矩阵 $A_{I(-)}$（半）正定的条件是 $A_{I(-)}$ 矩阵的所有各阶主子式非负. 这即等价于

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{h} a_{i_k i_k} u_{i_k i_k}^2 + 2 \sum_{\substack{1 \leqslant k,\ j \leqslant h \\ k < j}} a_{i_k i_j} u_{i_k} u_{i_j} < 0 & \\ & i_k \in I(-) \\ \sum_{k=1}^{h} u_{i_k}^2 = 1 & 1 \leqslant h \leqslant n \\ u_{i_k} \geqslant 0 & \end{cases}$$

方程组无解. 或者说，

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{h} a_{i_k i_k} u_{i_k i_k}^2 + 2 \sum_{\substack{1 \leqslant k,\ j \leqslant h \\ k < j}} a_{i_k i_h} u_{i_k i_h} = 0 & \\ & i_k \in I(-) \\ \sum_{k=1}^{h} u_{i_k}^2 = 1 & 1 \leqslant h \leqslant n \\ u_{i_k} \geqslant 0 & \end{cases}$$

方程组或者无解或者只有一个解.

将 $\boldsymbol{u}$ 的分量选取为

$$u_i = \begin{cases} u_{i_k} \geqslant 0 \quad i_k \in I(-) \quad k = 1, \cdots, h \quad i = i_k \\ 0 \end{cases}$$

则所有这样的 $\boldsymbol{u}$ 全体即为 R^m 正象限的一个边界超平面 $L(u_{i_1}, \cdots, u_{i_h})$. 以上分析说明，$A_{I(-)}$ 矩阵（半）正定的充要条件，即在所有这样的边界超平面上，二次型 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{u}$ 是（半）正定的.

以下给出两个 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{u}$ 不是在 $\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$ 约束下（半）正定的示例.

例 6.5.4.2

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ 0 & 3 & -\sqrt{10} \\ -\sqrt{\frac{5}{2}} & -\sqrt{10} & 1 \end{bmatrix}$$

A 的特征值是 $\lambda_1 = -2$，$\lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = \frac{11}{2}$. 特征向量矩阵是

$$Q=\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{2}{9}} & -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}}\\ \sqrt{\frac{2}{9}} & \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}}\\ \sqrt{\frac{5}{7}} & \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

现在与 $\lambda_1<0$ 特征值对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}^1$（即 Q 的第一列向量）是正数向量. 在 $(\boldsymbol{\alpha}^1,\ \boldsymbol{\alpha}^2,\ \boldsymbol{\alpha}^3)$ 标架系上可以得到 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}$ 符号的分区表示. 这里将分区直接标在正象限上的单位等截距割平面上. 如图 6.5.4.2 所示. 符号意义同前.

当将图 6.5.4.2 表示在 R^3 空间的标准坐标系的正象限上，就得到了图 6.5.4.3 所示的图形.

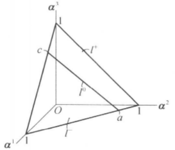


图 6.5.4.2

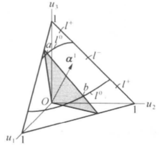


图 6.5.4.3

在图 6.5.4.3 中，阴影平面为 $O_{\boldsymbol{\alpha}^1\boldsymbol{\alpha}^2}$ 平面. l^0 曲线为 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}=0$ 的曲线. a、b 点是图 6.5.4.2 中的对应点（其中 b 是图 6.5.4.2 中与 a 对应的在 $(\boldsymbol{\alpha}^1,\ -\boldsymbol{\alpha}^2,\ \boldsymbol{\alpha}^3)$ 象限中的点）. 图 6.5.4.3 中两条 l^0 曲线围成的中间区域即为 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}<0$ 的取值区域. 由于在 R^3 正象限中存在这个 l^- 分区，故 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{u}\geqslant\mathbf{0}$ 约束下是不定的.

这里的图 6.5.4.3 是利用了(6.5.4.12)式给出的线性化的分区表示，故 l^0 是直线. 而图 6.5.4.3 式则可理解是利用了(6.5.4.11)式给出的单位球面表示的分区，而将图中的单位截距割平面上的 l^0（曲）线看成是单位球面上的 l^0 曲线上的点到原点的连线与此平面的交点决定的，故一般地应为曲线.

例 6.5.4.3

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2}\\ -2 & 3 & -\frac{1}{4}\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}$$

A 的特征值中 $\lambda_1 < 0$，$\lambda_{2,3} > 0$. 直接给出 R^3 空间标准坐标系正象限上的 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}$ 符号分区图形，如图 6.5.4.4 所示. 现在与负数特征值 λ_1 对应的特征向量并不指向 R^3 正象限，而是与正数特征值对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}^2$ 指向了 R^3 正象限. 故 R^3 正象限的单位截距平面上只有一条 l^0 曲线. 该条曲线与 $O_{u_1u_2}$ 平面上的

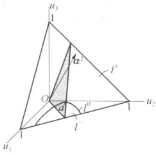


图 6.5.4.4

$$u_1 + u_2 = 1 \quad u_{1,2} \geqslant 0$$

直线围成一个 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u} < 0$ 的取值区域. 故二次型 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$ 约束下也是不定的.

以上分析即表明在边界平面 $L(u_i, u_j)$ $i, j = 1, 2, 3$ 上的直线

$$u_i + u_j = 1 \quad u_{i,j} \geqslant 0$$

或表示为圆周线

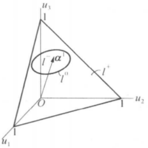


图 6.5.4.5

$$u_i^2 + u_j^2 = 1 \quad u_i, u_j \geqslant 0$$

上，当 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$ 约束下是不定的，就至少在一个(i, j)决定的上述直线（或圆周）上的一个线段上，$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u} < 0$. 由此附带地知道，当 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}$ 约束下是不定的，则不可能出现图 6.5.4.5 所示的情形. 即 $u^{\mathrm{T}}Au$ 在所有

$$u_i + u_j = 1 \quad u_i, u_j \geqslant 0$$

边界上取值非负，但在 $u_i > 0$ 区域内可以取值为负.

以上分析均推广至 R^m 空间.

推论 6.5.4.3 设 A、$B \in R^{m\times m}$ $A^{\mathrm{T}} = A$ $|B| \neq 0$ $\boldsymbol{x} \in R^m$，则约束二次型

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} \geqslant 0 \\ \text{s. t. } B\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad \text{—(6.5.4.15)}$$

成立的充要条件是以下约束二次型(半)正定成立

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}C\boldsymbol{y} \geqslant 0 \\ \text{s. t. } \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \quad C = (B^{-1})^{\mathrm{T}}AB^{-1} \qquad \text{—(6.5.4.16)}$$

■

因为 $B\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的解是

$$\boldsymbol{x} = B^{-1}\boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{y} \in R_+^m$$

即知以上推论. (6.5.4.16)式即可用定理 6.5.4.1 的条件予以解决判定问题.

由以上的分析,已完全解决了(6.5.3.14)式的判别问题.

注意到定理 6.5.3.1 实质是要解决以下约束二次型(半)正定的判定条件问题:

$$\begin{cases} x^{\mathrm{T}}Ax \geqslant 0 \\ \text{s.t.} \begin{cases} Ex = \mathbf{0} \\ Fx \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \end{cases} \qquad —(6.5.4.17)$$

$A \in R^{m\times m}$, $A^{\mathrm{T}} = A$, E、F 是列阶数为 m 的矩阵, $x \in R^m$. 如果令

$$B = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{cases} x^{\mathrm{T}}Ax \geqslant 0 \\ \text{s.t. } Bx = \mathbf{0} \end{cases} \qquad —(6.5.4.18)$$

形式的约束二次型的判定问题即为定理 6.5.2.2 的(6.5.2.36)式给出的判定形式. 前面的分析已说明,(6.5.4.18)式的判定条件等价于加边矩阵

$$A_{bb} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

的拟特征值非负. 这可以由 Mann 定理(见 § 3.2.4 节)给出的方法予以解决[1]. 而定理 6.5.3.1 则是针对(6.5.4.17)式的形式,更具一般意义的约束二次型的(半)正定判定问题.

定理 6.5.3.1 虽然已给出了(6.5.4.17)式形式的约束二次型的(半)正定判定条件,但尚未能给予可应用的判定方法. 利用以上的分析,下面即给出可应用的定理 6.5.3.1 的判别条件.

简化符号,设 $Ex = \mathbf{0}$, $Fx \geqslant \mathbf{0}$ 的解是(见 § 5.5.2 节及以下内容)

$$x = \Lambda t + Ds \quad t \in R^{m-r} \quad s \geqslant \mathbf{0}$$

这里 $r = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}$, $D \geqslant 0$. 记

$$\boldsymbol{\alpha} = \Lambda t \quad \boldsymbol{\beta} = Ds$$

则

$$E\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \quad F\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$
$$E\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} \quad F\boldsymbol{\beta} \geqslant \mathbf{0}$$

---

〔1〕 (6.5.4.18)式成立的其他形式的充要条件可见本节附注.

考虑对 $\boldsymbol{x} \in P(E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},\ F\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$，二次型

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta} + 2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta} \qquad —(6.5.4.19)$$

的符号判别.

很显然，由前面给出的分析（如定理 6.5.3.1 的条件），(6.5.4.19)式的符号对所有的 $\boldsymbol{x} \in P(E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},\ F\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 非负的必要条件是

$$A_{\alpha} = \Lambda^{\mathrm{T}} A \Lambda \in R^{(m-r)\times(m-r)} \qquad —(6.5.4.20)$$

是（半）正定的，以及约束二次型（半）正定

$$\begin{cases} \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} A_{\beta} \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} \geqslant 0 & A_{\beta} = D^{\mathrm{T}} A D \\ \text{s.t. } \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} & \end{cases} \qquad —(6.5.4.21)$$

成立. 即 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta}$ 对所有的 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 是非负的. 否则即可判定(6.5.4.19)式不是（半）正定的. 而 A_{α} 矩阵的（半）正定，由传统的矩阵（半）正定判别条件即可判定，(6.5.4.21)式则可由定理 6.5.4.1 给出的方法予以解决.

对于(6.5.4.19)式中的 $2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta}$ 项，有

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} A_{\gamma} \boldsymbol{s} \quad A_{\gamma} = \Lambda^{\mathrm{T}} A D \qquad —(6.5.4.22)$$

所以，当

$$A_{\gamma} = \Lambda^{\mathrm{T}} A D = 0$$

时（比如成立 $\Lambda^{\mathrm{T}} A = 0$ 或 $AD = 0$ 的情形时）. 这时，

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\alpha} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta}$$

这都是已知的可判定是否为约束（半）正定的二次型形式. 故以下设

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta} \not\equiv 0$$

此时，易理解，选取 $\boldsymbol{t}$ 或 $-\boldsymbol{t}$，总可使

$$2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta} = 2\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} A_{\gamma} \boldsymbol{s} < 0$$

注意到(6.5.4.19)式的形式，在满足 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\alpha} \geqslant 0$、$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta} \geqslant 0$ 的条件下，就只有 $2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{\beta}$ 项可以取负值了.

将(6.5.4.19)式表成以下形式，

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} A_{\alpha} \boldsymbol{t} + \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} A_{\beta} \boldsymbol{s} + 2\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} A_{\gamma} \boldsymbol{s} \qquad —(6.5.4.23)$$

(6.5.4.23)式的右边的表达式，在给定的任取的 $\boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0}$ 之下，是 $\boldsymbol{t}$ 的二次函数. 对其求取关于 $\boldsymbol{t}$ 的无约束极值，由一阶条件知应有

$$A_{\alpha} \boldsymbol{t} + A_{\gamma} \boldsymbol{s} = \boldsymbol{0} \qquad —(6.5.4.24)$$

当 A_α 可逆时，可得极值解

$$t^* = t(s) = -A_\alpha^{-1}A_\gamma s \qquad —(6.5.4.25)$$

很显然，此时(6.5.4.17)式成立，应当有 A_α 是正定的．这样，(6.5.4.25)式给出的是在任取的 $s \geqslant \mathbf{0}$ 下，x^TAx 二次型的最小值．故(6.5.4.17)式成立，即应再要求

$$\min \quad x^TAx = t^T(s)A_\alpha t(s) + s^TA_\beta s + 2t^T(s)A_\gamma s \geqslant 0 \qquad s \geqslant \mathbf{0} \qquad —(6.5.4.26)$$

注意到由(6.5.4.25)式，

$$t^T(s)A_\alpha t(s) = -t^T(s)A_\gamma s$$

所以(6.5.4.26)式等价于下式，记

$$\widetilde{A} = A_\beta - A_\gamma^TA_\alpha^{-1}A_\gamma \qquad —(6.5.4.27)$$

$$\begin{cases} s^T\widetilde{A}s \geqslant 0 \\ \text{s.t. } s \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \qquad —(6.5.4.28)$$

而(6.5.4.28)式又是可以用定理6.5.4.1给予判定的形式．

因为(6.5.4.23)式可表成

$$x^TAx = (t^T,\ s^T)\begin{bmatrix} A_\alpha & A_\gamma \\ A_\gamma^T & A_\beta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \qquad —(6.5.4.29)$$

故显然矩阵

$$A_{\alpha\beta\gamma} = \begin{bmatrix} A_\alpha & A_\gamma \\ A_\gamma^T & A_\beta \end{bmatrix} \qquad —(6.5.4.30)$$

若是(半)正定的，则 x^TAx 就是约束(半)正定的．但这只是 x^TAx 约束(半)正定的充分条件而不是必要的(见以下示例)．

当 A_α 不可逆，即表明(6.5.4.17)式成立，A_α 只能是半正定的．设 $\text{rank}\ A_\alpha = k$．对(6.5.4.29)式右边的二次型求解在 $s \geqslant \mathbf{0}$ 约束条件下的极值．从一阶必要条件可得

$$\begin{cases} A_\alpha t + A_\gamma s = \mathbf{0} & —(6.5.4.24) \\ A_\gamma^T t + A_\beta s = \boldsymbol{\omega} \quad s、\boldsymbol{\omega} \geqslant \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\omega}^T s = 0 & —(6.5.4.31) \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 是 L—乘子向量．

对 A_α 作分块处理

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} A_{11}^\alpha & A_{12}^\alpha \\ A_{21}^\alpha & A_{22}^\alpha \end{bmatrix} \quad A_{11}^\alpha \in R^{k\times k} \quad \text{余类推}$$

并设 rank $A_{11}^\alpha = k$. 相应地对 A_γ 矩阵. $\boldsymbol{t}$ 向量作分块

$$A_\gamma = \begin{bmatrix} A_1^\gamma \\ A_2^\gamma \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_1 \\ \boldsymbol{t}_2 \end{bmatrix}$$

A_1^γ 的行阶数也为 k，而 $\boldsymbol{t}_1$ 为 $\boldsymbol{t}$ 的前 k 维子向量.

从(6.5.4.24)式中可解出

$$\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} -(A_{11}^\alpha)^{-1}A_{12}^\alpha \\ I_{m-r-k} \end{bmatrix}\boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} -(A_{11}^\alpha)^{-1}A_1^\gamma \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{t}_0 + \boldsymbol{t}_k(\boldsymbol{s}) \qquad —(6.5.4.32)$$

其中 $\boldsymbol{t}_0 \in N(A_\alpha)$，$\boldsymbol{t}_k(\boldsymbol{s})$ 则是(6.5.4.24)式的一个特解形式，且 $\boldsymbol{u} \in R^{m-r-k}$.

将(6.5.4.32)式代入到(6.5.4.26)式，即知关于 $\boldsymbol{t}$ 的无条件极值是

（无条件）极值：

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{s})A_\alpha\boldsymbol{t}_k(\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}A_\beta\boldsymbol{s} + 2\boldsymbol{t}_0^{\mathrm{T}}A_\gamma\boldsymbol{s} + 2\boldsymbol{t}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{s})A_\gamma\boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{t}_0 \in N(A_\alpha) \quad \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad —(6.5.4.33)$$

这里 $\boldsymbol{s}$ 可以是任取的非负向量. 如果(6.5.4.33)式对所有的 $\boldsymbol{t}_0 \in N(A_\alpha)$、$\boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0}$ 是非负的，就必要有

$$\boldsymbol{t}_0^{\mathrm{T}}A_\gamma\boldsymbol{s} = 0 \quad \boldsymbol{t}_0 \in N(A_\alpha) \qquad —(6.5.4.34)$$

否则，总能选取 $\boldsymbol{t}_0$ 或 $-\boldsymbol{t}_0$，使 $2\boldsymbol{t}_0^{\mathrm{T}}A_\gamma\boldsymbol{s} < 0$，令 $\|\boldsymbol{t}_0\| \to +\infty$，即知(6.5.4.33)式不能是对所有的 $\boldsymbol{t}_0$、$\boldsymbol{s}$ 都非负.

将(6.5.4.32)式代回到(6.5.4.24)式得到关于 $\boldsymbol{s}$ 的解约束方程组即以下方程组，

$$\begin{cases} [A_2^\gamma - A_{21}^\alpha(A_{11}^\alpha)^{-1}A_1^\gamma]\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad —(6.5.4.35)$$

由多胞形表示定理，(6.5.4.35)式的解可表为

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{h}) = G\boldsymbol{h} \quad G \geqslant 0 \quad \boldsymbol{h} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad —(6.5.4.36)$$

其中 G 的列向量是解集合的极方向向量. 解的方法可见§3章.

将(6.5.4.36)式代回到(6.5.4.32)式，再代回到(6.5.4.31)式，可得关于 $\boldsymbol{h}$ 的以下方程组

$$A_\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}_0 + A_\gamma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}_k(\boldsymbol{s}(\boldsymbol{h})) + A_\beta\boldsymbol{s}(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{\omega} \qquad —(6.5.4.37)$$

即

$$s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{h})A_{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}_0 + s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{h})A_{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}_k(s(\boldsymbol{h})) + s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{h})A_{\beta}s(\boldsymbol{h}) = s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{h})\boldsymbol{\omega} = 0$$

在(6.5.4.34)式成立时，从上式即得

$$\begin{cases}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}[A_{\beta} - (A_1^{\gamma})^{\mathrm{T}}(A_{11}^{\alpha})^{-1}A_1^{\gamma}]G\boldsymbol{h} = 0 \\ \boldsymbol{h} \geqslant \boldsymbol{0}\end{cases} \quad —(6.5.4.38)$$

现在将(6.5.4.36)式给出的$s(\boldsymbol{h})$代回到(6.5.4.33)式中，在(6.5.4.34)式成立的条件下，得到在$s \geqslant \boldsymbol{0}$约束下的条件极值是

$$\begin{aligned}(\text{条件})\ \text{极值}:\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} &= s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{h})(A_{\beta} - (A_1^{\gamma})^{\mathrm{T}}(A_{11}^{\alpha})^{-1}A_1^{\gamma})s(\boldsymbol{h}) \\ &= \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}[A_{\beta} - (A_1^{\gamma})^{\mathrm{T}}(A_{11}^{\alpha})^{-1}A_1^{\gamma})G\boldsymbol{h} \\ &= 0\end{aligned}$$

注意由所有的$\boldsymbol{h} \geqslant \boldsymbol{0}$构成的全体$s(\boldsymbol{h})$只是全体非负$s$向量集合的子集. 所以，如果这一为0的极值是(6.5.4.33)式的(弱)最小值，那么，在(6.5.4.34)式成立时，必应有

$$\begin{cases}\boldsymbol{t}_k^{\mathrm{T}}(s)A_{\alpha}\boldsymbol{t}_k(s) + s^{\mathrm{T}}A_{\beta}s + 2\boldsymbol{t}_k^{\mathrm{T}}(s)A_{\gamma}s \geqslant \boldsymbol{0} \\ s \geqslant \boldsymbol{0}\end{cases} \quad —(6.5.4.39)$$

利用(6.5.4.32)式，上式等价于

$$\begin{cases}s^{\mathrm{T}}(A_{\beta} - (A_1^{\gamma})^{\mathrm{T}}(A_{11}^{\alpha})^{-1}A_1^{\gamma})s \geqslant \boldsymbol{0} \\ s \geqslant \boldsymbol{0}\end{cases} \quad —(6.5.4.40)$$

这即可利用定理6.5.4.1予以判定(6.5.4.40)式是否成立.

综合以上分析，可得到以下定理.

定理 6.5.4.4 设$A \in R^{m\times m}A^{\mathrm{T}} = A$，$E$、$F$是列阶数为$m$的矩阵，$\boldsymbol{x} \in R^m$. 约束二次型(半)正定，即

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} \geqslant 0$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ F\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\end{cases}$$

的充要条件是，对于约束等式—不等式方程组的解集合

$$P(E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},\ F\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \Lambda\boldsymbol{t} + Ds,\ \boldsymbol{t} \in R^{m-r}\quad s \geqslant \boldsymbol{0}\}\quad r = \mathrm{rank}\begin{bmatrix}E \\ F\end{bmatrix}$$

成立以下条件

(1) 矩阵$A_{\alpha} = \Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda$是(半)正定的，矩阵$A_{\beta} = D^{\mathrm{T}}AD$是$s^{\mathrm{T}}A_{\beta}s \geqslant 0$、$s \geqslant \boldsymbol{0}$约束(半)正定的.

(2) 当 $A_\gamma = \Lambda^{\mathrm{T}} A D \neq 0$ 时

(2.1) 若 A_α 是正定的，且

$$\begin{cases} \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(A_\beta - A_\gamma^{\mathrm{T}} A_\alpha^{-1} A_\gamma)\boldsymbol{s} \geqslant 0 \\ \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad \text{—(6.5.4.28)}$$

(2.2) 若 A_α 是半正定的，设 rank $A_\alpha = k$，则应有

$$\begin{cases} \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(A_\beta - (A_1^\gamma)^{\mathrm{T}} (A_{11}^\alpha)^{-1} A_1^\gamma)\boldsymbol{s} \geqslant 0 \\ \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \qquad \text{—(6.5.4.40)}$$

其中 A_{11}^α 是 A_α 中的任一个 $k \times k$ 阶可逆子矩阵，A_1^γ 是 A_γ 矩阵中行下标与 A_{11}^α 行下标相同的行向量组成的矩阵. 同时，还要成立以下条件

$$\mathrm{rank}(\Lambda^{\mathrm{T}} A \Lambda) = \mathrm{rank}(A\Lambda) < \mathrm{rank}(\Lambda) = m - r \qquad \text{—(6.5.4.41)}$$

■

由此，即完全解决了(线性)约束二次型(半)正定的判别问题.

将(6.5.2.51)式中的$\nabla_z^2 L(\cdot)$看成这里的矩阵 A，再由

$$\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0) \Rightarrow \boldsymbol{z} = \Lambda \boldsymbol{t} + D_+ \boldsymbol{s}$$

的关系，直接利用以上定理，就得到非线性规划极小值点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的 K－T 条件可适用时的二阶判别条件.

若将以上定理中用词"(半)"去掉(也将(2.2)条件去掉)，并且，(6.5.4.28)式的第一式成为严格不等式，此定理即为 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}$ 二次型在约束 $E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$、$F\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 条件下正定的判别条件.

而对于定理 6.5.4.4 的证明，显然只需再对(6.5.4.41)式给出相关证明即可.

(6.5.4.41)式可从(6.5.4.34)式中导出. 由(6.5.4.34)式的必要性，以及 A_α、A_γ 矩阵的构造知，此式可表示为满足

$$\Lambda^{\mathrm{T}} A \Lambda \boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$$

的 $\boldsymbol{t}$ 向量，总使

$$D^{\mathrm{T}} A \Lambda \boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$$

成立. 并可知因已设 A_α 半正定，故 A_α 的零度集 $N(A_\alpha)$定有非 $\boldsymbol{0}$ 元素.

注意到 $\Lambda \in N(F)$、$D \in N^{\perp}(F)$，故使

$$\Lambda^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h} = \boldsymbol{0} \quad \text{and} \quad D^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$$

成立的 $\boldsymbol{h}$ 只能是(m 维)$\boldsymbol{0}$ 向量. 换句话说，使(6.5.4.34)式成立的 $\boldsymbol{t} \in N(A_\alpha)$，只能是满足

$$A \Lambda \boldsymbol{t} = \boldsymbol{0} \qquad \text{—(6.5.4.42)}$$

的解. 而(6.5.4.42)式有非0的解的条件即为

$$\mathrm{rank}(A\Lambda) < m - r \quad r = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}$$

另一方面,显然,又必须有

$$N(A_\alpha) = N(\Lambda^{\mathrm{T}} A \Lambda) \subseteq N(A\Lambda) \qquad \text{—(6.5.4.43)}$$

成立. 否则,取

$$\tilde{t} \in N(\Lambda^{\mathrm{T}} A \Lambda) - N(A\Lambda) \quad (\tilde{t} \neq \mathbf{0})$$

便可以有

$$\tilde{t} A_\gamma \boldsymbol{s} \neq 0 \quad \tilde{t} \in N(A_\alpha) \quad \boldsymbol{s} \geqslant \mathbf{0}$$

即(6.5.4.34)式不能成立.

但仍由(5.5.2.1)式关于矩阵乘积的秩的公式,有

$$\mathrm{rank}(\Lambda^{\mathrm{T}} A \Lambda) = \mathrm{rank}(A\Lambda) - \dim(R(A\Lambda) \cap N(\Lambda^{\mathrm{T}})) \leqslant \mathrm{rank}(A\Lambda)$$

故(6.5.4.43)式成立便意味着必要有

$$\dim(R(A\Lambda) \cap N(\Lambda^{\mathrm{T}})) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rank}(\Lambda^{\mathrm{T}} A \Lambda) = \mathrm{rank}(A\Lambda)$$

由此即得到(6.5.4.41)式.

由此即附带知道,对于(6.5.4.43)式在(6.5.4.34)式成立时,只能为

$$N(\Lambda^{\mathrm{T}} A \Lambda) = N(A\Lambda) \qquad \text{—(6.5.4.44)}$$

且上式与(6.5.4.41)式是等价的.

系 6.5.4.5 设二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}$ 在 $E\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$、$F\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}$ 约束条件下表为

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} A_\alpha \boldsymbol{t} + \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} A_\beta \boldsymbol{s} + 2\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} A_\gamma \boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-r} \quad \boldsymbol{s} \geqslant \mathbf{0} \quad r = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}$$

的形式. 当 $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} A_\gamma \boldsymbol{s} \not\equiv 0$,则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}$ 约束(半)正定的必要条件是 A_α、A_β 是(半)正定的,并且,对任取的使 $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} A_\gamma \boldsymbol{s} \neq 0$ 的 $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{s}$ 向量,总成立

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} A_\alpha \boldsymbol{t} > 0 \text{ 以及 } \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} A_\beta \boldsymbol{s} > 0 \quad \boldsymbol{s} \geqslant \mathbf{0}$$

另有充分条件,即若矩阵

$$\begin{bmatrix} A_\alpha & A_\gamma \\ A_\gamma^{\mathrm{T}} & A_\beta \end{bmatrix}$$

是(半)正定的,则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}$ 是约束(半)正定的. ■

由以上定理可直接导出此系. 从而可知,若 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}$ 是约束(半)正定的,当

$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} A_{\gamma} \boldsymbol{s} \neq 0$，$\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} A_{\beta} \boldsymbol{s}$ 二次型必须是 $\boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0}$ 约束条件下的正定二次型.

以下给出几个数值示例.

例 6.5.4.4 设

$$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}_0)$ 可表为

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{s} \quad t \in R \quad \boldsymbol{s} \in R_+^2$$

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{z} = 2t^2 + (2s_1 + 4s_2)t + 6s_1^2 + 14 s_1 s_2 + 6 s_2^2$$

对上式右边函数求 t 的一阶导数并令其为 0，得

$$t = -\frac{s_1 + 2s_2}{2}$$

从而

$$\min_{\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)} \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{z} = \frac{11}{2} s_1^2 + 12 s_1 s_2 + 4 s_2^2 > 0 \quad s_1, s_2 \geqslant 0$$

故(6.5.2.51)式在本例中是为严格不等式. 但注意本例中(6.5.4.30)式给出的 $A_{\alpha\beta\gamma}$ 矩阵是不定矩阵.

例 6.5.4.5 设

$$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 同上. 有

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{z} = 7t^2 + 2(4s_1 + s_2)t + 2s_1^2 + 4 s_1 s_2 + 3 s_2^2$$

类似地，可得极小值处

$$t = -\frac{4s_1 + s_2}{7}$$

$$\min_{\boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)} \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{z} = -2s_1^2 + 20 s_1 s_2 + 20 s_2^2 \quad s_1, s_2 \geqslant 0$$

易知上式右边的二次型不满足定理 6.5.4.1，故可知(6.5.2.51)式在本例中不能成立.

例 6.5.4.6 设二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$

$$A=\begin{bmatrix}3&-2&-1&2&0\\-2&1&1&-1&1\\-1&1&0&2&1\\2&-1&2&\frac{1}{4}&2\\0&1&1&2&\frac{999}{64}\end{bmatrix}$$

检验其在约束条件

$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1+2x_2-x_3-x_4+x_5=0\\2x_1+x_2+3x_3-2x_4-2x_5=0\\-2x_1-3x_2+3x_3+2x_4+x_5\geqslant 0\end{cases}$$

下是否为(半)正定.

解:约束条件的解是

$$x=\Lambda t+Ds=\begin{bmatrix}.25&.78125\\.75&-.03125\\.25&.15625\\1&0\\0&1\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}-1.70625\\-\ .4\\1\\-.25\\-.15625\end{bmatrix}s\quad t\in R^2\quad s\geqslant 0$$

利用(6.5.4.41)式,有

$$A\Lambda=\begin{bmatrix}1&\frac{9}{4}\\-\frac{1}{2}&-\frac{7}{16}\\\frac{5}{2}&\frac{3}{16}\\\frac{1}{2}&\frac{125}{32}\\3&\frac{1\,007}{64}\end{bmatrix}\Rightarrow\operatorname{rank}(A\Lambda)=2\not<2=m-r$$

$$\Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda=\begin{bmatrix}1&\frac{67}{16}\\\frac{67}{16}&\left(\frac{67}{16}\right)^2\end{bmatrix}\Rightarrow\operatorname{rank}(\Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda)=1$$

故(6.5.4.41)式不满足,即知 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 不可能是约束(半)正定的. 对此容易验证.

将约束条件的解代入二次型得

$$x^{\mathrm T}Ax = t^{\mathrm T}\begin{bmatrix}1 & \frac{67}{16}\\ \frac{67}{16} & \left(\frac{67}{16}\right)^2\end{bmatrix}t + 2(at_1 - bt_2)s + cs^2 \quad t_1,\ t_2 \in R \quad s \geqslant 0$$

其中 a、b、$c > 0$. 取 $\Lambda^{\mathrm T}A\Lambda t = \mathbf{0}$ 的解

$$t = \begin{bmatrix}-\frac{67}{16}\\ 1\end{bmatrix}p \qquad p \in R$$

代入二次型,得

$$x^{\mathrm T}Ax = -2(d+b)ps + cs^2 \quad d = \frac{67}{16}a > 0$$

对任取的 $s > 0$, 只要取 $p > \frac{cs}{2(d+b)} \Rightarrow x^{\mathrm T}Ax < 0$.

在本例中, $N(A\Lambda) = \{\mathbf{0}\} \quad N(\Lambda^{\mathrm T}A\Lambda) - \{\mathbf{0}\} \neq \varnothing$,故 $N(A\Lambda) \neq N(\Lambda^{\mathrm T}A\Lambda)$.

例 6.5.4.7 设

$$A = \begin{bmatrix}3 & -2 & 1 & -1\\ -2 & 3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

在约束条件 $Ex = \mathbf{0}$、$Fx \geqslant \mathbf{0}$ 下 x 的解可表为

$$x = \Lambda t + Ds = \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}t + \begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 3\\ 1\end{bmatrix}s \quad t \in R^3 \quad s \geqslant 0$$

考察约束二次型 $x^{\mathrm T}Ax$ 是否为(半)正定.

解: $$\Lambda^{\mathrm T}A\Lambda = \begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 7 & -9\\ 1 & -9 & 11\end{bmatrix} \quad A\Lambda = \begin{bmatrix}0 & -4 & 4\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 5\\ -1 & 2 & -4\end{bmatrix}$$

现

$$\mathrm{rank}(\Lambda^{\mathrm T}A\Lambda) = \mathrm{rank}(A\Lambda) = 2 < \mathrm{rank}(\Lambda) = 3$$

(6.5.4.41)式成立，但现在 $\Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda$ 是不定矩阵，故 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$ 不是(半)正定的. 由此例易验证，成立(6.5.4.44)式.

易知，以上关于 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$ 二次型在 $E\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$、$F\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 约束条件下的(半)正定的判定条件，也就是更一般性的 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$ 二次型在 $B\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 约束条件下的(半)正定的判定条件. 传统的利用矩阵 A 的各阶主子式非负条件所能判定的则是 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$ 二次型在无约束条件下的(半)正定问题.

附注：等式约束下的二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}>0$ 的充要条件

(6.5.4.18)式形式的等式约束下的二次型

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}>0\\ \text{s.t. } B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\end{cases}\qquad —(6.5.4.18)$$

成立的充要条件，Avriel 介绍了不同于 Mann 定理形式的另一个形式[1].

引理 6.5.4.6 令 u 和 v 是紧致集 $K\subset R^m$ 上的连续实函数，对于所有 $\boldsymbol{x}\in K$，有 $v(\boldsymbol{x})\geqslant 0$. 那么，每当 $v(\boldsymbol{x})\leqslant 0$ 时 $u(\boldsymbol{x})>0$ 的充要条件是：存在一个数 c_0，使得对所有 $c\geqslant c_0$ 和 $\boldsymbol{x}\in K$ 成立

$$u(\boldsymbol{x})+cv(\boldsymbol{x})>0\qquad —(6.5.4.45)$$

■

证明从略. 由此引理即得以下推论.

推论 6.5.4.7 令 A 是 m 阶方阵，B 是 $n\times m$ 阶矩阵，则对每个满足 $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 都成立 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}>0$ 的充要条件是：存在一个数 $c_0>0$，使得对所有 $c\geqslant c_0$ 和 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，成立

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(A+cB^{\mathrm{T}}B)\boldsymbol{x}>0\qquad —(6.5.4.46)$$

■

在前面的引理中令 $u(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}\quad v(\boldsymbol{x})=(B\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{x}$ 并令

$$K=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1\quad\boldsymbol{x}\in R^m\}$$

即可得此推论. 相比较而言，Mann 定理显然更具有应用的方便性.

§6.5.5 非线性规划(全局)解的算法——二次规划、几何规划的直接解

本节标题中的“算法”所指的并不是非线性规划解的数值计算步骤，而是指的非线性规划求解过程的步骤，即逻辑解法的步骤.

---

[1] 引自《非线性规划》下册，M. Avriel，第 187 页. 符号略有改动. Avriel 指出，这一结果属于 Arrow、Could、Howe.

对于一般的非线性规划

$$
(\mathrm{P}):\quad \min\ f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x}\in R^m \quad \text{s.t.}\begin{cases} g_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0 & i=1,2,\cdots,k \\ h_j(\boldsymbol{x})=0 & j=1,2,\cdots,p \end{cases}
$$

记 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ $1\leqslant n\leqslant k$ $i_t < i_{t+1}$ 是1，2，…，k 中的一个递增子序列，

$$
I_i = \{(i_t) \mid (i_t) = (i_1, \cdots, i_n),\ 1\leqslant n\leqslant k,\ i_j < i_{j+1}\} \qquad —(6.5.5.1)
$$

是所有这样的子序列为元素的集合，并规定(0)元素也属于 I_i.

(P)规划问题的解 $\boldsymbol{x}^0$，一定有某个 $(i_t)\in I_i$，且

$$
\begin{cases} g_i(\boldsymbol{x}^0)=0 & i\in(i_t) \\ g_l(\boldsymbol{x}^0)>0 & l\notin(i_t) \end{cases} \quad 1\leqslant i, l\leqslant k \\
h_j(\boldsymbol{x}^0)=0 \qquad 1\leqslant j\leqslant p \qquad —(6.5.5.2)
$$

这即是(P)的核规划(P0). 从而，(P)的解 $\boldsymbol{x}^0$ 一定是以下等式约束规划的解

$$
(\mathrm{P0}):\quad \min\ f(\boldsymbol{x}) \quad \text{s.t.}\begin{cases} g_i(\boldsymbol{x})=0 & i\in(i_t) \\ h_j(\boldsymbol{x})=0 & j=1,\cdots,p \end{cases} \qquad —(6.5.5.3)
$$

因此，一般非线性规划问题的解，可归结为以下步骤

1. 对所有的子列 $(i_t)\in I_i$，解出以下非线性函数方程组

$$
\begin{cases} \nabla f(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{i\in(i_t)}\omega_i\nabla g_i(\boldsymbol{x}) + \sum\limits_{j=1}^{p}\zeta_j\nabla h_j(\boldsymbol{x}) \\ g_i(\boldsymbol{x})=0 \quad i\in(i_t) \quad h_j(\boldsymbol{x})=0 \quad j=1,\cdots,p \end{cases} \qquad —(6.5.5.4)
$$

记其解为 $\tilde{\boldsymbol{x}}(i_t)$、$\tilde{\omega}_i(i_t)$、$\zeta_j(i_t)$.

2. 对满足

$$
\begin{cases} g_l(\tilde{\boldsymbol{x}}(i_t))>0 & l\notin(i_t) \\ \tilde{\omega}_i(i_t)\geqslant 0 & i\in(i_t) \end{cases} \qquad —(6.5.5.5)
$$

的解 $\tilde{\boldsymbol{x}}(i_t)$、$\tilde{\omega}_i(i_t)$ 构造

$$
\boldsymbol{\omega}(i_t) = (\omega_i) = \begin{cases} \tilde{\omega}_i(i_t) & i\in(i_t) \\ 0 & i\notin(i_t) \end{cases} \quad i=1,\cdots,k \qquad —(6.5.5.6)
$$

并解出

$$
\begin{cases} \nabla g_i(\tilde{\boldsymbol{x}}(i_t))\boldsymbol{z}=0 & i\in(i_t) \\ \nabla h_j(\tilde{\boldsymbol{x}}(i_t))\boldsymbol{z}=0 & j=1,\cdots,p \\ \nabla g_l(\tilde{\boldsymbol{x}}(i_t))\boldsymbol{z}\geqslant 0 & l\notin(i_t) \end{cases} \qquad —(6.5.5.7)
$$

从而得到 $z \in \hat{\hat{Z}}^1(\tilde{x}(i_t))$ 集合.

3. 检验

$$z^{\mathrm{T}}[\nabla^2 f(\tilde{x}(i_t)) - \sum_{i\in(i_t)} \tilde{\omega}_i(i_t)\nabla g_i(\tilde{x}(i_t)) - \sum_{j=1}^{p}\zeta_j(i_t)\nabla h_j(\tilde{x}(i_t))]z \geqslant 0$$

$$z \in \hat{\hat{Z}}^1(\tilde{x}(i_t)) \qquad \text{—(6.5.5.8)}$$

满足以上关系的全体$\tilde{x}(i_t)$就是(P)规划的满足一阶、二阶约束品性的局部极小值点.

以上算法是枚举法. 但它只要解出(6.5.5.4)式、(6.5.5.7)式决定的非线性等式方程组和线性不等式方程组,从算法上讲相对比较简单些. 并且,如果能够得到(6.5.5.4)式的全部解,那么,以上算法就能够给出(P)的所有解. 例如,对于二次规划问题,(6.5.5.4)式即为线性方程组,从而,可以得到所有解.

(a) 二次规划问题的解法分析

一个二次规划问题是

$$(\mathrm{QP}):\ \begin{cases}\min\quad f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax + b^{\mathrm{T}}x + c \quad x \in R^m \quad A^{\mathrm{T}} = A \\ \text{s.t.}\quad Bx \geqslant d\end{cases} \qquad \text{—(6.5.5.9)}$$

设 $x \in P(Bx \geqslant d)$ 表为(可见 § 5.6 节内容),

$$x = \Phi u + \Lambda t + Ds \quad u \geqslant 0 \ \sum_i u_i = 1 \quad s \geqslant 0 \quad t \in R^{m-r} \quad r = \operatorname{rank} B$$

先设 $\mathbf{0}$ 不是 $P(Bx \geqslant d)$ 的极点. 将上式代入(6.5.5.9)式

$$f(x) = f(t,u,s) = t^{\mathrm{T}}A_\alpha t + s^{\mathrm{T}}A_\beta s + u^{\mathrm{T}}A_\varphi u + 2t^{\mathrm{T}}A_\gamma s + 2t^{\mathrm{T}}A_\sigma u + $$
$$+ 2s^{\mathrm{T}}A_\epsilon u + b_\alpha^{\mathrm{T}}t + b_\beta^{\mathrm{T}}s + b_\gamma^{\mathrm{T}}u + c \qquad \text{—(6.5.5.10)}$$

其中

$$\begin{cases}A_\alpha = \Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda & A_\beta = D^{\mathrm{T}}AD & A_\varphi = \Phi^{\mathrm{T}}A\Phi \\ A_\gamma = \Lambda^{\mathrm{T}}AD & A_\sigma = \Lambda^{\mathrm{T}}A\Phi & A_\epsilon = D^{\mathrm{T}}A\Phi \\ b_\alpha^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}}\Lambda & b_\beta^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}}D & b_\gamma^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}}\Phi\end{cases} \qquad \text{—(6.5.5.10a)}$$

由(6.5.5.10)式关于 t 的无约束极值一阶条件

$$\frac{\partial f(t,u,s)}{\partial t} = \mathbf{0}$$

得

$$2A_\alpha t + 2A_\gamma s + 2A_\sigma u + b_\alpha = \mathbf{0} \qquad \text{—(6.5.5.11)}$$

(1) $|A_\alpha| \neq 0$. 可得

$$\tilde{t} = \tilde{t}(s, u) = -\left(A_\alpha^{-1}A_\gamma s + A_\alpha^{-1}A_\sigma u + \frac{1}{2}A_\alpha^{-1}b_\alpha\right) \quad —(6.5.5.12)$$

将(6.5.5.12)式代回到(6.5.5.10)式，即得以下二次规划

$$\begin{cases} \min f(s, u) = s^T A_s s + u^T A_u u + 2s^T A_{su} u + b_s^T s + b_u^T u + d \\ \text{s.t.} \begin{cases} \sum_i u_i = 1 \\ u \geqslant 0 \\ s \geqslant 0 \end{cases} \end{cases} \quad —(6.5.5.13)$$

其中

$$\begin{cases} A_s = A_\beta - A_\gamma^T A_\alpha^{-1} A_\gamma \quad A_u = A_\varphi - A_\sigma^T A_\alpha^{-1} A_\sigma \quad A_{su} = A_\varepsilon - A_\gamma^T A_\alpha^{-1} A_\sigma \\ b_s^T = b_\beta^T - b_\alpha^T A_\alpha^{-1} A_\gamma \quad b_u^T = b_\gamma^T - b_\alpha^T A_\alpha^{-1} A_\sigma \quad d = c - \frac{1}{4} b_\alpha^T A_\alpha^{-1} b_\alpha \end{cases} \quad —(6.5.5.13a)$$

(6.5.5.13a)式仍可利用以上算法解出. 即设(i_t)、(j_s)分别是 s_i、u_j 的下标序列的一个子列，对所有这样的子列(包括(0)子列)，分别解出(6.5.5.13)式的子规划(可只求出一阶最优解)

$$\begin{cases} \min \quad f(s, u) \\ \text{s.t.} \begin{cases} \sum_i u_i = 1 \\ u_j = 0 \quad j \in (j_s) \\ s_i = 0 \quad i \in (i_t) \end{cases} \end{cases} \quad —(6.5.5.13b)$$

对(6.5.5.13b)式给出的全部(一阶条件)解$\tilde{s}$、$\tilde{u}$，可得到对应的$\tilde{x}$，对全部这样的$\tilde{x}$可检验原始规划的一阶、二阶条件最终找到可能存在的(全部)局部极值点.

(2) $|A_\alpha| = 0$. 设 $\text{rank}\, A_\alpha = h$. 设 A_α 的前 h 阶顺序主子矩阵 A_{11}^α 可逆. 对(6.5.5.11)式作分块处理，有

$$\begin{cases} A_{11}^\alpha t_1 + A_{12}^\alpha t_2 + A_1^\gamma s + A_1^\sigma u + \frac{1}{2} b_1^\alpha = 0 \\ A_{21}^\alpha t_2 + A_{22}^\alpha t_2 + A_2^\gamma s + A_2^\sigma u + \frac{1}{2} b_2^\alpha = 0 \end{cases} \quad —(6.5.5.14)$$

从(6.5.5.14)式的第一组方程中解出 t

$$t = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(A_{11}^\alpha)^{-1} b_1^\alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(A_{11}^\alpha)^{-1} A_1^\gamma \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -(A_{11}^\alpha)^{-1} A_1^\sigma \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -(A_{11}^\alpha)^{-1} A_{12}^\alpha \\ I_N \end{bmatrix} p$$

$$—(6.5.5.15)$$

其中 $N = m - r - h$，I_N 是单位矩阵.

将(6.5.5.15)式代入到(6.5.5.14)式的第二组方程，经整理就得到以下一个约束条件

$$\frac{1}{2}(A_{21}^{\alpha}(A_{11}^{\alpha})^{-1}\boldsymbol{b}_1^{\alpha} - \boldsymbol{b}_2^{\alpha}) = (A_2^{\gamma} - A_{21}^{\alpha}(A_{11}^{\alpha})^{-1}A_1^{\gamma})\boldsymbol{s} + (A_2^{\sigma} - A_{21}^{\sigma}(A_{11}^{\alpha})^{-1}A_1^{\sigma})\boldsymbol{u} \quad —(6.5.5.16)$$

规定

$$\begin{cases} A_s = A_{\beta} - (A_1^{\gamma})^{\mathrm{T}}(A_{11}^{\alpha})^{-1}A_1^{\gamma} \quad A_u = A_{\varphi} - (A_1^{\sigma})^{\mathrm{T}}(A_{11}^{\alpha})^{-1}A_1^{\sigma} \\ A_{su} = A_{\epsilon} - (A_1^{\gamma})^{\mathrm{T}}(A_{11}^{\alpha})^{-1}A_1^{\sigma} \\ \boldsymbol{b}_s^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{b}_{\beta}^{\mathrm{T}} - (\boldsymbol{b}_1^{\alpha})^{\mathrm{T}}(A_{11}^{\alpha})^{-1}A_1^{\gamma} \quad \boldsymbol{b}_u^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{b}_{\gamma}^{\mathrm{T}} - (\boldsymbol{b}_1^{\alpha})^{\mathrm{T}}(A_{11}^{\alpha})^{-1}A_1^{\sigma} \\ d = c - \frac{1}{4}(\boldsymbol{b}_1^{\alpha})^{\mathrm{T}}(A_{11}^{\alpha})^{-1}\boldsymbol{b}_1^{\alpha} \end{cases} \quad —(6.5.5.16a)$$

则可得到以下二次规划

$$\min \quad f(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}A_s\boldsymbol{s} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A_u\boldsymbol{s} + 2\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}A_{su}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{b}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} + d \quad —(6.5.5.17)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} (6.5.5.16)\text{式} \\ \sum_i u_i = 1 \\ \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

这也是易解的形式.具体方法类似(6.5.5.13)式规划.

设(6.5.5.17)式的解是$\tilde{\boldsymbol{s}}$, $\tilde{\boldsymbol{u}}$.将其代回到(6.5.5.15)式得到$\tilde{\boldsymbol{t}}(\tilde{\boldsymbol{s}}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{p})$形式的解，并可得到

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}(\tilde{\boldsymbol{s}}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{\Phi}\tilde{\boldsymbol{s}} + \Lambda\tilde{\boldsymbol{t}}(\tilde{\boldsymbol{s}}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{p}) + D\tilde{\boldsymbol{u}} \quad —(6.5.5.18)$$

再由(6.5.4.44)式，若$\tilde{\boldsymbol{x}}$是极小值点，就必要有

$$N(\Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda) = N(A\Lambda) \Leftrightarrow A\Lambda\begin{bmatrix} -(A_{11}^{\alpha})^{-1}A_{12}^{\alpha} \\ I_N \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \quad —(6.5.5.19)$$

所以，省略(6.5.5.15)式中的[·]$\boldsymbol{p}$项(如取 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$)，并因此记(6.5.5.18)式的$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}(\tilde{\boldsymbol{s}}, \tilde{\boldsymbol{u}})$，则应成立

$$2A\boldsymbol{x}(\tilde{\boldsymbol{s}}, \tilde{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{b} = \tilde{B}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}} \geqslant \boldsymbol{0} \quad —(6.5.5.20)$$

其中$\tilde{B}$矩阵是B矩阵的行向量$\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}$中成立$\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = 0$的那些行向量所组成的(子)矩

阵. 在(6.5.5.19～20)式成立时,(6.5.5.18)式给出的 $\boldsymbol{x}(\tilde{s}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{p})$ $\quad \boldsymbol{p} \in R$ 就是满足 $K-T$ 条件的一阶最优性条件的点集.

用添加 0 分量的方式,将 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 乘子拓展成维数与 B 矩阵行维数相同的乘子向量 $\boldsymbol{\omega}$,并由此可得到集合

$$\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}(\tilde{s}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{p})) = \hat{\hat{Z}}^1(\tilde{\boldsymbol{x}})$$

从而可检验

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{z} \geqslant 0 \quad \boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\tilde{\boldsymbol{x}})$$

是否成立,并最终确定 $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}(\tilde{s}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{p})$ 是否为极小值点集合.

例 6.5.5.1 设

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

求解

$$\begin{aligned} &\min \quad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} + c \\ &\mathrm{s.t.} \quad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

解: 直接利用(6.5.5.4)式,如取 $(i_t) = (2, 3, 4)$ 即解

$$\begin{aligned} &\min \quad f(\boldsymbol{x}) \\ &\mathrm{s.t.} \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0 \quad x_1 \geqslant 0 \end{aligned}$$

这等价于直接求解无约束极小值(一阶必要条件的解,下同)

$$\min \quad 3x_1^2 - x_1 + c \Rightarrow x_1 = \frac{1}{6}$$

从而 $\tilde{\boldsymbol{x}}(2, 3, 4) = \left(\frac{1}{6}, 0, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$.

当然,如对某个 (i_t) 子列,从 $x_i = 0 \quad i \in (i_t)$ 条件下的无约束规划中得到的解 $x_j < 0 \quad j \notin (i_t)$,就剔除这个解. 如对 $(i_t) = (1, 2, 3)$ 则在 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 时,直接解

$$\min \quad 2x_4^2 + x_4 + c \Rightarrow x_4 = -\frac{1}{4}$$

便应舍去这一个解.

特别指出,在取 $(i_t) = (4)$ 时,在 $x_4 = 0$ 条件下,直接解无约束规划

$$\min \quad (x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+(-1,\ 0,\ -1)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+c$$

中，由一阶条件得

$$\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3=\dfrac{1}{2}\\ -2x_1+2x_2\qquad=0\\ x_1+\qquad x_3=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}t\quad t\in R$$

再由 $\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0}$，得 $0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}$. 所以

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(4)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{s}\quad \boldsymbol{s}\geqslant\boldsymbol{0}\quad s_1+s_2=1$$

这样，对全部 $(i_t)\in I_i$，可得到

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\left[\begin{matrix}\frac{1}{6} & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\quad\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right]\boldsymbol{s}$$

作乘积 $2A\tilde{\boldsymbol{x}}$，并用 $\boldsymbol{b}$ 加到 $2A\tilde{\boldsymbol{x}}$ 各个列向量以得到乘子 $\boldsymbol{\omega}$，有

$$\left[\begin{matrix}1 & -1 & 0\\ -\frac{2}{3} & 0 & -2\\ \frac{2}{3} & -1 & -2\\ 0 & 1 & 4\end{matrix}\quad\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right]\boldsymbol{s}$$

由要求 $\boldsymbol{\omega}\geqslant\boldsymbol{0}$ 即知本例规划的极小值点(集合)是(因 A 矩阵是半正定的)

$$\boldsymbol{x}^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0} \quad s_1 + s_2 = 1$$

其对应的 L—乘子是 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$. 这仅表示以上 $\boldsymbol{x}^0$ 点(集合)其实应看作是无约束规划

$$\min \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} + c$$

解集合

$$\boldsymbol{x}^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t \quad t \in R$$

在 $\boldsymbol{x}^0 \geqslant \boldsymbol{0}$ 限制下的一个子集合. 在这种情形下,K-T 条件中的一阶条件所利用的 Farkas 引理具有的几何意义就不复存在,所以,只能将 $\boldsymbol{x}^0$ 看成为上述无约束规划的解在 $\boldsymbol{x}^0 \geqslant \boldsymbol{0}$ 限制下的子集(参见 §6.6 节内容).

例 6.5.5.2 设

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

求解

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} + c \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

解: 仍对 $(i_t) \in I_i$ 令 $x_i = 0 \quad i \in (i_t)$, 然后求解由 $x_j \quad j \notin (i_t)$ 决定的无约束规划

$$\min \quad \sum_j a_{jj} x_j^2 + 2 \sum_{k,j} a_{kj} x_k x_j + \sum_j b_j x_j + c \quad k, j \notin (i_t)$$

得到满足非负条件的全体极值解是

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 5 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

用 $\boldsymbol{b}$ 向量加到 $2A\tilde{\boldsymbol{x}}$ 乘积矩阵的各列向量，即知，极小值点是

$$\boldsymbol{x}^0 = \left(\frac{7}{2},\ 5,\ 0,\ 2\right)^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\omega} = (0,\ 0,\ 2,\ 0)^{\mathrm{T}}$$

由于本例中 A 矩阵是正定的，故 $\boldsymbol{x}^0$ 即为极小值点. 且 $\boldsymbol{x}^0$ 是在令 $x_3 = 0$ 即$(i_t) = (3)$ 时以下无约束规划的解

$$\min \quad (x_1,\ x_2,\ x_4)\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} + (-1,\ -2,\ 2)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} + c$$

例 6.5.5.3 设 A、$\boldsymbol{b}$ 同上例. 求解以下规划

$$\min \quad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + c$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_i x_i = 1 \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

解：对所有 $(i_t) \in I_t$ 求解以下等式约束规划(取 $x_i = 0 \quad i \in (i_t)$)

$$\begin{cases} \min & \sum_j a_{jj}x_j^2 + 2\sum_{k,j} a_{kj}x_kx_j + \sum_j b_jx_j + c \\ \text{s. t.} & \sum_j x_j = 1 \end{cases} \qquad j,\ k \notin (i_t)$$

可得到满足非负条件的全部解为

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & \frac{1}{3} & \frac{7}{18} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{12}{20} & 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{8} & 0 & 0 & \frac{11}{18} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{20} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{3}{10} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对应的乘子是

$$\zeta=\left(\frac{3}{10},\ \frac{3}{2},\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{16}{5},\ \frac{7}{3},\ -\frac{10}{9},\ 4,\ 3,\ 2,\ 5\right)$$

用 $\boldsymbol{b}-\zeta_j\cdot\mathbf{1}$ 的差(向量)加到 $2A\tilde{x}$ 乘积的各列向量(其中 $\mathbf{1}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$)即知本例规划的极小值点是

$$\boldsymbol{x}^0=\left(\frac{7}{18},\ \frac{11}{18},\ 0,\ 0\right)^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\omega}=\left(0,\ 0,\ \frac{8}{9},\ \frac{17}{9}\right)\quad \zeta=-\frac{10}{9}$$

例 6.5.5.4 设

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&-1&0&1\\-1&2&1&-1&-1\\-1&1&1&-1&-1\\0&-1&-1&\frac{1}{5}&0\\1&-1&-1&0&\frac{3}{2}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-2\\-2\\-3\\-2\\1\end{bmatrix}$$

现 A 是不定矩阵. 再设

$$B=\begin{bmatrix}1&-2&-3&1&1\\2&0&1&-3&-2\\-4&-4&-9&11&8\end{bmatrix}$$

求解

$$\begin{aligned}\min\quad & f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+c\\ \text{s.t.}\quad & B\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0}\end{aligned}$$

解: 本例约束条件不等式组的解(见本书§5.5.2节的例5.5.1.1续例)是

$$\boldsymbol{x}=\Lambda\boldsymbol{t}+D\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&1\\-\frac{7}{4}&\frac{5}{4}&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{t}+\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&0\\-\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{s}\quad \boldsymbol{t}\in R^3\quad \boldsymbol{s}\geqslant\mathbf{0}$$

由此得到

$$A_\alpha=\begin{bmatrix}\frac{27}{8}&-\frac{17}{8}&-2\\-\frac{17}{8}&\frac{63}{40}&2\\-2&2&\frac{7}{2}\end{bmatrix}\quad A_\beta=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\quad A_\gamma=\begin{bmatrix}\frac{7}{24}&1\\\frac{7}{24}&0\\\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}$$

$$b_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{15}{2} \\ -3 \end{bmatrix} \quad b_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

现在 A_α 是半正定矩阵，A_β 为正定矩阵. 因 $\operatorname{rank} A_\alpha = 2$，故 A_α 不可逆. 由以上所述的解法，利用

$$A_{11}^\alpha = \begin{bmatrix} \frac{27}{8} & -\frac{17}{8} \\ -\frac{17}{8} & \frac{63}{40} \end{bmatrix} \quad (A_{11}^\alpha)^{-1} = \frac{5}{4}\begin{bmatrix} \frac{63}{40} & \frac{17}{8} \\ \frac{17}{8} & \frac{27}{8} \end{bmatrix}$$

可得到(见(6.5.5.15)式)

$$t = \begin{bmatrix} \frac{543}{64} \\ \frac{885}{64} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{32}\begin{bmatrix} -\frac{259}{6} & -63 \\ -\frac{385}{6} & -85 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -\frac{11}{8} \\ -\frac{25}{8} \\ 1 \end{bmatrix} p \quad s \geqslant \mathbf{0} \quad p \in R$$

并得到(6.5.5.16)式为

$$47s_1 + 66s_2 = 441$$

以及

$$A_s = \frac{1}{1\,152}\begin{bmatrix} -935 & -1\,266 \\ -1\,266 & -1\,692 \end{bmatrix} \quad b_s = \begin{bmatrix} \frac{833}{64} \\ \frac{575}{32} \end{bmatrix}$$

因此再解以下规划

$$\min \quad s^{\mathrm{T}} A_s s + b_s^{\mathrm{T}} s$$
$$\text{s. t.} \begin{cases} 47s_1 + 66s_2 = 441 \\ s \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

可得到解 $\tilde{s}$ 及等式约束函数的乘子 ζ_s、不等式约束函数的乘子 ω_s，

$$\tilde{s} = \left(\frac{441}{47},\ 0\right)^{\mathrm{T}} \quad \omega_s = \left(0,\ \frac{339\,903}{70\,688}\right)^{\mathrm{T}} \quad \zeta_s = -\frac{47\,957}{424\,128}$$

由于现在 A_s 矩阵不满足定理 6.5.4.4 的条件，由此即知此 $\tilde{s}$ 不是极小值解. 但仍写出以下步骤以方便理解前述的解法.

由 $\tilde{s}$ 得到

$$\tilde{\boldsymbol{t}}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1\,569}{1\,128}\\-\dfrac{5\,625}{1\,128}\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\dfrac{11}{8}\\-\dfrac{25}{8}\\1\end{bmatrix}p$$

以及

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\frac{1}{1\,128}\begin{bmatrix}-4\,320\\-558\\-4\,707\\-5\,625\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\-\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{11}{8}\\-\dfrac{25}{8}\\1\end{bmatrix}p$$

将$\tilde{\boldsymbol{x}}$代入到约束条件中，知 $B\tilde{\boldsymbol{x}}$的第一、二式均大于 0，第三式等于 0. 故乘子 $\omega_1=\omega_2=0$，$\omega_3\geqslant 0$.

可注意到上式右边 p 参数前系数向量不满足(6.5.5.19)式，即

$$A\cdot\begin{bmatrix}-3\\-\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{11}{8}\\-\dfrac{25}{8}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{25}{8}\\\dfrac{11}{4}\\\dfrac{13}{4}\\\dfrac{5}{4}\\\dfrac{3}{8}\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{0}$$

故 $N(\Lambda^{\mathrm{T}}A\Lambda)\neq N(A\Lambda)$. 由此即知以上(不论 p 取何值)给出的$\tilde{\boldsymbol{x}}$均不是极小值点.

但可知以上的$\tilde{\boldsymbol{x}}$(集合)中，存在满足一阶最优性条件的点. 这可由

$$2A\tilde{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}_3\omega_3\quad(\boldsymbol{b}_3^{\mathrm{T}}\text{ 是 }B\text{ 的第 3 行向量})$$

即

$$\begin{cases}-\dfrac{25}{4}p+4\omega_3=\dfrac{4\,503}{564}\\\dfrac{11}{2}p+4\omega_3=-\dfrac{2\,994}{564}\\\dfrac{13}{2}p+9\omega_3=-\dfrac{2\,988}{564}\\\dfrac{5}{2}p-11\omega_3=-\dfrac{3\,012}{564}\\\dfrac{3}{4}p-8\omega_3=-\dfrac{1\,509}{564}\end{cases}\Rightarrow p=-\frac{2\,499}{2\,209}\quad\omega_3=\frac{1\,009}{4\,418}$$

从而得到

$$\boldsymbol{x}^0 = \frac{1}{26\,508}\begin{bmatrix} -11\,556 \\ 1\,881 \\ -69\,381 \\ -38\,475 \\ -29\,988 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1\,009}{4\,418} \end{bmatrix}$$

为满足一阶条件的点. 由以上的分析已知 $\boldsymbol{x}^0$ 不是极小值点. 这也可以由 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 的构造检验之.

现 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$ 是以下方程组的解集合

$$\begin{cases} -4z_1 - 4z_2 - 9z_3 + 11z_4 + 8z_5 = 0 \\ z_1 - 2z_2 - 3z_3 + z_4 + z_5 \geqslant 0 \\ 2z_1 + z_3 - 3z_4 - 2z_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

得解

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} & 1 \\ -\dfrac{7}{4} & \dfrac{5}{4} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{h} + \begin{bmatrix} \dfrac{83}{8} \\ -1 \\ -\dfrac{7}{4} \\ \dfrac{5}{4} \\ 1 \end{bmatrix} v \quad \boldsymbol{h} \in R^3 \quad v \geqslant 0$$

由定理 6.5.4.4 即知

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{z} \geqslant 0 \quad \boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$$

不成立, 因为(6.5.4.41)式不成立. 故 $\boldsymbol{x}^0$ 不是极小值点. 因此本例规划没有极小值点.

如果 $\boldsymbol{0}$ 是(6.5.5.9)式的约束条件解空间 $P(B\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{d})$ 的极点, 则 $\boldsymbol{x} \in P(B\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{d})$ 就应表成

$$\boldsymbol{x} = \Phi\boldsymbol{u} + \Lambda\boldsymbol{t} + D\boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \quad 0 \leqslant \sum_i u_i \leqslant 1 \quad \boldsymbol{t} \in R^{m-r} \quad \boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0}$$

从而(6.5.5.13、17)式规划的约束条件 $\sum_i u_i = 1$ 就要表成 $0 \leqslant \sum_i u_i \leqslant 1$. 由于 $\sum_i u_i = 1$ 在几何上表示是一个超平面, 而 $0 \leqslant \sum_i u_i \leqslant 1$ 则表示为一个多面体. 所以, 会产生一些不同的情形.

对于(6.5.5.9)式给出的一般(QP)规划,设$\mathbf{0}$是$P(\boldsymbol{Bx} \geqslant \boldsymbol{d})$的极点之一,此即表示总要有$\boldsymbol{d} \leqslant \mathbf{0}$. 则在导出(6.5.5.13)式的二次规划时,应为

$$\begin{cases} \min \quad f(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{u}) \\ \text{s. t.} \begin{cases} 0 \leqslant \sum_i u_i \leqslant 1 \\ \boldsymbol{u} \geqslant \mathbf{0} \\ \boldsymbol{s} \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \end{cases} \qquad \text{—(6.5.5.21)}$$

对(6.5.5.21)式规划,仍令$s_i = 0$当$i \in (i_t)$. 并记这样规定下的$\boldsymbol{s}$为$\boldsymbol{s}(i_t)$. (6.5.5.21)式规划有以下子规划

$$\begin{cases} \min \quad f(\boldsymbol{s}(i_t), \boldsymbol{u}) \\ \text{s. t.} \ 0 \leqslant \sum_j u_j \leqslant 1 \end{cases} \qquad \text{—(6.5.5.21a)}$$

从中可先解出关于$\boldsymbol{s}(i_t)$的无约束规划的一阶条件解

$$2A_s(i_t)\boldsymbol{s}(i_t) + 2A_{su}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}_s(i_t) = \mathbf{0} \qquad \text{—(6.5.5.22)}$$

其中$A_s(i_t)$、$A_{su}(i_t)$分别是A_s划去(i_t)行、列向量和A_{su}矩阵划去(i_t)行向量后的**余子矩阵**,$\boldsymbol{b}_s(i_t)$则是划去(i_t)下标子列对应分量后$\boldsymbol{b}_s$的**余子向量**.

(1) 设$A_s(i_t)$可逆. 有

$$\boldsymbol{s}(i_t) = -A_s^{-1}(i_t)A_{su}(i_t)\boldsymbol{u}(j_s) - \frac{1}{2}A_s^{-1}(i_t)\boldsymbol{b}_s(i_t) \qquad \text{—(6.5.5.23)}$$

规定

$$\begin{cases} \widetilde{A} = A_u - A_{su}^{\mathrm{T}}(i_t)A_s^{-1}(i_t)A_{su}(i_t) \\ \tilde{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{b}_u^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{b}_s^{\mathrm{T}}(i_t)A_s^{-1}(i_t)A_{su}(i_t) \\ \tilde{c} = d - \frac{1}{4}\boldsymbol{b}_s^{\mathrm{T}}(i_t)A_s^{-1}(i_t)\boldsymbol{b}_s(i_t) \end{cases} \qquad \text{—(6.5.5.22a)}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \cdots -1 \\ -A_s^{-1}(i_t)A_{su}(i_t) & \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2}A_s^{-1}(i_t)\boldsymbol{b}_s(i_t) \end{bmatrix} \qquad \text{—(6.5.5.22b)}$$

则(6.5.5.21)式又归结为

$$\begin{cases} \min \quad f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\widetilde{A}\boldsymbol{u} + \tilde{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{u} + \tilde{c} \\ \text{s. t.} \begin{cases} C\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{u} \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \end{cases} \qquad \text{—(6.5.5.24)}$$

(6.5.5.24)式约束条件的解空间$P(C\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{d})$一定是一个多面体. 以下用示例

6.5.5.5 说明这一类型二次规划解法.

(2) 设 $A_s(i_t)$ 不可逆. 类似(6.5.5.14)式对(6.5.5.22)式作分块处理,则(6.5.5.23)式可表成

$$s(i_t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(A_{11}^s(i_t))^{-1}\boldsymbol{b}_1^s(i_t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(A_{11}^s(i_t))^{-1}A_1^{su}(i_t) \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} + \\ + \begin{bmatrix} -(A_{11}^s(i_t))^{-1}A_{12}^s(i_t) \\ I_N \end{bmatrix}\boldsymbol{v} \quad —(6.5.5.25)$$

此式类似于(6.5.5.15)式. 并仍可得到一个约束条件

$$\frac{1}{2}(A_{21}^s(i_t)(A_{11}^s(i_t))^{-1}\boldsymbol{b}_1^s(i_t) - \boldsymbol{b}_2^s(i_t)) = (A_2^{su}(i_t) - A_{21}^s(i_t)(A_{11}^s(i_t))^{-1}A_1^{su}(i_t))\boldsymbol{u} \quad —(6.5.5.26)$$

(6.5.5.22a)式则成为

$$\begin{cases} \widetilde{A} = A_u - (A_1^{su}(i_t))^{\mathrm{T}}(A_{11}^s(i_t))^{-1}A_1^{su}(i_t) \\ \tilde{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}} = \tilde{\boldsymbol{b}}_u^{\mathrm{T}} - (\boldsymbol{b}_1^s(i_t))^{\mathrm{T}}(A_{11}^s(i_t))^{-1}A_1^{su}(i_t) \\ \tilde{c} = d - \frac{1}{4}(\boldsymbol{b}_1^s(i_t))^{\mathrm{T}}(A_{11}^s(i_t))^{-1}\boldsymbol{b}_1^s(i_t) \end{cases} \quad —(6.5.5.26a)$$

(6.5.5.22b)式现成为

$$C = \begin{bmatrix} -1 \quad -1 \cdots -1 \\ -(A_{11}^s(i_t))^{-1}A_1^{su}(i_t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2}(A_{11}^s(i_t))^{-1}\boldsymbol{b}_1^s(i_t) \end{bmatrix} \quad —(6.5.5.26b)$$

注意到在(6.5.5.26)式的约束下,将(6.5.5.25)式代入到(6.5.5.21a)式中,$\boldsymbol{v}$ 参数是不出现的,(6.5.5.24)式规划现成为

$$\begin{cases} \min \quad f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\widetilde{A}\boldsymbol{u} + \tilde{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{u} + \tilde{c} \\ \text{s.t.} \begin{cases} (6.5.5.26)\text{ 式} \\ C\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \end{cases} \quad —(6.5.5.27)$$

(6.5.5.27)式中的 C、$\boldsymbol{d}$ 由(6.5.5.26b)式给出,$\widetilde{A}$、$\tilde{\boldsymbol{b}}$ 由(6.5.5.26a)式给出. 这个规划的解法与(6.5.5.24)式规划的解法相似,其约束条件的解空间仍为多面体.

在(6.5.5.27)式规划中得到(一阶条件的)解 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 后,利用(6.5.5.25)式,可

得到

$$\begin{cases} -(A_{11}^{s}(i_t))^{-1}A_{12}^{s}(i_t)\boldsymbol{v} \geqslant \frac{1}{2}(A_{11}^{s}(i_t))^{-1}\boldsymbol{b}_1^{s}(i_t)+(A_{11}^{s}(i_t))^{-1}A_1^{su}(i_t)\,\tilde{\boldsymbol{u}}(j_s) \\ \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

—(6.5.5.28)

可从中解出 $\boldsymbol{v}$，并由此得到$\tilde{\boldsymbol{s}}(i_t)$.

利用这样得到的$\tilde{\boldsymbol{u}}$、$\tilde{\boldsymbol{s}}(i_t)$即可得到$\tilde{\boldsymbol{t}}$和$\tilde{\boldsymbol{x}}$. 对所有的$(i_t)$下标子列得到的全体$\tilde{\boldsymbol{x}}$，由原始规划的一阶、二阶条件便可找到全部局部极小值点.

对于(6.5.5.17)式形式的二次规划，若 $\boldsymbol{0}$ 是 $P(B\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{d})$ 的极点，情形与以上所述相似，只是描述起来更为繁琐，故不再另叙.

以下给予示例说明(6.5.5.24)式形式规划的解法.

例 6.5.5.5 设[1]

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

求解

$$\min \quad f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} B\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

解：解出约束函数不等式，其解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi u}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \quad 0 \leqslant \sum_{i=1}^{7} u_i \leqslant 1 \quad —(1)$$

其中 Φ 矩阵的列向量就是约束函数解空间 $P(B\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{d},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 的(非 $\boldsymbol{0}$)极点(顶点). 再应解以下形式的二次规划，仍记

〔1〕 引自《全局优化引论》，见前注，第 112 页，2.3 题.

$$A_u = \Phi^{\mathrm{T}} A \Phi = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 & -8 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & -8 & 0 & -8 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 9 & 6 & 9 \\ -8 & -8 & 0 & -16 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & -4 & 9 & -4 & 7 & 6 & 9 \\ -8 & 0 & 6 & -8 & 6 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 9 & -4 & 9 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}_u = \Phi^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ -6 \\ 16 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \min \quad f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} A_u \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}_u^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} \\ \text{s. t.} \begin{cases} 0 \leqslant \sum_i u_i \leqslant 1 \\ \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \end{cases} \qquad \text{—(2)}$$

(2)式的规划问题可表为以下形式

$$\begin{cases} \min \quad \sum_{i=1}^{7} a_{ii}^u u_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{7} a_{ij}^u u_i u_j + \sum_{i=1}^{7} b_i^u u_i \\ \text{s. t.} \begin{cases} 0 \leqslant u_1 + u_2 + \cdots + u_7 \leqslant 1 \\ u_i \geqslant 0 \quad i = 0, 1, \cdots, 7 \end{cases} \end{cases} \qquad \text{—(3)}$$

其中 a_{ij}^u、b_i^u 分别为 A_u、$\boldsymbol{b}_u$ 的对应元素.

对(3)式的规划，则可解出全部以下的子规划，令 $u_h = 0 \quad h \in (i_t)$，

$$\begin{cases} \min \quad \sum_j a_{jj}^u u_j^2 + 2 \sum_{\substack{i,j \\ i<j}} a_{ij}^u u_i u_j + \sum_i b_i^u u_i \quad i, j \notin (i_t) \text{ 且 } i, j > 0 \\ \text{s. t.} \quad 0 \leqslant \sum_i u_i \leqslant 1 \quad i \notin (i_t) \quad u_i \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{—(4)}$$

其中(i_t)为 1, …, 7 的任一个递增子列，予以解决. 而(4)式形式的规化，则再可以利用逐步分解的方法化简求之.

(4)式(子)规划的全部解 $\tilde{\boldsymbol{u}} \in R^7$ 中，剔除 $\tilde{\boldsymbol{u}} \ngeqslant \boldsymbol{0}$ 的解，对余下的非负解，可由(1)式得到 $\tilde{\boldsymbol{x}} = \Phi \tilde{\boldsymbol{u}}$，对这样的$\tilde{\boldsymbol{x}}$检验

$$2A\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b} = \widetilde{B}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad \text{—(6.5.5.20)}$$

便可得到所有满足 $K-T$ 条件一阶最优性条件的点(集).

但这样的对所有(i_t)下标子序列求解(4)式子规划是完全没有必要的.

注意，在解(4)式规划时，可以利用约束条件解空间值域 $R(B\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{d}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 的 0 元素的位置所提供的信息(参见 § 5.5.4 节与 § 5.6.2 节内容)，予以简化.

对本例来讲，值域集合是

$$
R(Bx \geqslant d,\ x \geqslant 0) = \begin{bmatrix} B \\ I_3 \end{bmatrix}\Phi = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & -3 & -6 & -6 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & -2 & -3 \\ & & & \Phi & & & \end{bmatrix} \quad \text{—(5)}
$$

用$\begin{bmatrix} -d \\ 0 \end{bmatrix}$向量加到上式右边矩阵的各个列向量上，得到以下矩阵

$$
\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \qquad \text{0 元素的列下标}
$$

$$
\begin{bmatrix} + & + & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & + & 0 & 0 & + & + \\ 0 & + & + & 0 & + & 0 & + \\ + & + & 0 & + & 0 & + & 0 \\ + & 0 & 0 & + & 0 & + & + \\ 0 & + & 0 & + & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & + & + & + \end{bmatrix}\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} (4,5,6,7) \\ (2,4,5) \\ (1,4,6) \\ (3,5,7) \\ (2,3,5) \\ (1,3,6,7) \\ (1,2,4) \end{array}\right. \quad \text{—(6)}
$$

其中“+”号代表某个正数. 由此即知约束函数解空间是 8 个顶点构成的多面体. 这一多面体共有 7 个边界平面，且边界平面分别由顶点$(i, j, \cdots)$的凸组合构造. 顶点的顺序编号以 Φ 矩阵的列下标为序. 从而各边界平面（暂不考虑 **0** 顶点时）由以下顶点（组）的凸组合构造.

(1, 4, 6)　(1, 3, 6, 7)　(1, 2, 4)　(2, 4, 5)　(2, 3, 5)　(3, 5, 7)
(4, 5, 6, 7)

这可以由(6)式矩阵各行向量中的 0 元素所在的列下标获知. 由于 **0**（即坐标系原点）也是一个顶点，将 **0** 顶点标记为“顶点 0”. 并在以上给出的边界平面的顶点$(i, j, \cdots)$的分量（即 Φ 矩阵的列向量分量）中，各对应分量之和含有 0 时，该边界平面以 **0** 为其顶点（之一）. 这样可知，**0** 点出现在(1, 3, 6, 7)、(2, 3, 5)和(1, 2, 4)顶点构造的边界平面中. 故将其写成为(0, 1, 3, 6, 7)、(0, 2, 3, 5)和(0, 1, 2, 4)顶点构造的边界平面.

由此，可以进一步得到各边界平面的交线（多面体的棱线）是那 2 个顶点的连线的信息. 如，以(0, 1, 2, 4)边界平面为例. 将(6)式中的第 1, 2, 4 列向量写出来，有

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 4 & \\ \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} + & + & 0 \\ + & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 \\ + & + & + \\ + & 0 & + \\ 0 & + & + \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{matrix} \qquad —(7)$$

则由第 2 行的 0 元素可知有棱线为 l_{24}(即顶点 2、4 间的连线),同样,由第 3 行的 0 元素可知有棱线 l_{14}. 这样,由第 1 列第 6 行的 0 元素、第 2 列第 5 行的 0 元素即知,还有棱线 l_{01}、l_{02}. 这里之所以不用考虑第 4 列第 1 行的 0 元素,是因为顶点 4 已由 l_{14}、l_{24} 棱线段与顶点 1、2 相连接,故在一个平面中,顶点 4 不可能再去与顶点 0(即原点)相连接. 所以,(0, 1, 2, 4)边界平面的边界线段,即为 l_{14}、l_{24}、l_{01}、l_{02} 线段.

显然,如果顶点 i、j 同时出现在$(i, j, \cdots)$和$(k, i, j, \cdots)$边界平面中,并且,已知 l_{ij} 是多面体的棱线段,那末,l_{ij} 就是$(i, j, \cdots)$边界平面与$(k, i, j, \cdots)$边界平面的公共边界线段.

由此可见,值域集合 $R(B\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{d},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 的列向量与 $\begin{bmatrix} -\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$ 向量之和的矩阵的 0 元素的下标关系,给出了多面体几何构造的完全信息. 这一点,在高维空间中对于多面体几何构造的了解至关重要.

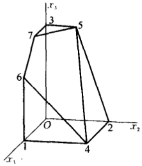


图 6.5.5.1

图 6.5.5.1 给出了 $P(B\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{d},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0})$ 的图形,可以与以上的分析对照. 图中各顶点的编号即对应于 Φ 矩阵的列向量的列下标.

现再回到本例的规划中,显然,本例的规划即为取 $\boldsymbol{x}$ 在这一多面体中的点的限制下,求目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的最小值. 因此,其解法可分解为求取 $\boldsymbol{x}$ 属于多面体内点时的 $f(\boldsymbol{x})$ 的极小值,以及 $\boldsymbol{x}$ 属于多面体边界平面(包括了棱线、顶点)上的点的 $f(\boldsymbol{x})$ 极小值这两部分予以解决.

而 $\boldsymbol{x}$ 属于多面体内点且 $f(\boldsymbol{x})$ 取极小值的情形,等价于求解(因其更为简单)以下无约束规划,并由一阶必要条件可求得其解,

$$\min \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \qquad —(8)$$

而求取 $\boldsymbol{x}$ 属于多面体边界平面上点时 $f(\boldsymbol{x})$ 的极小值,则可分别对$(i, j, \cdots)$边界平面逐个解出. 这里,对于不含有 $\boldsymbol{0}$ 顶点的边界平面比如(3,5,7)平面,就直接

解以下等式约束规划，并按一阶必要条件求得其解

$$\min \quad (u_3,\ u_5,\ u_7)\begin{bmatrix}9 & 9 & 9\\ 9 & 7 & 9\\ 9 & 9 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_3\\ u_5\\ u_7\end{bmatrix}+(-6,\ -2,\ -2)\begin{bmatrix}u_3\\ u_5\\ u_7\end{bmatrix}$$

$$\text{s.t.} \quad u_3+u_5+u_7=1$$

子规划. 如果这一类子规划的解不满足 $u_i \geqslant 0$，就将其舍去.

对于含有 **0** 顶点的边界平面，比如(0, 2, 3, 5)平面，则应解出以下子规划

$$\min \quad (u_2,\ u_3,\ u_5)\begin{bmatrix}-8 & 0 & -4\\ 0 & 9 & 9\\ -4 & 9 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\ u_3\\ u_5\end{bmatrix}+(8,\ -6,\ -2)\begin{bmatrix}u_2\\ u_3\\ u_5\end{bmatrix}$$

$$\text{s.t.} \quad 0\leqslant u_2+u_3+u_5\leqslant 1 \quad u_{2,3,5}\geqslant 0$$

为此，可先解出对应的无约束规划(即找到以上规划可能存在的内点解)，仍由一阶必要条件可求得其解，

$$\begin{bmatrix}-16 & 0 & -8\\ 0 & 18 & 18\\ -8 & 18 & 14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\ u_3\\ u_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\ 6\\ 2\end{bmatrix}$$

可得解

$$\begin{bmatrix}u_2\\ u_3\\ u_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ -1\\ 1\end{bmatrix}t \quad t\in R$$

再由 $u_i \geqslant 0$ 可得 $0\leqslant t\leqslant \frac{1}{3}$

$$\begin{bmatrix}u_2\\ u_3\\ u_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{h}\geqslant \boldsymbol{0} \quad h_1+h_2=1$$

显然，这个解等价于(0, 2, 3, 5)边界平面上的内点解. 故还应再对(0, 2, 3, 5)平面的各边界线上的点求一阶最优点. 但可注意到各边界线中，l_{25}、l_{35} 线段是(2, 4, 5)平面、(3, 5, 7)平面的公共边界. 因此，在求解(2, 4, 5)平面和(3, 5, 7)平面的等式约束(子)规划时，已包含了解出 l_{25}、l_{35} 线段上可能存在的一阶最

优点了. 所以,只要再对于 l_{02}、l_{03}线段上的点检验一阶条件是否成立即可. 以 l_{03}线段上的点为例,这即要求解

$$\min \quad 9u_3^2 - 6u_3$$

显然

$$u_3 = \frac{1}{3} \quad 其余\ u_i = 0$$

为此规划的一阶最优值点,且此解满足约束条件.

所以,总共要解出的是对(1, 4, 6)、(2, 4, 5)、(3, 5, 7)、(4, 5, 6, 7)边界平面求解等式约束的规划,对(0, 1, 2, 4)、(0, 1, 3, 6, 7)和(0, 2, 3, 5)边界平面求解无约束规划,对 l_{01}、l_{02}、l_{03}线段求解无约束规划. 在所有这些子规划中,可能存在不满足约束条件

$$\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0} \quad 0 \leqslant \sum_i u_i \leqslant 1$$

的(一阶条件的)解. 对此,均应舍去.

由此解法,得到以下各个子规划的对应解(一阶最优解)

1. 多面体内点无约束规划: $\tilde{\boldsymbol{x}}_0^{\mathrm{T}} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$

边界平面等式约束规划解

2. (1, 4, 6)平面: $u_4 = u_6 = \frac{1}{2}$(其余 $u_i = 0$,下同)$\Rightarrow \tilde{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}} = (2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$

3. (2, 4, 5)平面: $u_2 = \frac{5}{14}$, $u_4 = \frac{1}{2}$, $u_5 = \frac{1}{7}$, $\Rightarrow \tilde{\boldsymbol{x}}_2^{\mathrm{T}} = \left(1, \frac{13}{7}, \frac{3}{7}\right)^{\mathrm{T}}$

4. (3, 5, 7)平面: 没有符合约束条件的解.

5. (4, 5, 6, 7)平面: 同上.

边界平面无约束规划解

6. (0, 1, 2, 4)平面:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{h} \geqslant \boldsymbol{0} \quad h_1 + h_2 = 1$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_3^{\mathrm{T}} = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$$

7. (0, 1, 3, 6, 7)平面: $u_1 = \frac{1}{2}$、$u_3 = \frac{1}{3}$, $\tilde{\boldsymbol{x}}_4^{\mathrm{T}} = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$

8. (0, 2, 3, 5)平面:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{h} \geqslant \boldsymbol{0} \quad h_1 + h_2 = 1$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_5 = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$$

坐标轴上的无约束规划解

9. l_{01}线段：$u_1 = \frac{1}{2}$ $\quad \tilde{\boldsymbol{x}}_6^{\mathrm{T}} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$

10. l_{02}线段：$u_2 = \frac{1}{2}$ $\quad \tilde{\boldsymbol{x}}_7^{\mathrm{T}}(0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$

11. l_{03}线段：$u_3 = \frac{1}{3}$ $\quad \tilde{\boldsymbol{x}}_8^{\mathrm{T}} = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$

对这 9 个$\tilde{\boldsymbol{x}}_i$ 点，(除$\tilde{\boldsymbol{x}}_{6,7}$以外)可给出规划的对应乘子[1]. 如$\tilde{\boldsymbol{x}}_5$ 的对应乘子是

$$2A\,\tilde{\boldsymbol{x}}_5 + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \omega_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_5 = (0, 0, 0, 0, 4, 0, 0)^{\mathrm{T}}$$

且总共 7 个不等式约束中，只有第 5 个 $x_1 = 0$ 是有效约束. 所以

$$\hat{\hat{Z}}^1(\tilde{\boldsymbol{x}}_5) = \left\{ \boldsymbol{z} \,\middle|\, \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{h} \quad \boldsymbol{h} \in R^2 \right\}$$

故

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{z} = -2h_1^2 + h_2^2 \geqslant 0 \quad \boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\tilde{\boldsymbol{x}}_5)$$

不成立. 知$\tilde{\boldsymbol{x}}_5$ 不是极小值点. 如此，即知，只有对$\tilde{\boldsymbol{x}}_8$，

$$2A\,\tilde{\boldsymbol{x}}_8 + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \omega_5 \\ \omega_6 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_8 = (0, 0, 0, 0, 4, 4, 0)^{\mathrm{T}}$$

---

[1] 故$\tilde{\boldsymbol{x}}_{6,7}$应剔除.

且

$$\hat{\hat{Z}}^1(\tilde{\boldsymbol{x}}_8) = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}t \quad t \in R\}$$

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{z} = t^2 > 0 \quad \boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}_8)$$

所以，本例规划的极小值点即为 $\boldsymbol{x}^0 = (0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{x}^0$ 是全局极小值点，但 $\boldsymbol{x}^0$ 并不是一个顶点解.

这里给出的关于划分多面体边界平面的方法完全不依赖作图，故可以应用于高维二次规划. 对于上文给出的(6.5.5.12)式、(6.5.5.16)式形式的二次规划亦可应用这个简化算法求解.

由这里给出的算法，即可将一般二次规划分解成若干个简化的等式约束和无约束子规划这样的易解规划求解. 其依据即在于寻找到在局部极小值点邻域与原始的二次规划等价的那个核规划予以求解.

由于对于一般二次规划来讲，以上算法的总计算次数，大约为解出约束函数组 $B\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{d}$(或包括 $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 条件在内)的计算次数，再加上解出 N 元的等式约束二次规划问题

$$\begin{cases} \min & \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} \\ \mathrm{s.\,t.} & \sum_{1}^{N} u_i = 1 \end{cases}$$

的计算次数. 这里的 N 是 $P(B\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{d})$ 的极点总数.

(b) 几何规划问题的解法分析

一个非线性规划问题

$$(\mathrm{GP}):\quad \begin{cases} \min & f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in R_+^m \\ \mathrm{s.\,t.} & 0 \leqslant g_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{h=1}^{k_j} g_{jh}(\boldsymbol{x}) \leqslant 1 \quad j = 1,\ \cdots,\ k \end{cases} \qquad \text{—(6.5.5.29)}$$

$$\begin{cases} f_i(\boldsymbol{x}) = c_i \prod_{j=1}^{m} x_j^{a_{ij}} \quad i = 1,\ \cdots,\ n \quad c_i > 0 \\ g_{jh}(\boldsymbol{x}) = d_{jh} \prod_{p=1}^{m} x_p^{b_{hp}^j} \quad \begin{cases} h = 1,\ \cdots,\ k_j \\ j = 1,\ \cdots,\ k \end{cases} \quad d_{jh} > 0 \end{cases} \qquad \text{—(6.5.5.30)}$$

其中带下(上)标字母 a、b、c、d 均为实数，c、$d > 0$，即 $f(\boldsymbol{x})$、$g_j(\boldsymbol{x})$ 为正项式函数.

称(6.5.5.29～30)式给出的规划问题为(正项式)几何规划. 传统上几何规

划问题均是利用其对偶规划的形式加以分析与求解的[1]. 但利用直接解法，可以得到更多的信息.

将几何规划问题表成以下形式

$$\begin{cases} \min \quad f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\boldsymbol{x}) \\ \text{s. t.} \begin{cases} g_j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0 \\ -g_j(\boldsymbol{x}) \geqslant -1 \end{cases} \quad j = 1, \cdots, k \end{cases} \qquad —(6.5.5.31)$$

由本节以上给出的非线性规划问题解的一般方法(见(6.5.5.1～8)式)，(6.5.5.31)式规划先应分为内点解和边界点解这样两种情形分别予以求解.

(1) 内点解，即 $0 < g_j(\boldsymbol{x}^0) < 1 \quad j = 1, \cdots, k$ 的解. 这时，如果这样的局部极小值 $\boldsymbol{x}^0$ 存在，则 $\boldsymbol{x}^0$ 一定就是无约束规划

$$\min \quad f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\boldsymbol{x})$$

的解. 故由无约束规划的解法可得到内点最小值解.

(2) 边界点解，即至少有一个下标 $j = s$，使 $g_s(\boldsymbol{x}^0) = 0$ 或 $g_s(\boldsymbol{x}^0) = 1$ 成立的局部极小值解 $\boldsymbol{x}^0$. 但由 $g_j(\boldsymbol{x})$ 的幂函数形式即知，$g_s(\boldsymbol{x}^0) = 0$ 即意味着有至少一个下标 t，使 $x_t^0 = 0$. 故约束函数 $g_s(\boldsymbol{x}^0) = 0$ 的情形，可归结于在(6.5.5.31)式的局部极小值解中可取到 $x_t^0 = 0$ 的情形. 由 $f_i(\boldsymbol{x})$、$g_j(\boldsymbol{x})$ 的形式即知，$x_t = 0$ 可以取到的必要条件是幂指数

$$a_{it} \geqslant 0 \quad b_{ht}^j \geqslant 0 \quad \forall\, i, j, h \qquad —(6.5.5.32)$$

成立.

如果对于 $g_s(\boldsymbol{x})$，$h = 1, \cdots, k_s$ 有 $b_{ht}^s > 0$，在 $\boldsymbol{x}^0$ 极小值点的分量中 $x_t^0 = 0 \Rightarrow g_s(\boldsymbol{x}^0) = 0$. 除此而外，约束函数 $g_j(\boldsymbol{x}^0) = 0$ 是不可能的，即便 $\boldsymbol{x}^0$ 的分量中可取到 $x_t^0 = 0$.

容易理解，如果对某个下标 t，(6.5.5.32)式成立，那么，构造(6.5.5.31)式规划的 Largrange 函数

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_i f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_j \omega_j \sum_h g_{jh}(\boldsymbol{x}) - \sum_j \xi_j \sum_h (-g_{jh}(\boldsymbol{x}) + 1) \qquad —(6.5.5.33)$$

其中，ω_j、ξ_j 均为非负乘子. 对 L—函数求取 x_t 的一阶导数，

---

[1] 甚至有的文献上认为只能如此求解几何规划问题. 参见《非线性规划》上册，M. Avriel，第 200 页. 但从本书以下分析可见，并非如此.

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\xi})}{\partial x_t} = \sum_i a_{it} f_i(\boldsymbol{x}) x_t^{-1} - \sum_{j,\ h} \omega_j b_{ht}^j g_{jh}(\boldsymbol{x}) x_t^{-1} + \sum_{j,\ h} \xi_j b_{ht}^j g_{jh}(\boldsymbol{x}) x_t^{-1}$$
—(6. 5. 5. 34)

所以，当 a_{it}、b_{ht}^j 不是全部大于(等于)1 或者等于 0 的，(6. 5. 5. 34)式在 $x_t = 0$ 点处就是无穷大的即无确定值. 因此，当(6. 5. 5. 32)式成立，且有 a_{it}(或 b_{ht}^j)大于 0 但小于 1，则若 $\boldsymbol{x}^0$ 极小值点处有分量 $x_t^0 = 0$，就必须令

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = (x_1,\ \cdots,\ x_{t-1},\ 0,\ x_{t+1},\ \cdots,\ x_m)^{\mathrm{T}}$$

且在(6. 5. 5. 31)式中令 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 取代 $\boldsymbol{x}$，再来求取关于 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 的极小值点.

设 $\tilde{\boldsymbol{x}}^0$ 是

$$\begin{cases} \min \quad f(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\tilde{\boldsymbol{x}}) \\ \text{s. t.} \begin{cases} g_j(\tilde{\boldsymbol{x}}) \geqslant 0 \\ -g_j(\tilde{\boldsymbol{x}}) \geqslant -1 \end{cases} \end{cases}$$
—(6. 5. 5. 31a)

的解. 现尚要检验 $\tilde{\boldsymbol{x}}^0$ 是否就是(6. 5. 5. 31)式规划的极小值解. 这可以充分小的任意正实数 $a > 0$，作

$$\boldsymbol{x}(a) = (x_1,\ \cdots,\ x_{t-1},\ a,\ x_{t+1},\ \cdots,\ x_m)^{\mathrm{T}}$$

的参数化表示，并作规划

$$\begin{cases} \min \quad f(\boldsymbol{x}(a)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\boldsymbol{x}(a)) \\ \text{s. t.} \begin{cases} g_j(\boldsymbol{x}(a)) \geqslant 0 \\ -g_j(\boldsymbol{x}(a)) \geqslant -1 \end{cases} \end{cases}$$
—(6. 5. 5. 31b)

设(6. 5. 5. 31b)式规划的极小解是 $\boldsymbol{x}^0(a)$，则极小值函数是

$$F(a) = f(\boldsymbol{x}^0(a)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\boldsymbol{x}^0(a))$$

显然，若 $\tilde{\boldsymbol{x}}^0$ 是(3. 5. 5. 31)式规划的极小值解，则充要条件是有 $\varepsilon > 0$，使

$$f(\boldsymbol{x}^0(a)) \geqslant f(\tilde{\boldsymbol{x}}^0) \quad 0 \leqslant a \leqslant \varepsilon$$
—(6. 5. 5. 31c)

这可以利用包络定理检验 $F(a)$ 函数以 $a \to 0$ 为极小值予以解决

另一方面，若(6. 5. 5. 32)式成立，且 a_{it}、$b_{ht}^j > 1$(或 a_{it}、$b_{ht}^j = 0$) $\forall\, i,\ j,\ h$，则取 $x_t = 0$，(6. 5. 5. 34)式就必然成立(而不论 ω_j、ξ_j 及 $x_i \quad i \neq t$ 取任何值). 所以，这时(6. 5. 5. 31)式规划，仍等价于用 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 替代 $\boldsymbol{x}$ 后关于 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 的极小值规划.

实际上，由以下的例 6.5.5.8 及推论 6.5.5.1 可知，当几何规划的各函数

f_i、g_{jh} 中的某个 x_t 因子的幂指数均为非负实数时，该规划的最小值解与 f_i、g_{jh} 函数中 x_t 因子的正数幂指数的数值大小无关.

综合以上关于极小值点 $\boldsymbol{x}^0$ 的分量取到 0 值的情形的分析，即知，在(6.5.5.32)式成立时，用$\tilde{\boldsymbol{x}}$替代 $\boldsymbol{x}$ 再求取$\tilde{\boldsymbol{x}}$的极小值点，即可. 因此，以下的分析将不再考虑 $\boldsymbol{x}^0$ 的分量取到 0 值的情形.

当 $\boldsymbol{x}^0 > \boldsymbol{0}$ 时，边界点的极小值点，就只能出现在

$$\begin{cases}\min & f(\boldsymbol{x}) = \sum_i f_i(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & -g_j(\boldsymbol{x}) \geqslant -1 \quad j = 1, \cdots, k\end{cases} \qquad \text{—(6.5.5.35)}$$

形式的规划的解之中，并且，先只考虑极小值点处总有

$$g_j(\boldsymbol{x}^0) = 1 \quad j = 1, \cdots, k$$

成立的情形.

当然，有一种简单情形，如

$$\begin{cases}\min & f(\boldsymbol{x}) = \sum_i f_i(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & 0 \leqslant g_1(\boldsymbol{x}) \leqslant 1\end{cases}$$

并且，以上规划中 a_{it}、$b_{ht}^1 \geqslant 0$，那么，用$\tilde{\boldsymbol{x}}$取代 $\boldsymbol{x}$ 后，$g_1(\tilde{\boldsymbol{x}}) = 0$，并且，显然 $\nabla g_1(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}$，故，此时求取关于$\tilde{\boldsymbol{x}}$的极小值点就仍归结于无约束规划

$$\min \quad f(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \sum_i f_i(\tilde{\boldsymbol{x}})$$

的解. 除此而外，一般地，需要考虑$\tilde{\boldsymbol{x}}$取代 $\boldsymbol{x}$ 后，出现的是(6.5.5.35)式形式的规划问题.

对于(6.5.5.35)式的规划，由(6.5.5.33)式，得到

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{k} \xi_j \left(\sum_{h=1}^{k_j} g_{jh}(\boldsymbol{x}) - 1\right) \qquad \text{—(6.5.5.36)}$$

简记 $f_i(\boldsymbol{x})$、$g_{jh}(\boldsymbol{x})$为 f_i、g_{jh}，并注意到 $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ 的条件，即知一阶必要条件是

$$A^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \xi_1 \boldsymbol{g}_1 \\ \vdots \\ \xi_k \boldsymbol{g}_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \xi_j \geqslant 0 \quad j = 1, \cdots, k \qquad \text{—(6.5.5.37)}$$

其中 $\boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_n)^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{g}_j = (g_{j1}, \cdots, g_{jk_j})^{\mathrm{T}}$，显然，应有 $\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{g}_j \geqslant \boldsymbol{0}$，而 A 则是以下幂指数矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \\ b_{11}^1 & b_{12}^1 & \cdots & b_{1m}^1 \\ b_{21}^1 & b_{22}^1 & \cdots & b_{2m}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k_1 1}^1 & b_{k_1 2}^1 & \cdots & b_{k_1 m}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{11}^k & b_{12}^k & \cdots & b_{1m}^k \\ b_{21}^k & b_{22}^k & \cdots & b_{2m}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k_k 1}^k & b_{k_k 2}^k & \cdots & b_{k_k m}^k \end{bmatrix} \quad A\in R^{(n+\sum_j k_j)\times m} \quad —(6.5.5.38)$$

即 A 是 f_i、g_{jh} 幂函数中的各个幂指数 a_{ij}、b_{hp}^j 组成的矩阵. 由 $\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}$ 的条件，即知 A 矩阵的各个列的元素中，至少有一个正数同时至少有一个负数.

记

$$\boldsymbol{\sigma}_j=\xi_j\boldsymbol{g}_j \quad \boldsymbol{\sigma}_j=(\sigma_{j1},\sigma_{j2},\cdots,\sigma_{jk_j})^{\mathrm{T}}\sigma_{jh}=\xi_j g_{jh} \quad —(6.5.5.39)$$

因为

$$g_j(\boldsymbol{x}^0)=1\Rightarrow\sum_{h=1}^{k_j}g_{jh}=1 \quad \xi_j\sum_{h=1}^{k_j}g_{jh}=\sum_{h=1}^{k_j}\sigma_{jh}=\xi_j \quad —(6.5.5.40)$$

可将(6.5.5.37)式写成以下关于 $\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{\sigma}_j$ 的等式—不等式方程组

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{\sigma}\end{bmatrix}=\boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\sigma}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\sigma}_k\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}_j=(\sigma_{j1},\cdots,\sigma_{jk_j})^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{f},\ \boldsymbol{\sigma}_j\geqslant\boldsymbol{0} \quad j=1,\cdots,k \\ \sum_{h=1}^{k_j}\sigma_{jh}=\xi_j \quad \sigma_{jh}=\xi_j g_{jh} \end{cases} \quad —(6.5.5.41)$$

由此即知，(6.5.5.35)式规划有解的必要条件就是

$$\operatorname{rank}A<n+\sum_{j=1}^{k}k_j \quad —(6.5.5.42)$$

所以，当 $n+\sum_{j=1}^{k}k_j > m$ 时，这一必要条件总是满足的. 当

$$n+\sum_{j=1}^{k}k_j = m \quad 且 \quad \operatorname{rank} A = m \Rightarrow |A| \neq 0$$

则无解，因为在以上所设的 $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$ 条件下，$\boldsymbol{f} > \mathbf{0}$ 与(6.5.5.41)式在 $|A| \neq 0$ 时不相容.

先不考虑(6.5.5.41)式的第 3 组等式方程组，设(6.5.5.42)式成立. 从(6.5.5.41)式的第 1、2 组等式—不等式方程组可得到解(见§5 章)，

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{\sigma}\end{bmatrix} = D\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}D_f\\ D_g\end{bmatrix}\boldsymbol{u} \quad D = \begin{bmatrix}D_f\\ D_g\end{bmatrix} \geqslant 0 \quad \boldsymbol{u} \geqslant \mathbf{0} \qquad —(6.5.5.43)$$

其中 D 矩阵的列向量均为(6.5.5.41)式前 2 组方程组解空间的极点向量.

设(6.5.5.43)式中右边 $D\boldsymbol{u}$ 乘积(是向量)的分量不恒为 0. 否则，因为各个 f_{ij}、g_{jh} 因子均为正数，故只可能是某个 $\xi_j = 0$. 那么，就可以在(6.5.5.35)式规划剔除这个约束函数 $g_j(\boldsymbol{x})$(参见关于核规划的分析). 在这个条件下，就有所有的 $\xi_j > 0$ 成立.

则若记

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\sigma}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\sigma}_k\end{bmatrix} = D_g\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}D_{g_1}\\ \vdots\\ D_{g_k}\end{bmatrix}\boldsymbol{u} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_j = D_{g_j}\boldsymbol{u} \qquad —(6.5.5.43a)$$

即

$$\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_j = \mathbf{1}^{\mathrm{T}}D_{g_j}\boldsymbol{u} = \xi_j > 0 \quad \mathbf{1} = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}} \qquad —(6.5.5.44)$$

成立. 所以

$$\begin{cases}\boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{u}) = \dfrac{\boldsymbol{\sigma}_j}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}}D_{g_j}\boldsymbol{u}} = \dfrac{D_{g_j}\boldsymbol{u}}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}}D_{g_j}\boldsymbol{u}} \quad j = 1, \cdots, k\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = D_f\boldsymbol{u}\end{cases} \qquad —(6.5.5.45)$$

由(6.5.5.45)式知 g_{jh} 是 $\boldsymbol{u}$ 的 0 次齐次函数，但 f_i 则是 $\boldsymbol{u}$ 的线性齐次函数.

对(6.5.5.30)式两边取对数，经移项便得到以下方程组

$$A \cdot \ln \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}\ln \boldsymbol{f}\\ \ln \boldsymbol{g}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\ln \boldsymbol{c}\\ \ln \boldsymbol{d}\end{bmatrix} \qquad —(6.5.5.46)$$

其中，各向量符号的意义如下，

$$\ln \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} \ln \boldsymbol{g}_1 \\ \vdots \\ \ln \boldsymbol{g}_k \end{bmatrix} \quad \ln \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} \ln \boldsymbol{d}_1 \\ \vdots \\ \ln \boldsymbol{d}_k \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \boldsymbol{g}_j = (g_{j1},\ g_{j2},\ \cdots,\ g_{jk_j})^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{d}_j = (d_{j1},\ d_{j2},\ \cdots,\ d_{jk_j})^{\mathrm{T}} \end{matrix}$$

且这里规定对于向量 $\boldsymbol{a} = (a_i)$ 的取对数、取幂函数运算的意义为

$$\begin{cases} \ln \boldsymbol{a} = (\ln a_1,\ \ln a_2,\ \cdots,\ \ln a_m)^{\mathrm{T}} \\ \exp(\boldsymbol{a}) = (e^{a_1},\ e^{a_2},\ \cdots,\ e^{a_m})^{\mathrm{T}} \end{cases} \qquad \text{—(6.5.5.47)}$$

从(6.5.5.39)式和(6.5.5.46)式的相容性关系，可知，(6.5.5.35)式规划的有解的另一个必要条件是，有 $\boldsymbol{u} \geqslant \mathbf{0}$ 向量，使

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & \vdots & \ln \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) - \ln \boldsymbol{c} \\ & \vdots & \ln \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) - \ln \boldsymbol{d} \end{bmatrix} \qquad \text{—(6.5.5.48)}$$

其中，$[A \vdots \cdot]$是增广矩阵，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$、$\boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{u})$由(6.5.5.45)式给出.(6.5.5.41、48)两式即为几何规划的相容性条件.后面还有一个更综合的相容性条件.

对 A 矩阵作分块处理

$$A = \begin{bmatrix} A_f \\ A_g \end{bmatrix} \quad A_g = \begin{bmatrix} A_{g_1} \\ \vdots \\ A_{g_2} \end{bmatrix} \quad A_f = [a_{iv}] \quad A_{g_j} = [b_{hp}^j] \quad \begin{matrix} i = 1,\ \cdots,\ n \\ h = 1,\ \cdots,\ k_j \\ j = 1,\ \cdots,\ k \\ v,\ p = 1,\ \cdots,\ m \end{matrix}$$

将(6.5.5.46)式表成

$$\begin{cases} A_f \cdot \ln \boldsymbol{x} = \ln \boldsymbol{f} - \ln \boldsymbol{c} \\ A_g \cdot \ln \boldsymbol{x} = \ln \boldsymbol{g} - \ln \boldsymbol{d} \end{cases} \qquad \text{—(6.5.5.49)}$$

利用(6.5.5.41)、(6.5.5.49)式可知以下结论：

(2.1) 若 $\operatorname{rank} A_g = m$，则由(6.5.5.49)式

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\tilde{\boldsymbol{g}}) = \exp(A_g^{-1}(m) \cdot (\ln \tilde{\boldsymbol{g}} - \ln \tilde{\boldsymbol{d}})) \qquad \text{—(6.5.5.50)}$$

其中 $A_g(m)$是 A_g 矩阵中任取的一个 m 阶可逆子矩阵，$\ln \tilde{\boldsymbol{g}}$、$\ln \tilde{\boldsymbol{d}}$则是由 $A_g(m)$ 的行下标决定的 $\ln \boldsymbol{g}$、$\ln \boldsymbol{d}$ 向量的那些对应分量组成的子向量.(6.5.5.50)式的右边其实是一个 g_{jh}因子的幂(乘积)函数.

不加区别，也可以将(6.5.5.50)式的 $\boldsymbol{x}(\tilde{\boldsymbol{g}})$表成为 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{g})$.将 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{g})$代入到$f(\boldsymbol{x})$即得以下等式约束规划

$$\begin{cases} \min \quad f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{g})) \\ \text{s.t.} \quad \sum_{h=1}^{k_j} g_{jh} = 1 \quad j = 1,\ \cdots,\ k \end{cases} \qquad \text{—(6.5.5.51)}$$

从这一规划中直接解出 $\boldsymbol{g}$，利用(6.5.5.50)即得极小值解.

其次，利用(6.5.5.45)式，可得

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})) \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{g}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}),\ \cdots,\ \boldsymbol{g}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{u})$ 由(6.5.5.45)式给出. 从而，

$$f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{g})) = f(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})))$$

注意 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})$ 是 $\boldsymbol{u}$ 的 0 次齐次函数，故可解以下规划

$$\begin{cases} \min & f(\boldsymbol{u}) \\ \text{s.t.} & \sum_i u_i = 1 \end{cases} \qquad —(6.5.5.52)$$

并由此得到极小值解. 如(6.5.5.52)式有解，自然可得 $u_i \geqslant 0$ 的解.

可以选取(6.5.5.51～52)式中函数形式相对简单的那一个求解[1].

(2.2) 若 $\operatorname{rank} A_g < m \quad \operatorname{rank} A_f = m$，则由(6.5.5.49)式

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{f}) = \exp(A_f^{-1}(m) \cdot (\ln \tilde{\boldsymbol{f}} - \ln \tilde{\boldsymbol{c}})) \qquad —(6.5.5.53)$$

各符号意义同上.

将(6.5.5.45)式中的 $\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u})$ 代入 $\tilde{\boldsymbol{f}}$，即得

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x}(\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}))$$

从而解出以下的无约束规划

$$\min \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}))) \qquad —(6.5.5.54)$$

即得到极小值.

这里之所以取为无约束规划，是因为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ 是 $\boldsymbol{u}$ 的线性齐次函数，故 $\|\boldsymbol{u}\|$ 的变动对 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ 的取值存在影响.

(2.3) 若 $\operatorname{rank} A_f < m \quad \operatorname{rank} A_g < m \quad \operatorname{rank} A = m$. 则类似以上的分析，可得(记 $A(m)$ 是 A 中任一个 m 阶可逆子矩阵)

$$\boldsymbol{x}(\tilde{\boldsymbol{f}},\ \tilde{\boldsymbol{g}}) = A^{-1}(m) \cdot \begin{bmatrix} \ln \tilde{\boldsymbol{f}} - \ln \tilde{\boldsymbol{c}} \\ \ln \tilde{\boldsymbol{g}} - \ln \tilde{\boldsymbol{d}} \end{bmatrix} \qquad —(6.5.5.55)$$

并将(6.5.5.45)式中得到的 $\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u})$、$\tilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{u})$ 代入上式即得到 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ 函数，且仍去求解(6.5.5.54)式无约束规划.

(2.4) $\operatorname{rank} A < m$，设 $\operatorname{rank} A = r < m$，则设 $A(r,\ m)$ 是 A 中的含有一个 $r \times r$ 阶可逆子矩阵的 $r \times m$ 阶子矩阵，不妨设 $A(r,\ m)$ 的前 r 个列向量线性无关.

---

[1] 最简单的情形就是(6.5.5.45)式给出的 $\boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{u})$ 为实数，即 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})$ 已被解出的情形. 当(6.5.5.41)式等式一不等式方程组解空间只有唯一的(非 $\boldsymbol{0}$)极点时，即如此.

作分块表示，从(6.5.5.49)式中可得(记 $A_1(r, m)$ 是 $A(r, m)$ 的前 r 阶可逆子矩阵)

$$A_1(r, m)\cdot \ln \boldsymbol{x}_1 + A_2(r, m)\cdot \ln \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \ln \tilde{\boldsymbol{f}} - \ln \tilde{\boldsymbol{c}} \\ \ln \tilde{\boldsymbol{g}} - \ln \tilde{\boldsymbol{d}} \end{bmatrix}$$

其中

$$A(r, m) = [A_1(r, m), A_2(r, m)] \quad | A_1(r, m) | \neq 0 \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}$$

$\ln \tilde{\boldsymbol{f}} - \ln \tilde{\boldsymbol{c}}$ 由 $A(r, m)$ 的对应行下标决定($\ln \tilde{\boldsymbol{g}} - \ln \tilde{\boldsymbol{d}}$ 类似). 所以

$$\boldsymbol{x}_1 = \exp\left(-A_1^{-1}(r, m)\cdot A_2(r, m)\ln \boldsymbol{x}_2 + A_1^{-1}(r, m)\begin{bmatrix} \ln \tilde{\boldsymbol{f}} - \ln \tilde{\boldsymbol{c}} \\ \ln \tilde{\boldsymbol{g}} - \ln \tilde{\boldsymbol{d}} \end{bmatrix}\right) \quad —(6.5.5.56)$$

将(6.5.5.45)式中得到的 $\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u})$、$\tilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{u})$ 代入上式可得到

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{x}_2)$$

的形式.

如果 $\text{rank } A_g = \text{rank } A = r$，则 $\ln \tilde{\boldsymbol{f}} - \ln \tilde{\boldsymbol{c}}$ 将可以不出现在(6.5.5.56)式，这时，就求解以下等式约束规划

$$\begin{cases} \min \quad f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_2)) = f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_2) \\ \text{s.t.} \quad \sum_i u_i = 1 \end{cases} \quad —(6.5.5.57)$$

关于这个形式的规划(仍是几何规划)，可以先解出关于 $\boldsymbol{x}_2$ 的无约束极小值的一阶条件方程组

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_2)}{\partial \boldsymbol{x}_2} = \boldsymbol{0}$$

的解(如果有解的话)，记为 $\boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{u})$. 将 $\boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{u})$ 代回到(6.5.5.57)式规划，再求解关于 $\boldsymbol{u}$ 的等式约束规划.

如果 $\ln \tilde{\boldsymbol{f}} - \ln \tilde{\boldsymbol{c}}$ 项出现在(6.5.5.56)式的右边，则就求解无约束规划

$$\min \quad f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_2)) = f(\boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{x}_2) \quad —(6.5.5.58)$$

(6.5.5.57～58)式出现的一个情形是可以存在

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_2)}{\partial \boldsymbol{x}_2} \equiv \boldsymbol{0} \quad —(6.5.5.59)$$

的情形，即对于任取的 $\boldsymbol{x}_2 > \boldsymbol{0}$，$f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_2)$ 的值是不变的. 比如当

$$f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{u})$$

时即如此．这时，几何规划（6.5.5.35）式就可以有无穷多个局部极小值点且取相同的极小值（见以下例 6.5.5.8）．

这样，以上（2.1～4）点已涵盖了幂指数矩阵 A 的秩可以出现的全部情形并已给出了对应的直接解法．

以上给出的解法中均未利用几何规划的对偶规划故为直接解法．当然，利用对偶规划形式，给出的求解形式可以更紧凑一些．

例如，对偶规划可归结为求解以下形式的规划[1]，

$$\begin{cases} \min \quad 1/\Gamma(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = \prod_{i=1}^{n}\left(\dfrac{c_i}{\zeta_i}\right)^{-\zeta_i}\cdot\prod_{j=1}^{k}\prod_{h=1}^{k_j}\left(\dfrac{d_{jh}}{\sigma_{jh}}\right)^{-\sigma_{jh}}\xi_j^{-\xi_j} \\ \text{s. t.}\begin{cases} \begin{bmatrix} \overbrace{1,\ 1,\ \cdots,\ 1}^{n\text{个}},\ 0,\ \cdots,\ 0 \\ A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\zeta}\\ \boldsymbol{\sigma}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix} \quad (\boldsymbol{\zeta}\in R_+^n) \\ \sum_{h=1}^{k_j}\sigma_{jh} = \xi_j \quad j=1,\cdots,k \\ \boldsymbol{\zeta}、\boldsymbol{\sigma}\geqslant \mathbf{0} \end{cases} \end{cases}$$

—(6.5.5.60)

其中，$\boldsymbol{\sigma}$、$\boldsymbol{\xi}$、c_i、d_{jh} 符号的意义同前．设 $\boldsymbol{x}^0$ 是原始几何规划的极小值点，用上标“$*$”号表示以上规划的极小值解，则

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{x}^0) = \Gamma(\boldsymbol{\zeta}^*,\boldsymbol{\sigma}^*,\boldsymbol{\xi}^*) \\ f_i(\boldsymbol{x}^0) = \zeta_i^*\Gamma(\boldsymbol{\zeta}^*,\boldsymbol{\sigma}^*,\boldsymbol{\xi}^*) \quad i=1,\cdots,n \\ \xi_j^* g_{jh}(\boldsymbol{x}^0) = \sigma_{jh}^* \end{cases} \qquad —(6.5.5.61)$$

由（6.5.5.61）式给出的 f_i、g_{jh} 的解，由（6.5.5.46）式可解出 $\boldsymbol{x}^0$．

注意，由（6.5.5.60）式约束条件的第 1、3 式等式—不等式方程组，可以得到一个解空间（是多面体）的表示

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\zeta}\\ \boldsymbol{\sigma}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}D_\zeta\\ D_\sigma\end{bmatrix}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u}\geqslant\mathbf{0} \quad \sum_i u_i = 1 \qquad —(6.5.5.62)$$

其中

$$D_\sigma = \begin{bmatrix}D_{\sigma_1}\\ \vdots\\ D_{\sigma_k}\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}_j = D_{\sigma_j}\boldsymbol{u} \quad j=1,\cdots,k$$

〔1〕《非线性规划》上册，M. Avriel，第 7.3 节．符号有所改动．

再由

$$\sum_{h=1}^{k_j}\sigma_{jh}=\xi_j\Rightarrow\xi_j=\mathbf{1}^{\mathrm{T}}D_{\sigma_j}\boldsymbol{u}\quad \mathbf{1}=(1,\ \cdots,\ 1)^{\mathrm{T}}$$

即有

$$\boldsymbol{\xi}=D_{\xi}\boldsymbol{u}\qquad —(6.5.5.63)$$

将(6.5.5.62～63)式代回到(6.5.5.60)式的目标函数中，并求解以下关于 $\boldsymbol{u}$ 的无约束规划，

$$\min\quad -\ln(\Gamma(\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{u}))\qquad —(6.5.5.64)$$

由一阶条件

$$-\frac{\partial\ln(\Gamma(\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{u}))}{\partial\boldsymbol{u}}=\mathbf{0}$$

经整理，并利用

$$\sum_i\zeta_i=1\Rightarrow\mathbf{1}^{\mathrm{T}}D_{\zeta}=\mathbf{1}^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}D_{\sigma_1}\\ \vdots\\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}}D_{\sigma_k}\end{bmatrix}=D_{\xi}\Leftrightarrow\mathbf{1}^{\mathrm{T}}D_{\sigma}=D_{\xi}$$

其中，上式左边的(各个)**1** 向量的维数由与之相乘的 D_{σ_j} 矩阵的行阶数决定.
即得

$$[D_{\zeta}^{\mathrm{T}},\ D_{\sigma}^{\mathrm{T}},\ -D_{\xi}^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix}\ln\dot{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{u})\\ \ln\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\\ \ln\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{u})\end{bmatrix}=[D_{\zeta}^{\mathrm{T}},\ D_{\sigma}^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix}\ln\boldsymbol{c}\\ \ln\boldsymbol{d}\end{bmatrix}-\mathbf{1}\quad —(6.5.5.65)$$

以及

$$u_1+u_2+\cdots+u_N=1\qquad (见(6.5.5.62)式))$$

其中 N 是 $\boldsymbol{u}$ 向量的维数，即(6.5.5.60)式约束条件解空间的极点个数. 利用 $\sum_i u_i=1$ 可消去 u_i 变量中的一个，由此，可消去(6.5.5.65)式右边的 **1** 向量，并经取 exp(・)函数变换，(6.5.5.65)式中得到的仍是幂函数形式(见以下例 6.5.5.7).

(6.5.5.65)式在

$$\mathrm{rank}[D_\zeta^{\mathrm{T}}, D_\sigma^{\mathrm{T}}, -D_\xi^{\mathrm{T}}] = \mathrm{rank}\left[D_\zeta^{\mathrm{T}}, D_\sigma^{\mathrm{T}}, -D_\xi^{\mathrm{T}} \vdots [D_\zeta^{\mathrm{T}}, D_\sigma^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix}\ln \boldsymbol{c}\\ \ln \boldsymbol{d}\end{bmatrix} - \mathbf{1}\right] \qquad \text{—(6.5.5.66)}$$

时，关于 $\ln \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u})$、$\ln \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})$、$\ln \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{u})$ 因子才是有解的.

设(6.5.5.65)有解，记

$$\ln \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{y}_\zeta \quad \ln \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{y}_\sigma \qquad \text{—(6.5.5.67)}$$

是(6.5.5.65)式的解. 那么，若有

$$\boldsymbol{u}^* \geqslant \mathbf{0} \quad \sum_i u_i^* = 1$$

使

$$\exp(\boldsymbol{y}_\zeta) = D_\zeta \boldsymbol{u}^* \quad \exp(\boldsymbol{y}_\sigma) = D_\sigma \boldsymbol{u}^* \qquad \text{—(6.5.5.68)}$$

成立，则 $\boldsymbol{u}^*$ 就是所要求的解.

(6.5.5.66～68)式即为对偶规划有解的相容性条件. 如果(6.5.5.60)式的约束条件解空间只有唯一的极点，那么，(6.5.5.62)式中的 $\boldsymbol{u}=[1]$，从而 $\boldsymbol{\zeta}^*$、$\boldsymbol{\sigma}^*$、$\boldsymbol{\xi}^*$ 即已解出.

(3) 综合以上的分析，关于(正项式)几何规划(6.5.5.31)式，设

$$I_0 = \{i_1, i_2, \cdots, i_{m_1}\} \quad I_+ = \{j_1, j_2, \cdots, j_{m_2}\}$$
$$I_0 \cup I_+ = \{1, 2, \cdots, m\}$$
$$I_i^0 = \{(i_t) \mid (i_t) = (i_1, i_2, \cdots) \quad i_t < i_{t+1} \quad i_t \in I_0\}$$
$$I_j^+ = \{(j_s) \mid (j_s) = (j_1, j_2, \cdots) \quad j_s < j_{s+1} \quad 1 \leqslant j_s \leqslant k\}$$

是下标(或下标子列)集合，并设 I_0 是 $\boldsymbol{x}$ 的分量下标 $i \in I_0$ 时 x_i 在规划中可取为 0 的全部下标的集合，I_i^0 是 I_0 中的子列为元素的集合，I_j^+ 是 1, 2, …, k 序列的子列为元素的集合，则几何规划的求解步骤(枚举法)如下：

对于每一个 $(i_t) \in I_i^0$，令 $x_i = 0$ 当 $i \in (i_t)$，构造

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{cases} x_i & i \notin (i_t) \\ 0 & i \in (i_t) \end{cases}$$

构造

$$\begin{cases} \min & f(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\tilde{\boldsymbol{x}}) \\ \text{s. t.} & g_j(\tilde{\boldsymbol{x}}) = 1 \quad j \in (j_s) \subset I_j^+ \end{cases}$$

对所有的 $(j_s) \subset I_j^+$，如上所述利用直接方法，求解以上规划.

对所有的 $(i_t) \in I_i^0$，可从以上步骤中得到解$\hat{x}$的集合$\{\hat{x}\}$. 再求解无约束规划

$$\min \quad f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\boldsymbol{x})$$

设有解$\hat{\boldsymbol{x}}_0$.

对$\{\hat{\boldsymbol{x}}\}$及$\hat{\boldsymbol{x}}_0$，剔除不满足

$$0 \leqslant g_j(\hat{\boldsymbol{x}}) \leqslant 1 \quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ k$$

条件的解，再对余下的解检验二阶条件，即可最终得到几何规划的解. 在以上的解法，若几何规划被归结为求解含有 $\sum_i u_i = 1$ 的约束的规划（如(6.5.5.52)式），则还可以方便地得到全局解.

以下给予示例.

例 6.5.5.6[1]

$$\min \quad f(\boldsymbol{x}) = \frac{x_4^2}{x_1^4 x_2} + \frac{3x_1^2}{x_2^2} = f_1(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{x})$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\ 0 \leqslant g_1(\boldsymbol{x}) &= \frac{x_2 x_3}{3} + \frac{3}{x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{3}{4}} x_3} + \frac{9x_2^{\frac{1}{2}}}{2x_3 x_4^{\frac{1}{2}}} \\ &= g_{11}(\boldsymbol{x}) + g_{12}(\boldsymbol{x}) + g_{13}(\boldsymbol{x}) \\ &\leqslant 1 \end{aligned}$$

解：显然不能取 $x_i = 0$，故只需考虑 $x_i > 0$ 的解，同时易知不存在 $\|\boldsymbol{x}\| < +\infty$ 的无约束极小值解. 由以上的符号现幂指数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

利用直接解方法，由(6.5.5.41)式

$$A^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = 0 \quad f_i、\sigma_{1j} \geqslant 0 \quad \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13} = \xi_1$$

---

[1] 引自《非线性规划》上册，M. Avriel，例 7.3.2.

得(并注意 $g_{1j} > 0 \quad j = 1, 2, 3$)

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \xi_1 \Rightarrow \xi_1 > 0 \Rightarrow \begin{matrix} g_{11} = \frac{\sigma_{11}}{\xi_1} = \frac{1}{2} \\ g_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\xi_1} = \frac{1}{4} \\ g_{13} = \frac{\sigma_{13}}{\xi_1} = \frac{1}{4} \end{matrix}$$

利用(6.5.5.49)式(注意本例 rank A_f、rank $A_g < m = 4$, rank $A = 4$)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln x_1 \\ \ln x_2 \\ \ln x_3 \\ \ln x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ln 2 + \ln 3 \\ -\ln 4 - \ln 3 \\ -\ln 4 - \ln \frac{9}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln \frac{3}{2} \\ \ln \frac{1}{12} \\ \ln \frac{1}{18} \end{bmatrix}$$

可得解

$$x_1 = 64 x_2^{\frac{1}{2}} \quad x_3 = \frac{3}{2} x_2^{-1} \quad x_4 = 144 x_2^3$$

得无约束规划(见(6.5.5.54)式)

$$\min \quad f(\boldsymbol{x}) = \frac{81}{65\,536} x_2^3 + \frac{12\,288}{x_2}$$

由一阶条件得

$$\frac{243}{65\,536} x_2^2 = \frac{12\,288}{x_2^2}$$

即得

$$x_2 = \frac{128}{3}$$

从而得到解.

本例若利用对偶规划,则去解(见(6.5.5.60)式)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & A^{\mathrm{T}} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

直接得到解

$$\zeta_1 = \frac{1}{4} \quad \zeta_2 = \frac{3}{4} \quad \sigma_{11} = 2 \quad \sigma_{12} = 1 \quad \sigma_{13} = 1 \quad \xi_1 = 4$$

以及

$$\Gamma(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\sigma}_1, \xi_1) = 384$$

所以

$$f_1 = 96 \quad f_2 = 288 \quad g_{11} = \frac{1}{2} \quad g_{12} = \frac{1}{4} \quad g_{13} = \frac{1}{4}$$

再由(6.5.5.55)式，可直接解出 x_i.

例 6.5.5.7 将上例中的约束函数改为

$$g_1(\boldsymbol{x}) = \frac{x_2 x_3}{3} + \frac{3}{x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{3}{4}} x_3} + \frac{9x_2^{\frac{1}{2}}}{2x_3 x_4^{\frac{1}{2}}} + \frac{2x_1^{\frac{1}{2}} x_2}{x_4^{\frac{1}{3}}}$$

其余不变.

解：现幂指数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

现本例中 rank $A_g = m = 4$. 利用

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln x_1 \\ \ln x_2 \\ \ln x_3 \\ \ln x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln g_{11} + \ln 3 \\ \ln g_{12} - \ln 3 \\ \ln g_{13} - \ln \frac{9}{2} \\ \ln g_{14} - \ln 2 \end{bmatrix} \qquad \text{—(a)}$$

可直接解出

$$\begin{cases} x_1 = 3^{\frac{4}{3}} 2^{-\frac{10}{3}} g_{11}^{-\frac{4}{3}} g_{13}^{-\frac{4}{3}} g_{14}^{2} \\ x_2 = 3^{\frac{8}{3}} 2^{-\frac{20}{3}} g_{11}^{\frac{4}{3}} g_{12}^{4} g_{13}^{-\frac{8}{3}} g_{14}^{4} \\ x_3 = 3^{-\frac{5}{3}} 2^{\frac{20}{3}} g_{11}^{-\frac{1}{3}} g_{12}^{-4} g_{13}^{\frac{8}{3}} g_{14}^{-4} \\ x_4 = 3^{10} 2^{-22} g_{11}^{2} g_{12}^{12} g_{13}^{-10} g_{14}^{12} \end{cases}$$

上式右边 g_{1j} 的幂指数就是(a)式左边系数矩阵逆矩阵的元素. 由此即得

$$f(\boldsymbol{x}) = f(g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14}) = 3^{12}2^{-24}g_{11}^{8}g_{12}^{20}g_{13}^{-12}g_{14}^{6} + 3^{-\frac{5}{3}}2^{\frac{20}{3}}g_{11}^{-\frac{16}{3}}g_{12}^{-8}g_{13}^{\frac{8}{3}}g_{14}^{-4}$$

从而可直接求解(6.5.5.51)式规划

$$\begin{aligned} &\min \quad f(g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14}) \\ &\text{s.t.} \quad g_{11} + g_{12} + g_{13} + g_{14} = 1 \end{aligned}$$

即可求得其解.

如果解出(6.5.5.41)式得到 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})$ 的表达式,则可将以上规划的变量个数简化为 1 个,即成为(6.5.5.52)式形式的规划.

由(6.5.5.41)式,可解得

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 2 & \frac{8}{3} \\ 1 & \frac{8}{3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad u_1, u_2 \geqslant 0$$

由

$$\xi_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13} + \sigma_{14} = 4u_1 + \frac{19}{3}u_2$$

所以

$$g_{11} = \frac{2u_1 + \frac{8}{3}u_2}{4u_1 + \frac{19}{3}u_2} \quad g_{12} = \frac{u_1 + \frac{8}{3}u_2}{4u_1 + \frac{9}{3}u_2}$$

$$g_{13} = \frac{u_1}{4u_1 + \frac{19}{3}u_2} \quad g_{14} = \frac{u_2}{4u_1 + \frac{19}{3}u_2}$$

将以上形式的 $g_{1j}(\boldsymbol{u})$ 代入 $f(g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14})$ 目标函数,并利用 $u_2 = 1 - u_1$ 的关系,即知只要去解关于 u_1 变量的无约束规化

$$\min \quad f(g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14})$$

即可.

本例如果利用对偶规划形式求解，则可先解

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & A^{\mathrm{T}} & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得到

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{7}{4} \\ -\frac{11}{12} \\ 1 \end{bmatrix} t \qquad t \in R \qquad \xi_1 = 4 + \frac{8}{3}t$$

由非负性条件，得 $0 \leqslant t \leqslant \frac{12}{11}$. 可得

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{14} \\ \xi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{11} \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{11} \\ 2 & \frac{32}{11} \\ 1 & \frac{32}{11} \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{12}{11} \\ 4 & \frac{76}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \qquad t_1, t_2 \geqslant 0 \quad t_1 + t_2 = 1$$

利用 $t_2 = 1 - t_1$ 并省略 t_1 的下标，可将上式表为

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{14} \\ \xi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\frac{3}{4}t \\ 9-\frac{3}{4}t \\ 32-10t \\ 32-21t \\ 11t \\ 12-12t \\ 76-32t \end{bmatrix} \frac{1}{11} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

并由(6.5.5.65)式得到

$$\zeta_1^{\frac{3}{4}} \zeta_2^{-\frac{3}{4}} \sigma_{11}^{-10} \sigma_{12}^{-21} \sigma_{13}^{11} \sigma_{14}^{-12} \xi_1^{32} = \frac{3^{\frac{41}{4}}}{2^{23}}$$

直接解出这一关于 t 的方程,即可得解.

例 6.5.5.8 将例 6.5.5.6 中的约束条件改为下式

$$\text{s.t.} \quad 0 \leqslant g_1(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1 x_2}{3} + \frac{3}{x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} x_3} + \frac{9x_2^{\frac{1}{2}} x_4}{2x_3} \leqslant 1$$

其余不变.

解: 注意现在目标函数 $f(\boldsymbol{x})$、约束函数 $g_1(\boldsymbol{x})$中的 x_4 因子的幂指数均>0,故 x_4 可取为 0. 先可解以下规划(令 $x_4 = 0$)

$$\begin{cases} \min \quad f(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \dfrac{3x_1^2}{x_2^2} \qquad \tilde{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \\ \text{s.t.} \quad g_1(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \dfrac{x_2 x_3}{3} + \dfrac{3}{x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} x_3} = 1 \end{cases} \qquad \text{—(a)}$$

对这一规划,幂指数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

由(6.5.5.41)式,可得

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t \Rightarrow g_{11} = \frac{1}{2} \quad g_{12} = \frac{1}{2}$$

在本例中 rank A = rank $A_g = 2 < m = 3$. 利用(6.5.5.49)式

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ln x_1 \\ \ln x_2 \\ \ln x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln \frac{3}{2} \\ \ln \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

可得极小值解是

$$x_1 = \frac{24}{x_3} \quad x_2 = \frac{3}{2x_3}$$

或表成

$$\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}(t) = \left(\frac{24}{t}, \frac{3}{2t}, t, 0\right)^{\mathrm{T}} \quad t \in (0, +\infty)$$

在这个解的形式下,目标函数

$$f(\boldsymbol{x}^0) = 768$$

并且可验证 $\boldsymbol{x}^0$ 是(a)式子规划满足二阶条件的弱局部极小值点(集合).

继续考虑以下规划(即令 $x_i > 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$)

$$\begin{cases} \min \quad f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{x_4^2}{x_1^4 x_2} + \dfrac{3x_1^2}{x_2^2} \\ \text{s. t.} \quad g_1(\boldsymbol{x}) = \dfrac{x_2 x_3}{3} + \dfrac{3}{x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} x_3} + \dfrac{9x_2^{\frac{1}{2}} x_4}{2x_3} = 1 \end{cases} \qquad \text{—(b)}$$

(b)式规划的幂指数矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

仍由

$$A^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ .25 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t \qquad t \in R$$

但由此可以得到的仍是 $x_4 = 0$ 给出的解即仍是(a)式给出的解.

再由无约束规划,可验证

$$\min \quad f(\boldsymbol{x}) = \frac{x_4^2}{x_1^4 x_2} + \frac{3x_1^2}{x_2^2}$$

无 $\|\boldsymbol{x}\| < +\infty$ 的最小值解.故可知(a)式规划给出的解 $\boldsymbol{x}^0$ 即为本例规划的全局最小值解(集合).

现在继续讨论这个例子.修改本例的约束条件,使 $g_1(\boldsymbol{x})$ 函数中 x_4 因子的幂指数为$\frac{1}{2}$,其余不变.此时,$x_4 = 0$ 仍是规划的目标函数、约束函数可以取到的值.以上求解过程中关于(a)式的子规划的解与这里的修改无关,只需考虑(b)子规划的解.现在,(b)子规划的幂指数矩阵决定的(6.5.5.41)式的最后一个方程(参见(6.5.5.34)式)是

$$\frac{2f_1}{x_4} + \frac{\xi_1 g_{13}}{2x_4} = 2\frac{x_4}{x_1^4 x_2} + \xi_1 \frac{9x_2^{\frac{1}{2}}}{4x_3} \cdot x_4^{-\frac{1}{2}} = 0$$

由于现在上式中包含 $x_4^{-\frac{1}{2}}$ 因子,故上式不能在 $x_4 = 0$ 处取值,即它在 $x_4 = 0$ 处是无穷大(不确定值).这样,即需要说明如何知道在(a)子规划中得到的 $\boldsymbol{x}^0$ 点(集合)——其分量中取 $x_4 = 0$ ——是否一定是(修改后的)规划的最小值点.

为此,可设 $x_4 = a > 0$.将(b)子规划重写成

$$\begin{cases} \min \quad f(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \dfrac{a^2}{x_1^4 x_2} + \dfrac{3x_1^2}{x_2^2} \quad \tilde{\boldsymbol{x}} = (x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}} \\ \text{s.t.} \quad g_1(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \dfrac{x_2 x_3}{3} + \dfrac{3}{x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} x_3} + \dfrac{9a x_2^{\frac{1}{2}}}{2x_3} = 1 \end{cases} \qquad \text{—(c)}$$

现 $\tilde{\boldsymbol{x}} > \boldsymbol{0}$ 必须成立.现在(c)子规划的幂指数矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

仍由(6.5.5.41)式得

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{4} & \frac{4}{5} \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \xi_1 = 2u_1 + 2u_2$$

由此知 $g_{11} = \dfrac{1}{2}$.

从(6.5.5.49)式中可得

$$
\begin{cases}
x_1 = 3^{-\frac{1}{10}} a^{\frac{2}{5}} f_1^{-\frac{1}{5}} f_2^{\frac{1}{10}} \\
x_2 = 3^{\frac{2}{5}} a^{\frac{2}{5}} f_1^{-\frac{1}{5}} f_2^{-\frac{2}{5}} \\
x_3 = \dfrac{1}{2} 3^{\frac{3}{5}} a^{-\frac{2}{5}} f_1^{\frac{1}{5}} f_2^{\frac{2}{5}}
\end{cases}
$$

由此即得

$$
g_1(\tilde{\boldsymbol{x}}) = g_1(f_1, f_2) = \frac{1}{2} + 2 \cdot 3^{\frac{1}{4}} f_2^{-\frac{1}{4}} + 3^{\frac{8}{5}} a^{\frac{8}{5}} f_1^{-\frac{3}{10}} f_2^{-\frac{3}{5}}
$$

从而构造以下子规划

$$
\begin{cases}
\min \quad f_1 + f_2 \\
\text{s. t.} \ -g_1(f_1, f_2) \geqslant -1
\end{cases} \qquad \text{—(d)}
$$

有 L—函数

$$
L(f_1, f_2, \lambda) = f_1 + f_2 - \lambda \cdot (1 - g_1(f_1, f_2))
$$

从一阶条件中可得

$$
\nabla_f L(f_1, f_2, \lambda) = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{1}{10} 3^{\frac{13}{5}} a^{\frac{8}{5}} f_1^{-\frac{13}{10}} f_2^{-\frac{3}{5}} \lambda \\ 1 - \dfrac{1}{2} 3^{\frac{1}{4}} f_2^{-\frac{5}{4}} \lambda - \dfrac{1}{5} 3^{\frac{13}{5}} a^{\frac{8}{5}} f_1^{-\frac{3}{10}} f_2^{-\frac{8}{5}} \lambda \end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad \text{—(e)}
$$

由此即知 $\lambda > 0$. 所以,(d)子规划的解仍在 $g_1(f_1, f_2) = 1$ 处. 又有

$$
\nabla_f^2 L(f_1, f_2, \lambda) = \lambda \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{13}{10^2} 3^{\frac{13}{5}} a^{\frac{8}{5}} f_1^{-\frac{23}{10}} f_2^{-\frac{3}{5}} & \dfrac{3}{50} 3^{\frac{13}{5}} a^{\frac{8}{5}} f_1^{-\frac{13}{10}} f_2^{-\frac{8}{5}} \\ \dfrac{3}{50} 3^{\frac{13}{5}} a^{\frac{8}{5}} f_1^{-\frac{13}{10}} f_2^{-\frac{8}{5}} & \dfrac{5}{8} 3^{\frac{1}{4}} f_2^{-\frac{9}{4}} + \dfrac{8}{25} 3^{\frac{13}{5}} a^{\frac{8}{5}} f_1^{-\frac{3}{10}} f_2^{-\frac{13}{5}} \end{bmatrix} \qquad \text{—(f)}
$$

所以,$\nabla_f^2 L(f_1, f_2, \lambda)$ 矩阵是正定的,故由(e)式决定的 f_1、f_2 因子是(d)子规划的极小值解. 并由此知,从(e)式中可以得到 $f_1(a)$、$f_2(a)$形式的函数,并且

$$
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}a} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}f_1(a)}{\mathrm{d}a} \\ \dfrac{\mathrm{d}f_2(a)}{\mathrm{d}a} \end{bmatrix} = -[\nabla_f^2 L(f_1, f_2, \lambda)]^{-1} \frac{\mathrm{d}(\nabla_f L(f_1, f_2, \lambda))}{\mathrm{d}a} \qquad \text{—(g)}
$$

记

$$F(a) = L(f_1(a),\ f_2(a),\ \lambda)$$

是(d)子规划关于参数 a 的极小值函数.则

$$\frac{\mathrm{d}F(a)}{\mathrm{d}a} = \nabla_f L(f_1,\ f_2,\ \lambda)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}a} + \frac{\partial L(f_1,\ f_2,\ \lambda)}{\partial a} \qquad \text{—(h)}$$

令上式中的 $f_1 = f_1(a)$，$f_2 = f_2(a)$，则 $\nabla_f L(f_1(a),\ f_2(a),\ \lambda) = \mathbf{0}$ 所以，

$$\frac{\mathrm{d}F(a)}{\mathrm{d}a} = \left.\frac{\partial L(f_1,\ f_2,\ \lambda)}{\partial a}\right|_{\substack{f_1=f_1(a)\\ f_2=f_2(a)}} \qquad \text{—(i)}$$

此即著名的包络定理(见定理 2.4.4.5)的结论.

由此易知

$$\frac{\mathrm{d}F(a)}{\mathrm{d}a} = \frac{8}{5}3^{\frac{8}{5}}a^{\frac{3}{5}}f_1^{-\frac{3}{10}}f_2^{-\frac{3}{5}}\lambda \geqslant 0 \qquad \text{—(j)}$$

另从(h)式中还可得

$$\frac{\mathrm{d}^2F(a)}{\mathrm{d}a^2} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}a}\nabla_f^2 L(f_1,\ f_2,\ \lambda)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}a} + \frac{\partial^2 L(f_1,\ f_2,\ \lambda)}{\partial a^2} \qquad \text{—(k)}$$

利用以上关系，即知当 $a \to 0$ 时

$$\left.\frac{\mathrm{d}F(a)}{\mathrm{d}a}\right|_{a\to 0} = 0 \qquad \left.\frac{\mathrm{d}^2F(a)}{\mathrm{d}a^2}\right|_{a\to 0} = +\infty > 0$$

由此可知 $a \to 0$ 是 $F(a)$ 在 $a \geqslant 0$ 限制下的最小值.

这一点也可利用(c)式子规划的对偶规划求解，从(6.5.5.62)式可得

$$\begin{bmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \sigma_{11}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{13}\\ \xi_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{u}{3}\\ 1-\dfrac{1}{3}u\\ 4-\dfrac{26}{9}u\\ 4-4u\\ \dfrac{10}{9}u\\ 8-\dfrac{52}{9}u\end{bmatrix} \qquad 0 \leqslant u < 1 \qquad \text{—(l)}$$

由此从(6.5.5.65)式可得 u、a 参数的隐函数

$$\left(\frac{1}{3}u\right)^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{1}{3}u\right)^{-\frac{1}{3}}\left(4-\frac{26}{9}u\right)^{-\frac{26}{9}}(4-4u)^{-4}\left(\frac{10}{9}u\right)^{\frac{10}{9}}\left(8-\frac{52}{9}u\right)^{\frac{52}{9}} = \frac{3^{\frac{7}{9}}}{2^{\frac{10}{9}}}a^{\frac{16}{9}}$$

—(m)

由(m)式在给定正数 a 时可解出 u^*. 显然，当 $a\to 0 \Rightarrow u^*\to 0$，并可由(l)式得到 $\boldsymbol{\zeta}^*$、$\boldsymbol{\sigma}_1^*$、ξ_1^*. 由此得到的极小值函数，并易验证

$$\Gamma(\boldsymbol{\zeta}^*、\boldsymbol{\sigma}_1^*、\xi_1^*)\mid_{a\to 0}=768$$

对任取的 $a>0$，有

$$\Gamma(\boldsymbol{\zeta}^*、\boldsymbol{\sigma}_1^*、\xi_1^*)>768$$

所以，在本例中的约束函数 $g_1(\boldsymbol{x})\quad \boldsymbol{x}\in R^4$ 的 x_4 因子幂指数为 $\frac{1}{2}$ 时，前面的(a)子规划的解 $\boldsymbol{x}^0$ 仍旧是极小值解(集合). 并且，这一现象具有普遍性. 事实上，存在以下推论.

推论 6.5.5.1 设 $\boldsymbol{x}\in R^m$

$$\begin{cases}\min\quad f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}f_i(\boldsymbol{x})\quad f_i(\boldsymbol{x})=c_i\prod_{j=1}^{m}x_j^{a_{ij}}\quad (c_j>0)\\ \text{s.t.}\quad 0\leqslant g_j(\boldsymbol{x})=\sum_{h=1}^{k_j}g_{jh}(\boldsymbol{x})\leqslant 1\quad g_{jh}(\boldsymbol{x})=d_{jh}\prod_{p=1}^{m}x_p^{b_{hp}^j}\quad (d_{jh}>0)\quad j=1,\cdots,k\end{cases}$$

—(A)

是(正项式)几何规划. 若有下标 t，使 $x_t=0$ 是这一规划可以取到的值，即 a_{it}、$b_{ht}^j\geqslant 0$ 对 $\forall\, i$、j、h 成立，则构造

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=(x_1,\cdots,x_{t-1},0,x_{t+1},\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$$

以及

$$\begin{cases}\min\quad f(\tilde{\boldsymbol{x}})\\ \text{s.t.}\quad 0\leqslant g_j(\tilde{\boldsymbol{x}})\leqslant 1\quad j=1,\cdots,k\end{cases}\qquad —(\text{B})$$

有以下结论：

(1) 若至少有 1 个下标 i，使 $a_{it}>0$，或者 $b_{ht}^j=0\quad \forall\, j$、$h$，则(B)式规划的最小值解 $\tilde{\boldsymbol{x}}^0$ 就是(A)规划的最小值解；

(2) 若 $\forall\, i$ 有 $a_{it}=0$，且至少有下标 j、h 使 $b_{ht}^j>0$，则(A)形式的规划的最小值解(集合)$\{\boldsymbol{x}^0\}$是

$$\{\boldsymbol{x}^0\}=\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,x_i=\begin{cases}\tilde{x}_i^0 & i\neq t\\ x_t & i=t\end{cases}\quad 且\quad 0\leqslant g_j(\boldsymbol{x})\leqslant 1\quad j=1,\cdots,k\right\}$$

—(6.5.5.69)

而 $\tilde{x}_i^0$ 是(B)式规划最小值解 $\tilde{\boldsymbol{x}}^0$ 的分量. ■

对于以上推论中的(1)，可以表述为，若 x_t 因子出现在目标函数中，且具有**正数**幂指数，则几何规划的最小值解与 x_t 因子正数幂指数的数值无关. 附带可

知，在以上推论中的(2)的情形中，若$\tilde{\boldsymbol{x}}^0$ 就是至少 1 个约束函数 $g_j(\tilde{\boldsymbol{x}}^0)=1$(且有 $b_{ht}^j>0$) 的点(或集合)，则就仍有 $\{\boldsymbol{x}^0\}=\boldsymbol{x}^0$ 的结论.

证明：将几何规划表成以下形式

$$f_i(\boldsymbol{x})=c_i\prod_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{m}x_j^{a_{ij}}\cdot x_t^{a_{it}}\quad g_{jh}(\boldsymbol{x})=d_{jh}\prod_{\substack{p=1\\p\neq t}}^{m}x_p^{b_{hp}^j}\cdot x_t^{b_{ht}^j}\quad\begin{cases}i=1,\cdots,n\\j=1,\cdots,k\\h=1,\cdots,k_j\end{cases}$$

并设 a_{it}、$b_{ht}^j\geqslant 0\quad\forall\, i、j、h$.

设有 1, 2, …, n 的一个子列 $i_1, i_2, \cdots, i_s\quad s\geqslant 1$ 及 1, 2, …, k_j 的子序列 $h_1^j, h_2^j, \cdots, h_{z_{k_j}}^j\quad z_{k_j}\geqslant 0$ 使

$$(a):\quad a_{it}=\begin{cases}>1 & i=i_1,\cdots,i_s\\0 & 其他\end{cases}\qquad b_{ht}^j=\begin{cases}>1 & h=h_1^j,\cdots,h_{z_{k_j}}^j\\0 & 其他\end{cases}$$

$$(b):\quad \tilde{a}_{it}=\begin{cases}>0 & i=i_1,\cdots,i_s\\0 & 其他\end{cases}\qquad \tilde{b}_{ht}^j=\begin{cases}>0 & h=h_1^j,\cdots,h_{z_{k_j}}^j\\0 & 其他\end{cases}$$

当 $z_{k_j}=0$，则全部 $b_{ht}^j=0,\ h=1,\cdots,k_j$. $\tilde{b}_{ht}^j$ 类似. 设有以上(a)、(b)式决定的幂指数分别构造出几何规划(A)、(B). 其中(A)规划的函数形式如上，(B)规划的函数形式如下

$$\tilde{f}_1(\boldsymbol{x})=c_i\prod_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{m}x_j^{a_{ij}}\cdot x_t^{\tilde{a}_{it}}\qquad \tilde{g}_{jh}(\boldsymbol{x})=\mathrm{d}_{jh}\prod_{\substack{p=1\\p\neq t}}^{m}x_p^{b_{hp}^j}\cdot x_t^{\tilde{b}_{ht}^j}$$

即 f_i、$\tilde{f}_i$ 之间的差异仅在于 x_t 因子的幂指数分别为 a_{it}、$\tilde{a}_{it}$(g_j、$\tilde{g}_j$ 类似). 其中，a_{it} 或为 0，或为大于 1 的正数，$\tilde{a}_{it}$ 则是 0(当 a_{it} 为 0 时)或是大于 0 的正数(即可取为大于 0 小于 1 的正数).

假设 $\hat{\boldsymbol{x}}^0=(\hat{x}_1^0,\cdots,\hat{x}_m^0)^{\mathrm{T}}$ 是

$$\begin{cases}\min\quad \tilde{f}(\boldsymbol{x})\quad \tilde{f}(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\tilde{f}_i(\boldsymbol{x})\\ \text{s.t.}\quad 0\leqslant\tilde{g}_j(\boldsymbol{x})\leqslant 1\quad j=1,\cdots,k\quad \tilde{g}_j(\boldsymbol{x})=\sum_{h=1}^{k_j}\tilde{g}_{jh}(\boldsymbol{x})\end{cases}\qquad —(B)$$

规划的最小值解，且$\hat{\boldsymbol{x}}^0$ 的分量 $\hat{x}_t^0>0$. 以下用反证法证明这一假设不能成立.

首先，易知以下规划的最小值解

$$\begin{cases}\min\quad f(\boldsymbol{x})\quad f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}f_i(\boldsymbol{x})\\ \text{s.t.}\quad 0\leqslant g_j(\boldsymbol{x})\leqslant 1\quad j=1,\cdots,k\quad g_j(\boldsymbol{x})=\sum_{h=1}^{k_j}g_{jh}(\boldsymbol{x})\end{cases}\qquad —(A)$$

等价于 $\tilde{\boldsymbol{x}} = (x_1, \cdots, x_{t-1}, 0, x_{t+1}, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}$ 决定的

$$\begin{cases}\min & f(\tilde{\boldsymbol{x}}) \\ \text{s. t.} & 0 \leqslant g_j(\tilde{\boldsymbol{x}}) \leqslant 1\end{cases} \qquad \text{—(C)}$$

的规划的最小值解. 现设 $\tilde{\boldsymbol{x}}^0 = (\tilde{x}_1^0, \cdots, \tilde{x}_{t-1}^0, 0, \tilde{x}_{t+1}^0, \cdots, \tilde{x}_m^0)^{\mathrm{T}}$ 是(C)(即为(A))式规划的最小值解.

取

$$0 < \hat{x}_t \leqslant \min((\hat{x}_t^0)^{\bar{a}_{it}}, (\hat{x}_t^0)^{\bar{b}_{ht}^j}, 1, \forall i, j, h)$$

由于 $\hat{x}_t^0 > 0$, 故以上的 $\hat{x}_t > 0$ 可以取到. 构造

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}_1^0, \cdots, \hat{x}_{t-1}^0, \hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}^0, \cdots, \hat{x}_m^0)^{\mathrm{T}}$$

并注意到(a)式的条件, 就有

$$g_{jh}(\hat{\boldsymbol{x}}) = d_{jh} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq t}}^{m} (\hat{x}_p^0)^{b_{hp}^j} \cdot (\hat{x}_t)^{b_{ht}^j} \leqslant d_{jh} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq t}}^{m} (\hat{x}_p^0)^{b_{hp}^j} \cdot (\hat{x}_t^0)^{\bar{b}_{ht}^j} = \tilde{g}_j(\hat{\boldsymbol{x}}^0)$$

$$f_i(\hat{\boldsymbol{x}}) = c_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{m} (\hat{x}_j^0)^{a_{ij}} \cdot (\hat{x}_t)^{a_{it}} \leqslant c_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{m} (\hat{x}_j^0)^{a_{ij}} \cdot (\hat{x}_t^0)^{\bar{a}_{it}} = \tilde{f}_i(\hat{\boldsymbol{x}}^0)$$

所以, 成立

$$f(\hat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\hat{\boldsymbol{x}}) < \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i(\hat{\boldsymbol{x}}^0) = f(\hat{\boldsymbol{x}}^0)$$

并且

$$0 \leqslant g_j(\hat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{h=1}^{k_j} g_{jh}(\hat{\boldsymbol{x}}) \leqslant \sum_{h=1}^{k_j} \tilde{g}_{jh}(\hat{\boldsymbol{x}}^0) = \tilde{g}_j(\hat{\boldsymbol{x}}^0) \leqslant 1$$

但此即表示

$$f(\tilde{\boldsymbol{x}}^0) \leqslant f(\hat{\boldsymbol{x}}) < f(\hat{\boldsymbol{x}}^0)$$

并且, 显然又成立

$$0 \leqslant \tilde{g}_j(\tilde{\boldsymbol{x}}^0) \leqslant 1 \quad j = 1, \cdots, k$$

$$f(\tilde{\boldsymbol{x}}^0) = \tilde{f}(\tilde{\boldsymbol{x}}^0) < \tilde{f}(\hat{\boldsymbol{x}}^0)$$

所以, $\hat{\boldsymbol{x}}^0$ 形式(即 $\hat{x}_t^0 > 0$ 形式)的点, 不可能是(B)式规划的解. 同时, 即知(C)式规划的解 $\tilde{\boldsymbol{x}}^0$ 就是(B)式规划的解. 推论的(1)的结论即证, 而推论的(2)是显然的.

应说明, 以上推论中, 几何规划以最小化规划的形式表现是必不可少的条件. 几何规划若以最大化规划(通常目标函数中各 x_i 的幂指数均为非负实数)的

形式表现，显然不能适用以上推论.

以下再给出 2 个示例(包含有几何规划无解时的可能情形).

例 6.5.5.9

$$\min \quad f(\boldsymbol{x}) = \frac{x_4^2}{x_1^4 x_2} + \frac{3x_1^2}{x_2^2} + \frac{2x_1^{\frac{1}{2}} x_2}{x_4^{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{s.t.} \quad 0 \leqslant g_1(\boldsymbol{x}) = \frac{x_2 x_3}{3} + \frac{3}{x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{3}{4}} x_3} + \frac{9x_2^{\frac{1}{2}}}{2x_3 x_4^{\frac{1}{2}}} \leqslant 1$$

解：幂指数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

由于 rank $A = 4$，rank A_f、rank $A_g < 4$，利用(6.5.5.49)式

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln x_1 \\ \ln x_2 \\ \ln x_3 \\ \ln x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln\left(\frac{f_3}{2}\right) \\ \ln(3g_{11}) \\ \ln\left(\frac{g_{12}}{3}\right) \\ \ln\left(\frac{2g_{13}}{9}\right) \end{bmatrix}$$

可解得

$$\begin{cases} x_1 = \left(\frac{f_3}{2}\right)^2 (3g_{11})^{-\frac{4}{3}} \left(\frac{2}{9} g_{13}\right)^{-\frac{4}{3}} \\ x_2 = \left(\frac{f_3}{2}\right)^4 (3g_{11})^{\frac{4}{3}} \left(\frac{g_{12}}{3}\right)^4 \left(\frac{2g_{13}}{9}\right)^{-\frac{8}{3}} \\ x_3 = \left(\frac{f_3}{2}\right)^{-4} (3g_{11})^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{g_{12}}{3}\right)^{-4} \left(\frac{2g_{13}}{9}\right)^{\frac{8}{3}} \\ x_4 = \left(\frac{f_3}{2}\right)^{12} (3g_{11})^2 \left(\frac{g_{12}}{3}\right)^{12} \left(\frac{2g_{13}}{9}\right)^{-10} \end{cases} \qquad \text{—(a)}$$

以上 x_i 的表达式右边的幂指数即为前一方程组系数矩阵的逆矩阵元素. 以及目标函数

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= f(f_1, g_{11}, g_{12}, g_{13}) \\
&= \frac{3^{12}}{2^{24}} f_3^{12} g_{11}^{8} g_{12}^{20} g_{13}^{-12} + \left(\frac{2^{\frac{20}{3}}}{3^{\frac{5}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}} f_3^{-4} g_{11}^{-\frac{16}{3}} g_{12}^{-8} g_{13}^{\frac{8}{3}} + f_3
\end{aligned}
$$

对此求解

$$
\begin{cases} \min & f(f_3, g_{11}, g_{12}, g_{13}) \\ \text{s.t.} & g_{11} + g_{12} + g_{13} = 1 \end{cases} \qquad \text{—(b)}
$$

即可得到局部极小值解. 利用(6.5.5.41)式得到的 $f_3(\boldsymbol{u})$、$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})$ 形式的函数，是

$$
\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \xi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 6 \\ \frac{4}{3} & 16 \\ \frac{2}{3} & 16 \\ \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{8}{3} & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad u_1, u_2 > 0
$$

于是

$$
f_3 = 6u_2
$$

$$
g_{11} = \frac{\frac{4}{3}u_1 + 16u_2}{\frac{8}{3}u_1 + 32u_2} = \frac{1}{2} \quad g_{12} = \frac{\frac{2}{3}u_1 + 16u_2}{\frac{8}{3}u_1 + 32u_2} \quad g_{13} = \frac{\frac{2}{3}u_1}{\frac{8}{3}u_1 + 32u_2}
$$

可将(b)式规划化简为关于 u_1、u_2 双变量的无约束规划.

容易理解的是若 $f(f_3、g_{11}、g_{12}、g_{13})$ 形式的目标函数中的 f_3 的幂指数均 >0，则若 x_i 均不能取为 0，就无解，否则，若有 x_i 可取到 0，且使 f_3 在 $x_i = 0$ 时亦为 0，则取 $x_i = 0$ 即可解出极小值解.

例 6.5.5.10 设

$$
\min \quad f(\boldsymbol{x}) = \frac{x_2 x_4^2}{x_1} + \frac{3x_1^2}{x_2^2 x_4^4} + \frac{2x_1^{\frac{1}{2}} x_2}{x_4^{\frac{1}{3}}}
$$

$$\text{s. t.} \quad 0 \leqslant g_1(\boldsymbol{x}) = \frac{x_2 x_3}{3} + \frac{3}{x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{3}{4}} x_3} + \frac{9x_2^{\frac{1}{2}}}{x_3 x_4^{\frac{1}{2}}} \leqslant 1$$

解：首先从关于 $f(\boldsymbol{x})$ 的无约束规划（即 $0 < g_1(\boldsymbol{x}) < 1$ 时的规划）得，

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} s \quad s \in R$$

易知在 $0 < g_1(\boldsymbol{x}) < 1$ 条件下，f_3 不能取 0 值. 故本例规划没有内点解. 其次，亦可知本例规划也没有 $g_1(\boldsymbol{x}) = 1$ 时的边界点解. 因为由本例规划的幂指数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

从(6.5.5.41)式中可解得

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -26 & 52 \\ -\frac{20}{3} & \frac{40}{3} \\ -28 & 56 \\ \frac{64}{3} & -\frac{128}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \qquad t_1、t_2 \in R$$

再由非负性要求，可知应有

$$\begin{cases} -t_1 + t_2 \geqslant 0 \\ \quad t_1 - t_2 \geqslant 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = 0 \\ \quad t_1, t_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

此即表示(6.5.5.41)式没有非 0 解. 但现在由 f_i、g_{1j} 的函数形式知它们均不能取 0 值（附带即知不能取到 $g_1(\boldsymbol{x}) = 0$），故本例规划无解.

如果利用对偶规划求解，则可解

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & A^{\mathrm{T}} & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \zeta_3\\ \sigma_{11}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

得到

$$\begin{bmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \zeta_3\\ \sigma_{11}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{13}\end{bmatrix}=\frac{16}{53}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{16}\\ \frac{13}{4}\\ \frac{5}{6}\\ \frac{7}{2}\\ -\frac{8}{3}\end{bmatrix}+\frac{16}{53}\begin{bmatrix}\frac{53}{16}\\ \frac{25}{16}\\ -\frac{39}{8}\\ -\frac{5}{4}\\ -\frac{21}{4}\\ 4\end{bmatrix}t \qquad t\in R$$

由 ζ_i、σ_{1j}的非负性要求，可得 $t=\frac{2}{3}$. 从而

$$\begin{bmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \zeta_3\\ \sigma_{11}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

仍由 ζ_3、σ_{1j}因子不能取为 0 即知本例规划在 $g_1(\boldsymbol{x})=1$ 约束下无解.

以上示例表明的是不满足相容性条件时导致几何规划无解的情形. 易理解还有即为相容性条件成立，但几何规划无极小值解的情形.

由以上的示例，可知当几何规划的极小值解位于 $g_j(\boldsymbol{x})=1$ 决定的边界曲面上时，并且幂指数矩阵中的 rank $A_\kappa=m$ 时，总可以将其归结为求解如(6.5.5.51)式那样的规划. 更一般地，当幂指数矩阵 rank $A=r\leqslant m$ 时，利用(6.5.5.56)式，总可以将几何规划归结为由因子$\tilde{\boldsymbol{f}}$、$\tilde{\boldsymbol{g}}$和 $\boldsymbol{x}_2$ 构造出来的等价的(另一个形式)的几何规划.

这个以$\widetilde{f}$、$\widetilde{g}$和x_2因子为变量的几何规划的幂指数矩阵显然是（假设(6.5.5.56)式中的x_1、x_2向量经下标重排，已成为$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$），

$$\widetilde{A}=[A_r,\ A_{m-r}]\cdot\begin{bmatrix}A_1^{-1}(r,\ m) & -A_1^{-1}(r,\ m)A_2(r,\ m)\\ 0 & I_{m-r}\end{bmatrix}$$

其中A_r是原几何规划幂指数矩阵A的前r列向量构造的矩阵，A_{m-r}则是A的后$m-r$列向量构造的矩阵，$A_1(r,\ m)$、$A_2(r,\ m)$符号意义见(6.5.5.56)式. 则

$$\widetilde{A}=[A_rA_1^{-1}(r,\ m),\ A_{m-r}-A_rA_1^{-1}(r,\ m)A_2(r,\ m)]$$

—(6.5.5.70)

所以，有以下推论：

推论 6.5.5.2 设$x\in R^m$ $x>\mathbf{0}$决定的几何规划的幂指数矩阵为A，且 rank $A=r\leqslant m$. 设A的前$r\times r$阶顺序主子矩阵记为$A_1(r,\ m)$可逆，并记A的前r行向量组成的矩阵为$A_1=[A_1(r,\ m),\ A_2(r,\ m)]$以及$A=[A_r,\ A_{m-r}]$，其中，$A_r$、$A_{m-r}$分别是$A$的前$r$列、后$m-r$列向量组成的子矩阵，则几何规划

$$\begin{cases}\min\quad f(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x) & (x>\mathbf{0})\\ \text{s. t.}\quad 1-g_i(x)=1-\sum_{h=1}^{k_j}g_{jh}(x)=0 & j=1,\ \cdots,\ k\end{cases}$$

有解的相容性条件是以下等式—不等式方程组

$$\begin{cases}[A_rA_1^{-1}(r,\ m),\ A_{m-r}-A_rA_1^{-1}(r,\ m)A_2(r,\ m)]^{\mathrm{T}}s=\mathbf{0}\\ s>\mathbf{0}\end{cases}\quad\text{—(6.5.5.71)}$$

有解. ■

推论 6.5.5.2 将(6.5.5.41)式、(6.5.5.48)式两式综合在一起给出了几何规划存在$g_j(x)=1$边界曲面上的极小值点时的必要条件. 当然，相容性条件并不保证几何规划一定存在极小值解.

续例 6.5.5.9 由例 6.5.5.9 已知 rank $A=m=4$. 由(6.5.5.71)式，可取

$$A_r=A\quad A_1^{-1}(r,\ m)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3}\\ 4 & \frac{4}{3} & 4 & -\frac{8}{3}\\ -4 & -\frac{1}{3} & -4 & \frac{8}{3}\\ 12 & 2 & 12 & -10\end{bmatrix}$$

$$A_r A_1^{-1}(r, m) = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 20 & -12 \\ -4 & -\frac{16}{3} & -8 & \frac{8}{3} \\ & & I_4 & \end{bmatrix}$$

相容性条件是

$$\begin{cases} [A_r A_1^{-1}(r, m)]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{s} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{s} > \boldsymbol{0} \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -12 & 4 \\ -8 & \frac{16}{3} \\ -20 & 8 \\ 12 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} > \boldsymbol{0} \qquad \text{—(c)}$$

即

$$\begin{cases} -12t_1 + 4t_2 > 0 \\ -8t_1 + \frac{16}{3}t_2 > 0 \\ -20t_1 + 8t_2 > 0 \\ 12t_1 - \frac{8}{3}t_2 > 0 \\ t_1, t_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad h_1, h_2 > 0 \qquad \text{—(d)}$$

显然,相容性条件成立.

由于相容性条件就是对本例(b)式规划求解(6.5.5.41)式所得,所以,应有

$$s_3 = f_3 \quad s_4 = \lambda g_{11} \quad s_5 = \lambda g_{12} \quad s_6 = \lambda g_{13} \quad \lambda = s_4 + s_5 + s_6$$

其中 λ 是(b)式规划的乘子.

因此,

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ \lambda g_{11} \\ \lambda g_{12} \\ \lambda g_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -8 & \frac{16}{3} \\ -20 & 8 \\ 12 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

从而

$$\lambda = \frac{4}{3}h_1 + \frac{8}{3}h_2 \quad g_{11} = \frac{1}{2} \quad g_{12} = \frac{h_1 + 4h_2}{4(h_1 + 2h_2)} \quad g_{13} = \frac{h_1}{4(h_1 + 2h_2)}$$

及 $f_3 = \frac{1}{2}h_2$. 将这组关系代入例 6.5.5.9 中的(a)式,可得

$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{x_4^2}{x_1^4 x_2} = \dfrac{3^{12}}{2^{60}}\left(\dfrac{h_2}{h_1}\right)^{12} \dfrac{(h_1 + 4h_2)^{20}}{(h_1 + 2h_2)^8} \\ f_2 = \dfrac{3x_1^2}{x_2^2} = \dfrac{2^{\frac{80}{3}}}{3^{\frac{5}{3}}} \dfrac{h_1^{\frac{8}{3}}}{h_2^4} \dfrac{(h_1 + 2h_2)^{\frac{16}{3}}}{(h_1 + 4h_2)^8} \\ f_3 = \dfrac{1}{2}h_2 \end{cases} \qquad \text{—(e)}$$

利用(e)式亦可得到目标函数 $f = f_1 + f_2 + f_3 = f(h_1, h_2)$ 形式的表达式. 这是与例 6.5.5.9 中用参数 u_1, u_2 表示 $f(x)$ 目标函数为 $f(u_1, u_2)$ 等价的.

由此,通过求解 $f(h_1, h_2)$(或 $f(u_1, u_2)$)形式目标函数关于 h_1、h_2 参变量的无约束极小值解,即可得原几何规划的解.

但这里可以看到,从以上(c)式中,其实有

$$f_1 = s_1, \ f_2 = s_2$$

以及从(d)式中可得到

$$f_1 = s_1 = \frac{1}{12}(h_1 + h_2) \quad f_2 = s_2 = \frac{1}{4}h_1 + \frac{3}{8}h_2$$

的关系,所以,本例中更简洁的解法可以是直接联解以下方程组,

$$\begin{cases} \dfrac{3^{12}}{2^{60}}\left(\dfrac{h_2}{h_1}\right)^{12} \dfrac{(h_1 + 4h_2)^{20}}{(h_1 + 2h_2)^8} = \dfrac{1}{12}(h_1 + h_2) \\ \dfrac{2^{\frac{80}{3}}}{3^{\frac{5}{3}}} \dfrac{h_1^{\frac{8}{3}}}{h_2^4} \dfrac{(h_1 + 2h_2)^{\frac{16}{3}}}{(h_1 + 4h_2)^8} = \dfrac{1}{4}h_1 + \dfrac{3}{8}h_2 \end{cases} \qquad \text{—(f)}$$

便得到极小值解.

由以上数例可见,几何规划是否有解,完全由它的幂指数矩阵的性状决定. 如果有解,则通过解(6.5.5.41)式、(6.5.5.49)式线性等式一不等式方程组(或等式方程组),可将其归结为求解非线性函数方程组.

附带地说,以上关于(正项式)几何规划的解法,加以适当修改完全可用于一般的广义几何规划的求解中去.

由以上关于二次规划、几何规划的分析可见,本书§5 章关于线性不等式方程组的解的方法,不仅是非线性规划理论分析的基础工具,也是构造算法的重要手段.

§6.6 附录：其他问题

附录一 应用 Kuhn - Tucker 一阶条件的限制

由上一节利用条件(**c.1**)、(**c.2**)推导一阶、二阶最优性条件时，已经指出，条件(**c.1**)隐含了条件(**b.1**)即 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0)\cap X$ 集合的内点最优性条件. 而为得到条件(**c.1**)的判别公式(即 Kuhn - Tucker 一阶条件)式(6.5.2.39)、式(6.5.2.3)，是基于 R^m 空间中目标函数

$$f^0: f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}^0)$$

曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的邻域的可定向性质. 只有当 f^0 曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点邻域是可定向的，那么，在 $N_\delta(\boldsymbol{x}^0)\cap X$ 集合当 $\delta\to 0$ 的意义上，f^0 曲面的定向可由 f^0 曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处的切平面 L_f 的定向准确地表示. L_f 切平面的定向自然可由梯度向量 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$ 给出. 然后，才能利用 L_f 切平面，将 R^m 空间在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处剖分为 $\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{x}\geqslant 0$ 和 $\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{x}<0$ 的两个不相交子空间. 在 $\boldsymbol{x}^0$ 满足一阶约束品性的前提下，指向可行区域 X 内点的全部可行方向向量 $\boldsymbol{z}$ 构成的锥就可用线性化锥 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 表示. 这样，最终才能得到，(由 Farkas 引理)当 $Z^1(\boldsymbol{x}^0)$ 集合的任一方向向量 $\boldsymbol{z}$ 均指向 R^m 上由 $\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{x}\geqslant 0$ 决定的切平面 L_f 的那一侧半空间，则在 $\delta\to 0$ 意义上，$N_\delta(\boldsymbol{x}^0)\cap X$ 集合内点上的任一 $\boldsymbol{x}$，都必要有 $f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{x}^0)$ 成立. 由此才能得到 Kuhn - Tucker 一阶条件.

由此，可以得到应用 Kuhn - Tucker 一阶条件的限制.

限制一 $\boldsymbol{x}^0$ 点必须是正则的. 即在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\neq \mathbf{0}$$

$$\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)\neq \mathbf{0}\qquad i\in I(\boldsymbol{x}^0)$$

必须成立. 因为当 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=\mathbf{0}$，则 f^0 曲面在 R^m 空间的 $\boldsymbol{x}^0$ 处就是奇的，f^0 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处不可定向，f^0 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处也不存在切平面 L_f[1]. 此时，由

$$\nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}=0$$

所得出的解空间是 $\boldsymbol{\alpha}\in R^m$，即是 R^m 空间本身. 所以，也就不可能再利用($m-1$ 维的)切平面 L_f 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处去剖分 R^m 空间. 由此即知，在这种情形下，推出

[1] 这是指"切平面"是 $m-1$ 维线性流形而言.

Kuhn－Tucker一阶条件的几何基础已不复存在，再去应用Kuhn－Tucker一阶条件就违理了.

至于$\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0) \neq 0 \quad i \in I(\boldsymbol{x}^0)$的意义是在于当$g_i(\boldsymbol{x})=0$，$i \in I(\boldsymbol{x}^0)$约束条件中，若含有某个$\nabla g_i(\boldsymbol{x}^0)=0$，则$g_i(\boldsymbol{x})=0$曲面在$\boldsymbol{x}^0$点处就可以是奇的. 这时$g_i$曲面可以是在$\boldsymbol{x}^0$点处自身相交、分支或者$\boldsymbol{x}^0$是$g_i(\boldsymbol{x})=0$曲面的孤立点等等. 这样，线性化锥$Z^1(\boldsymbol{x}^0)$可能就是不确定的，或者可行区域$X$只是一个孤立点. 为排除这些不确定的情形，这一条件也是需要的.

鉴于此，本书中将"$\boldsymbol{x}^0$点是正则的"条件写明在Kuhn－Tucker一阶条件即本书定理6.5.2.1之中.

由此自然地得到了就用一阶Kuhn－Tucker条件的另一形式的限制.

限制二 $\boldsymbol{x}^0$点不是可行区域X的内点.

因为若局部极小值点$\boldsymbol{x}^0$是X的内点，则全部的约束函数$g_i(\boldsymbol{x}^0)>0$，$i=1, 2, \cdots, k$，故在这样的点上去应用Kuhn－Tucker一阶条件，必要得出乘子$\omega_i=0$，$i=1, 2, \cdots, k$，从而必要求$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=\boldsymbol{0}$成立. 这样就又违背了上述限制一的要求.

众所周知，当局部极小值点$\boldsymbol{x}^0$是可行区域X的内点，那么，$\boldsymbol{x}^0$点处当然必要有$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=\boldsymbol{0}$. 同时，这里的$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=\boldsymbol{0}$在$z=f(\boldsymbol{x})$所表示的是$R^{m+1}$空间上的曲面上讲来，这一$R^{m+1}$空间上的曲面在$\boldsymbol{x}^0$点处是正则的而非是奇的.

与限制一关于$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=\boldsymbol{0}$表示的是$R^m$空间上的$f^0$曲面在$\boldsymbol{x}^0$点处是奇的这一意思不同，以上所指的，$\boldsymbol{x}^0$是$X$的内点时，$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=\boldsymbol{0}$所表示的$z=f(\boldsymbol{x})$决定的曲面是在$R^{m+1}$空间上的曲面. 在(6.5.1.3)式中，这一曲面用U_f表示，且U_f可表成以下形式

$$U_f:\ F(\boldsymbol{x}, z)=z-f(\boldsymbol{x})=0$$

注意到

$$\nabla F(\boldsymbol{x}^0, z^0)=\begin{bmatrix}-\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ 1\end{bmatrix}\neq \boldsymbol{0} \qquad 其中\ z^0=f(\boldsymbol{x}^0)$$

所以，在R^{m+1}空间的U_f曲面上，$\boldsymbol{x}^0$点不是奇点而是正则点. 由本书前2章的分析，在这样的$\boldsymbol{x}^0$点处，当且仅当

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} \geqslant 0 \qquad \boldsymbol{\alpha} \in R^m$$

成立(且$f(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}^0$点邻域是拟凹的)，$\boldsymbol{x}^0$是$f(\boldsymbol{x})$的(弱)局部极小值点. 此即无约束最优化的一、二阶充要条件.

这即是在本章开始即指出的，X的内点极小值点的判别条件只能应用无约束最优性一、二阶条件的缘由. 所以，本书不赞同采用(6.5.2.40)式的形式来表述

Kuhn - Tucker 一阶条件. 因为由(6.5.2.40)式,给人以似乎取 $\omega_i = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, k$ 在 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{0}$ 的场合,Kuhn - Tucker 一阶条件在形式上也可以成立(包括当 $g_i(\boldsymbol{x}^0) > 0,\ i = 1, 2, \cdots, k$,即 $\boldsymbol{x}^0$ 是 X 的内点的场合),从而给人一种误解,好像在 $\nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{0}$(包括 $\boldsymbol{x}^0$ 是 X 的内点)时,也适用 Kuhn - Tucker 一阶条件. 所以,在本书定理 6.5.2.1 中要包含 $\boldsymbol{x}^0$ 是正则点这一条件,以表述应用 Kuhn - Tucker 一阶条件的这一限制. 在数学上不能仅限于形式上成立,便确立为正确[1].

附录二　非线性规划的极小值点在目标函数作单调增变换时的不变性

$F: R \to R$ 是一个变换. 对(P1)规划的目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 作变换

$$z = F(f(\boldsymbol{x}))$$

设 $\boldsymbol{x}^0$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 在(P1)规划下满足以上一、二阶最优性条件的极小值. 称 F 变换是单调增变换,当 F 满足以下条件.

(1) $F(f)$ 关于 f 是二阶可导的.

(2) 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点处,存在 $\delta > 0$,使任一 $\boldsymbol{x} \in N_\delta(\boldsymbol{x}^0) \cap X$

$$F' = \frac{\mathrm{d}F(f)}{\mathrm{d}f} = F'(f(\boldsymbol{x})) > 0$$

成立.

记原有的(P1)规划是

$$(\text{P1}):\begin{cases}\min & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & g(\boldsymbol{x}) \geqslant 0\end{cases}$$

则在 F 变换下,得到(P1)′规划是

$$(\text{P1})':\begin{cases}\min & F(f(\boldsymbol{x})) \\ \text{s.t.} & g(\boldsymbol{x}) \geqslant 0\end{cases}$$

作 Lagrange 函数　$L^F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}_F) = F(f(\boldsymbol{x})) - \boldsymbol{\omega}_F^{\mathrm{T}} g(\boldsymbol{x})$

则有

$$\nabla_x L^F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}_F) = F' \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}^0) - \boldsymbol{\omega}_F^{\mathrm{T}} g(\boldsymbol{x}^0)$$

不妨取 $\boldsymbol{\omega}_F = F' \cdot \boldsymbol{\omega} \geqslant \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\omega}$ 是原有(P1)一阶条件的乘子向量,有

$$\nabla_x L^F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}_F) = F' \cdot (\nabla f(\boldsymbol{x}^0) - \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} g(\boldsymbol{x}^0)) = \boldsymbol{0}$$

---

[1] 在文献中不顾这里所说的限制而应用 Kuhn - Tucker 一阶条件的事例是常见的. 如《全局优化引论》一书(见前注),例 1.2、例 1.3 都在可行区域 X 的内点上应用 K - T 一阶条件. 作者希望通过这 2 个例子说明将 K - T 条件应用到"非凸规划"时可能产生的一些困难. 但这样应用 K - T 条件肯定是不正确的.

一阶条件仍成立.

$$\nabla_x^2 L^F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}_F) = F'' \cdot \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\nabla f(\boldsymbol{x}^0) + F' \cdot \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^0) - \boldsymbol{\omega}_F^{\mathrm{T}} \nabla^2 g(\boldsymbol{x}^0)$$

$$= F'' \cdot \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\nabla f(\boldsymbol{x}^0) + F' \cdot \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$$

则$\nabla^2 L^F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}_F)$在 $F' \cdot \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha}=0$ 约束下的拟特征值 μ^F，由下式决定

$$\begin{vmatrix} \mu_F I - F'' \cdot \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\nabla f(\boldsymbol{x}^0) - F' \cdot \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) & F' \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}^0) \\ F' \cdot \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$是原有(P1)规划的 Lagrange 函数的 Haissen 矩阵.

用因子 $\dfrac{F''}{F'} \cdot \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}$ 乘以上行列式的第 $m+1$ 行，$j = 1, 2, \cdots, m$，再加到第 j 行，可知上式等价于

$$\begin{vmatrix} \mu_F I - F' \cdot \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) & F' \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}^0) \\ F' \cdot \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

取 $\mu_F^i = F' \cdot \mu_i$（μ_i 是原规划时的对应意义下的拟特征值），即知 μ_F^i 就是 $\nabla_x^2 L^F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$ 在 $F' \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0$ 约束下的拟特征值. 并可知新规划下的拟特征向量 $\boldsymbol{\gamma}_F^i$ 由下式决定

$$\begin{cases} (\nabla_x^2 L^F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) - \mu_F^i I)\boldsymbol{\gamma}_F^i - F' \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}^0)\eta = \boldsymbol{0} \\ F' \cdot \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\gamma}_F^i = 0 \\ \| \boldsymbol{\gamma}_F^i \| = 1 \end{cases}$$

易知这一方程组可类似以上的方法转换为

$$\begin{cases} F' \cdot [(\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega}) - \mu_i I)\boldsymbol{\gamma}_F^i - \nabla f(\boldsymbol{x}^0)\eta] = \boldsymbol{0} \\ F' \cdot \nabla f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\gamma}_F^i = 0 \\ \| \boldsymbol{\gamma}_F^i \| = 1 \end{cases}$$

故 $\boldsymbol{\gamma}_F^i = \boldsymbol{\gamma}^i$（$\boldsymbol{\gamma}^i$ 是原规划下的拟特征向量），所以，拟特征向量是不变的，$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{\alpha} = 0$ 切平面上的法曲率非负分区也不变，且 $g(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 条件不变，故 $\hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$不变，即知

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L^F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z} \geqslant 0 \qquad \boldsymbol{z} \in \hat{\hat{Z}}^1(\boldsymbol{x}^0)$$

成立.

所以 $\boldsymbol{x}^0$ 是目标函数 $f(\boldsymbol{x})$在满足以上条件的任意单调增变换下的不变量. 同时可见，Lagrange 函数在$\nabla f(\boldsymbol{x}^0)$约束下的拟特征向量和切平面上的法曲率符号分区都是对目标函数作单调增变换下的不变量，而一阶条件的乘子及

$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\omega})$矩阵的拟特征值则仅是半不变量(即仅保持符号不变的量).

附录三 目标函数 $F(x)$ 为多元齐次多项式在 $x^{\mathrm{T}}x = 1$ 约束下的极值函数的连续性分析

在§2.4.4节关于R^m空间上的n维($n < m-1$)维曲面$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{r} \in R^m$, $\boldsymbol{u} \in D \subset R^n$ 的分析中,涉及到了 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 曲面上的极值主法方向 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u})$函数的确定,将产生一个以下形式的等式约束规划

$$\begin{cases} \max \quad F(\boldsymbol{t}) = \left| \sum_{h=1}^{m-n} \boldsymbol{\Pi}^h t_h \right| \qquad \boldsymbol{\Pi}^h \in R^{n\times n} \\ \text{s.t.} \quad \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{t} = 1 \end{cases} \qquad \text{—(2.4.4.13)}$$

其中$|\cdot|$是行列式,故 $F(\boldsymbol{t})$是 $\boldsymbol{t}$ 的 $(m-n)$ 元 n 次齐次多项式,$\boldsymbol{\Pi}$ 是$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$曲面上的切超平面的法空间的极大线性无关向量组组成的基向量组矩阵. 由于 $\boldsymbol{\Pi}$ 矩阵总可以取成为列正交矩阵,故以上规划可等价写成为

$$\begin{cases} \max \quad F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \qquad \boldsymbol{u} \in D \subset R^n \quad \boldsymbol{x} \in R^N \quad N = m - n \\ \text{s.t.} \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = 1 \end{cases} \qquad \text{—(6.6.1)}$$

形式的等式约束规划. 这里的 $\boldsymbol{x}$ 即等价于上面的$\boldsymbol{t}$, $F(\cdot)$是关于 $\boldsymbol{x}$ 的 $N = m-n$ 元 n 次齐次多项式,且

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \sum_{\{k_1, \cdots, k_N\}} a_{k_1 k_2 \cdots k_N}(\boldsymbol{u}) \cdot x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \cdots \cdot x_N^{k_N} \qquad \text{—(6.6.2)}$$

$$k_j \geqslant 0 \quad k_1 + k_2 + \cdots + k_N = n \qquad k_j \text{ 为整数}$$

其中 $a_{k_1 k_2 \cdots k_N}(\boldsymbol{u})$ 是关于 $\boldsymbol{u}$ 的(有界)可微函数. 以下总设对 $\boldsymbol{u} \in D$, $\boldsymbol{x} \in R^N$, $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \neq$ 常数.

作

$$\begin{cases} z = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = 1 \end{cases} \qquad \text{—(6.6.3)}$$

则(6.6.3)式在 $\boldsymbol{u}$ 被给定时,表示的是一个 R^N 空间上的 $N-1$ 维曲面. 记这个 $N-1$ 维曲面是 F,则 F 是有界闭曲面.

作极坐标$(\boldsymbol{\theta}, \rho)$变换, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_{N-1})$ ρ、$\theta_i \in R$,

$$\begin{cases} x_1 = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cdot \cdots \cdot \cos\theta_{N-2} \cos\theta_{N-1} \\ x_2 = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cdot \cdots \cdot \cos\theta_{N-2} \sin\theta_{N-1} \\ x_3 = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cdot \cdots \cdot \sin\theta_{N-2} \\ \vdots \\ x_N = \sin\theta_1 \\ z = \rho(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{u}) = F(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{u}) \end{cases} \qquad \text{—(6.6.4)}$$

则(6.6.3)式中的 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$ 关系式被消去，F 曲面由

$$\rho=\rho(\boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{u})\qquad(\boldsymbol{u}\text{ 给定})\tag{6.6.5}$$

函数式给出.

这里由于 ρ 可以取到负数值，故$(\boldsymbol{\theta},\ \rho)$是一个广义极坐标系.

例 6.6.1 取 $N=2,\ n=3$ 有

$$\begin{cases}z=ax_1^3+bx_1^2x_2+cx_1x_2^2+dx_2^3\\x_1^2+x_2^2=1\end{cases}$$

以 $a=-2,\ b=d=1,\ c=0$ 为例，作变换

$$\begin{cases}x_1=\cos\theta\\x_2=\sin\theta\\z=\rho(\theta)=-2\cos^3\theta+\cos^2\theta\sin\theta+\sin^3\theta\end{cases}$$

因为现 $z=\rho(\theta)$ 取极值的条件是

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}=6\cos^2\theta\sin\theta+\sin^2\theta\cos\theta+\cos^3\theta=0$$

故极值在

$$\cos\theta=0\Rightarrow\theta=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\\\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

$$\cos\theta\neq0\Rightarrow\sin2\theta=-\frac{1}{3}\Rightarrow\theta=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{3}\\\pi-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

处. 其中极小值是

$$\theta=\frac{3\pi}{2},\ -\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}$$

极大值是

$$\theta=\frac{\pi}{2},\ \pi-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}$$

图 6.6.1 给出了本例的 $\rho(\theta)$ 曲线图.

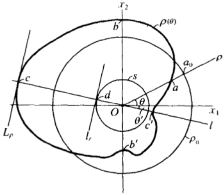


图 6.6.1

其中，s 为单位圆周，ρ_0 为人为取定的表示 $\rho(\theta)=0$ 的圆周，从而对某个 θ，

若 $\rho(\theta)<0$，可以将 $\rho(\theta)$ 表示成 ρ_0 圆形内部的点，而将 $\rho(\theta)>0$ 的点表示在 ρ_0 圆的外部. 如图中，θ 角决定的 ρ 射线上，$\rho(\theta)<0$，则取 $\overline{aa_0}$ 表示 $\rho(\theta)<0$，故可在 ρ 射线上决定 a 点. 以此方式即可得到本例的 $z=\rho(\theta)$ 曲线如图中的 $\rho(\theta)$ 曲线[1].

$\rho(\theta)$ 曲线上 $z=\rho(\theta)$ 的极值点即为 b、c 及 b'、c' 点. 其中，b、c 为极大值点，b'、c' 则为极小值点，并且 b、b'(及 c、c')点为对径点. 如与 x_1 轴夹角为 θ' 的直线 l 就是过 c、c' 点的直线，

$$\theta'=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}$$

显然，θ'、$\pi+\theta'$ 即决定了 $\cos\theta\neq0$ 时 $\rho(\theta)$ 曲线上取极值的点. 从几何上讲，$\rho(\theta)$ 曲线上取极值的点处的切线一定平行于该点与原点连线与单位圆周 s 的交点处的圆周切线. 如图中的 l 线段上的 c、d 点处，$\rho(\theta)$ 曲线与 s 圆周的切线 L_ρ、l_r 一定是平行的.

易理解，因为 $\cos\varphi$、$\sin\varphi$ 的周期性质，若 n 次齐次函数 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ 经变换所得到的 $\rho(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{u})$ 曲面，当 $n=$ 偶数时，是对称的图形，当 $n=$ 奇数时(如本例)，则图形就不是对称的. 不论 n 为奇、偶数，$\rho(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{u})$ 关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的极值点总有**偶数**个，并呈两一两对径点的分布状况. 当 n 为偶数时，处于对径点关系上的两个极值点或同为极大值点或同为极小值点；当 n 为奇数时，处于对径点关系上的两个极值点一个为极大值点另一个则为极小值点(如本例).

当 $\rho(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{u})$ 决定的曲面上关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的极值点 $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^*$ 是严格极值点，即称 $\boldsymbol{\theta}^*$ 为单重极值点. 在几何上即表明 $\rho(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{u})$ 曲面上 $\rho(\boldsymbol{\theta}^*,\boldsymbol{u})$ 点邻域内，$\rho(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{u})$ 曲面切超平面与单位球面上的切超平面相互平行的点只有 $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^*$ 一个点(如本例).

当 $\rho(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{u})$ 决定的曲面上关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的极值点 $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^*$ 是弱极值点，即称该极值点为多重极值点. 在几何上即表明 $\rho(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{u})$ 曲面上存在一个包含 $\boldsymbol{\theta}^*$ 点在内的集合 P，且

$$\rho(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{u})=\rho(\boldsymbol{\theta}^*,\boldsymbol{u})\qquad\boldsymbol{\theta}、\boldsymbol{\theta}^*\in P\qquad—(6.6.6)$$

因此，

$$\rho(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{u})=c\qquad\boldsymbol{\theta}\in P\qquad c-const\qquad—(6.6.7)$$

必定等价于 R^N 空间上的超球面上的某个(部分)球面.

以下给于 $\rho(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{u})$ 曲面上多重极值点处 $\boldsymbol{\theta}$ 关于 $\boldsymbol{u}$ 参数向量(或 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\theta})$ 关于 $\boldsymbol{u}$)的连续性质、可微性质的分析.

定义 6.6.1 设 X，Y 是两个集合，f: $X\to Y$ 是普通的单值映射. 定义 f^{-1}：

---

[1] 图 6.6.1 中 $\rho(\theta)$ 曲线用放大的比例画出.

$Y \to X$ 如下

$$f^{-1}(y) = \{x \mid x \in X, \ f(x) = y, \ y \in Y\} \qquad —(6.6.8)$$

则称 f^{-1} 是 f 的**广义逆映射**[1]. ■

定义 6.6.2 设 X, Y 是两个集合, T: $X \to Y$ 是一种对应规则,如果对每一个 $x \in X$,通过 T 有 Y 中的一个子集 $T(x) \subseteq Y$ 与之对应,则称 T 是 X 到 Y 的一个**集值映射**. $T(x)$ 称为 T 在 x 处的像或值[2]. ■

若对定义 6.6.2 中的映射 T, $x \in X$, $T(x) \neq \varnothing$,则称 $T(x)$ 为真集值映射. 以下只考虑真集值映射(简称为集值映射).

对于广义逆映射,若 f^{-1} 是满射、单射,则 f^{-1} 就是普通的逆映射(逆函数),若 f^{-1} 是满射但不是单射,则 f^{-1} 就是集值映射.

对于(6.6.1)式的极(大)值规划,作 L—函数,

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \lambda) = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) - \frac{1}{2}\lambda(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - 1)$$

λ 是乘子. 视 $\boldsymbol{u}$ 为常数,由极值条件得

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}} = \lambda \boldsymbol{x} \qquad —(6.6.9)$$

设满足(6.6.9)式的 $\boldsymbol{x}^*$ 给出的是多重极值点. 则由于(6.6.2)式(并参见(2.4.4.52)式),可知

$$\lambda = \lambda(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}) = \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*} = n \cdot F(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}) \qquad —(6.6.10)$$

因为 $\boldsymbol{x}^*$ 是多重极值点,所以,由(6.6.7)式,必应有集合 X, $\boldsymbol{x}^* \in X$ 使

$$\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = c \qquad \boldsymbol{x} \in X \subset S \subset R^N \quad X - \{\boldsymbol{x}^*\} \neq \varnothing \qquad —(6.6.11)$$

c 是常数. 易理解,由 $F(\cdot)$ 的函数形式即知, c 与 $\boldsymbol{u}$ 有关.

这里 $S = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 1 \quad \boldsymbol{x} \in R^m\}$.

从(6.6.10)式中可得 λ 是关于 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$ 可微的函数. 考虑 λ^{-1} 广义逆映射. 因为在求解关于 $\boldsymbol{x}$ 的极值(6.6.9)式时,已将 $\boldsymbol{u}$ 视为常数,并且,已设(6.6.11)式成立,故 λ^{-1} 一定是一到多的映射.

推论 6.6.1 由(6.6.11)式给出的乘子函数 λ,在任一给定的 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 \in D$ 时,

$$\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_0) = c_0 \quad \boldsymbol{x} \in X \subset S \qquad —(6.6.12)$$

---

〔1〕 引自《集值分析与经济应用》张丛军著,科学出版社 2004 年,第 74 页. 形式上略有不同.

〔2〕 同上注. 第 72 页. 关于集值映射的性质等可见所引书著.

且 X 为 R^N 的单连通真子集(或其并集),定义广义逆映射

$$\lambda^{-1}(c_0) = F^{-1}(c_0, \boldsymbol{u}_0) \cap \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 1\} \qquad —(6.6.12a)$$

则 $\lambda^{-1}(c_0)$ 是闭集. ■

证明:由广义逆映射的定义,显然

$$\lambda^{-1}(c_0) = X$$

现取点列 $\{\boldsymbol{x}_j\} \in X$,设 $\underset{j\to\infty}{\mathrm{Lim}}\,\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{x}$ 存在,则由于

$$\lambda(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{u}_0) = nF(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{u}_0) = c_0 \qquad \forall j$$

故

$$\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_0) = \underset{j\to\infty}{\mathrm{Lim}}\,\lambda(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{u}_0) = \underset{j\to\infty}{\mathrm{Lim}}\,c_0 = c_0 \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \lambda^{-1}(c_0)$$

因此 $\lambda^{-1}(c_0)$ 为闭集. $\lambda^{-1}(\cdot) = F^{-1}(\cdot)$ 由(6.6.10)式即知. 故证.

推论 6.6.1 表明,满足(6.6.7)式的 $\boldsymbol{\theta} \in P$ 决定的 $\rho(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{u})$ 曲面上的一个闭子曲面是与 R^N 空间上的单位超球面上的某个闭子曲面等价(同构)的曲面. 或者说 X 就是单位超球面 S 上的某个闭子曲面,并且,有 $F(F^{-1}(c_0, \boldsymbol{u}_0)) = c_0$ 故 $\tilde{x} \in F^{-1}(c_0, \boldsymbol{u}_0)$ 即表明 $\tilde{x}$ 即为(6.6.1)式规划的局部极小值点. 再记

$$C = \lambda(X, D) = \{c \mid \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = c \in R, \boldsymbol{x} \in S \subset R^N, \boldsymbol{u} \in D \subset R^n\} \qquad —(6.6.13)$$

因此 $C \subset R$.

推论 6.6.2 设 $A \subset C$ 且 A 是开集,则 $\lambda^{-1}(A)$ 也是开集. ■

证明:对任意的 $c_0 \in C$ 有 $\boldsymbol{x}_0 \in S$, $\boldsymbol{u}_0 \in D$ 使 $\lambda(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0) = c_0$. 只需证明对任取的 $\varepsilon > 0$,若 $(c_0 - \varepsilon, c_0 + \varepsilon) \subset C$ 则 $\lambda^{-1}((c_0 - \varepsilon, c_0 + \varepsilon))$ 是开集.

记 $D_\delta = \lambda^{-1}(c_0 - \varepsilon, c_0 + \varepsilon)$. 显然 $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0) \in D_\delta$. 对任取 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in D_\delta$,应有

$$\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = c_1 \in (c_0 - \varepsilon, c_0 + \varepsilon)$$

设 $c_1 = c_0 + \varepsilon_1$ 则 $0 < |\varepsilon_1| < \varepsilon$.

设 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\delta}_x$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{\delta}_u$ 则有 $0 < \zeta < 1$ 使

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) &= \lambda(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0) + \frac{\partial\lambda(\boldsymbol{x}_0 + \zeta\boldsymbol{\delta}_x, \boldsymbol{u}_0 + \zeta\boldsymbol{\delta}_u)}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{\delta}_x + \frac{\partial\lambda(\boldsymbol{x}_0 + \zeta\boldsymbol{\delta}_x, \boldsymbol{u}_0 + \zeta\boldsymbol{\delta}_u)}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{\delta}_u \\ &= c_0 + \varepsilon_1\end{aligned}$$

故

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial\lambda(\boldsymbol{x}_0 + \zeta\boldsymbol{\delta}_x, \boldsymbol{u}_0 + \zeta\boldsymbol{\delta}_u)}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{\delta}_x + \frac{\partial\lambda(\boldsymbol{x}_0 + \zeta\boldsymbol{\delta}_x, \boldsymbol{u}_0 + \zeta\boldsymbol{\delta}_u)}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{\delta}_u$$

记

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0)}{\partial x} = \max\left|\frac{\partial \lambda(\boldsymbol{x}_0 + \zeta\boldsymbol{\delta}_x', \boldsymbol{u}_0 + \zeta\boldsymbol{\delta}_u')}{\partial x_i}\right| \text{对所有的} \begin{cases} 1 \leqslant i \leqslant N \\ 0 \leqslant \zeta \leqslant 1 \\ \|\boldsymbol{\delta}'\| \leqslant \|\boldsymbol{\delta}\| \end{cases}$$

类似地有 $\dfrac{\partial \tilde{\lambda}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0)}{\partial u}$ 符号. 上式中的最大值可以取到是易见的.

记

$$M = \max\left(\frac{\partial \tilde{\lambda}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0)}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{\lambda}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0)}{\partial u}\right)$$

由 $\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ 函数的形式即知 $M < +\infty$. 并且, 也可知 $M > 0$. 因为若 $M = 0$, 则表示必有

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = N\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial \lambda}{\partial u_j} = N\frac{\partial F}{\partial u_j} \equiv 0 \quad \forall i, j$$

即 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$是常数. 这与以上所设的 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \neq$常数矛盾.

因为 $0 < M < +\infty$, 取 $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_x, \boldsymbol{\xi}_u)$, 且取

$$0 < \|\boldsymbol{\xi}\| < \min(\|\boldsymbol{\delta}\|, 1) = \gamma$$

$$0 < \sum_{i=1}^{N} |\xi_x^i| + \sum_{j=1}^{N} |\xi_u^j| < \frac{\varepsilon - |\varepsilon_1|}{M}$$

作 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ 的邻域 $N_\gamma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$, 对任一$(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{u}}) \in N_\gamma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$,

$$\|(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{u}}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\| < \gamma$$

记

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\xi}_x \qquad \tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\xi}_u$$

则有 $0 < \alpha < 1$ 使

$$\lambda(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{u}}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \frac{\partial \lambda(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{\xi}_x, \boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{\xi}_u)}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{\xi}_x + \frac{\partial \lambda(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{\xi}_x, \boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{\xi}_u)}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{\xi}_u$$
$$= c_1 + \varepsilon_2$$

因为 $\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = c_0 + \varepsilon_1 = c_1$, 故

$$\begin{aligned} |\varepsilon_1 + \varepsilon_2| &= \left|\varepsilon_1 + \frac{\partial \lambda(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{\xi}_x, \boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{\xi}_u)}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{\xi}_x + \frac{\partial \lambda(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{\xi}_x, \boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{\xi}_u)}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{\xi}_u\right| \\ &\leqslant |\varepsilon_1| + \frac{\partial \tilde{\lambda}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0)}{\partial x}\sum_{i=1}^{N}|\xi_x^i| + \frac{\partial \tilde{\lambda}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0)}{\partial u}\sum_{j=1}^{n}|\xi_u^j| \\ &< |\varepsilon_1| + M \cdot \frac{\varepsilon - |\varepsilon_1|}{M} \end{aligned}$$

其中 ξ_x^i、ξ_u^i 为 ξ_x、ξ_u 的分量.
所以,

$$|\varepsilon_1+\varepsilon_2|<\varepsilon$$

因此,

$$-\varepsilon<-|\varepsilon_1+\varepsilon_2|\leqslant\lambda(\tilde{x},\tilde{u})-c_0\leqslant|\varepsilon_1+\varepsilon_2|<\varepsilon$$

有

$$\lambda(N_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}))\subset(c_0-\varepsilon,\ c_0+\varepsilon)$$

即

$$N_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\subset\lambda^{-1}(c_0-\varepsilon,\ c_0+\varepsilon)$$

由此即知 $D_\delta=\lambda^{-1}((c_0-\varepsilon,\ c_0+\varepsilon))$ 是开集.

推论 6.6.2 表明在 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ 不为常数时,广义逆映射 λ^{-1} 是上半连续的集值映射.

推论 6.6.3 设 $A\subset C$ 且 A 是闭集,则 $\lambda^{-1}(A)$ 也是闭集. ■

证明: 类似地只需对任一 $c_0\in C$,且 $\varepsilon>0$,闭区间 $[c_0-\varepsilon,\ c_0+\varepsilon]\subset C$ 的情形证明 $\lambda^{-1}([c_0-\varepsilon,\ c_0+\varepsilon])$ 是闭集即可.

设点列 $\{(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{u}_n)\}\in\lambda^{-1}([c_0-\varepsilon,\ c_0+\varepsilon])$,且 $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{u}_n)=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ 存在. 由 $\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ 函数关于 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$ 的连续性即知,有

$$c_0-\varepsilon\leqslant\lambda(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{u}_n)\leqslant c_0+\varepsilon$$

故

$$c_0-\varepsilon\leqslant\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\lambda(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{u}_n)=\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\leqslant c_0+\varepsilon$$

所以

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{u}_n)=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\in\lambda^{-1}([c_0-\varepsilon,\ c_0+\varepsilon])$$

即证 $\lambda^{-1}([c_0-\varepsilon,\ c_0+\varepsilon])$ 是闭集.

推论 6.6.3 表明广义逆映射 λ^{-1} 同时是下半连续的集值映射.

由此即知因为 λ^{-1} 即是上半连续又是下半连续的,所以,广义逆映射 λ^{-1}: $C\to\tilde{S}\times D$ 是度量空间上的连续的集值映射(其中 $\tilde{S}\subseteq S$) [1].

这即表明推论 6.6.1 中的(6.6.12)式决定的广义逆映射

$$\lambda^{-1}(c_0(\boldsymbol{u}_0))=X(\boldsymbol{u}_0) \qquad —(6.6.14)$$

也是连续的集值映射. 这里因为 c_0 显然地与 $\boldsymbol{u}_0$ 有关,故将 c_0、X 均表示成 $c_0(\boldsymbol{u}_0)$、$X(\boldsymbol{u}_0)$. 因为 $\boldsymbol{u}_0$ 是任取的,故取消下标,直接写成

$$\lambda^{-1}(c(\boldsymbol{u}))=X(\boldsymbol{u}) \qquad \boldsymbol{u}\in D\subset R^n \qquad —(6.6.15)$$

---

[1] 参见前注,第五章 5.1、5.2 节内容.

推论 6.6.4 设 $\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ 是满足推论 6.6.1 的乘子函数，则存在定义在 $X(\boldsymbol{u})$ 上的连续可微的单值映射 $p: X(\boldsymbol{u}) \to \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) \in X(\boldsymbol{u})$，且 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ 是关于 $\boldsymbol{u}$ 的可微函数. ■

证明： $X(\boldsymbol{u})$ 在 $\boldsymbol{u} \in D$ 被给定时是闭的，故在 $X(\boldsymbol{u})$ 上可以定义关于 $\boldsymbol{x} \in X$ 的极值函数 $p(\boldsymbol{x})$，且 $p(\boldsymbol{x})$ 是单值、单峰的二阶可微函数，则规划

$$\begin{cases} \max: p(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t. } \boldsymbol{x} \in X \end{cases}$$

p 的最大值一定可以取到. 设 $\boldsymbol{x}^* \in X$ 是使 p 取最大值的点. 则 $\boldsymbol{x}^*$ 依包络定理是关于 $\boldsymbol{u}$ 参数向量的可微函数. 即证.

以上的分析对于 R^m 空间上的 n 维曲面的极值法向量组的存在性及可微性给予了一个补充说明.

将推论 6.6.4 中的映射 p 理解为在 X 集合上定义了一个选择的算法，那么，它即表明在(2.4.4.13)式规划出现多重极值点的状况下，可以附加一个适当的选择算法，以保证由此选择算法给出的 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) \in X$ 关于 $\boldsymbol{u}$ 可微. 因此这时 n 维曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ 的定义域应当由这一选择算法的有效区域所决定.

例 6.6.2 设 $N = 3$，$n = 6$，有 R^9 空间上的 6 维曲面决定的极值法方向规划

$$\begin{cases} \text{极值:} & F(\boldsymbol{x}) = -a(x_1^2 + x_2^2)^3 + bx_3^6 \quad a、b > 0 \\ \text{s.t.} & h(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

由

$$\nabla F = \begin{bmatrix} -6a(x_1^2 + x_2^2)^2 x_1 \\ -6a(x_1^2 + x_2^2)^2 x_2 \\ 6bx_3^5 \end{bmatrix} \qquad \nabla h = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 F = \begin{bmatrix} -6a(x_1^2+x_2^2)^2 - 24a(x_1^2+x_2^2)x_1^2 & -24a(x_1^2+x_2^2)x_1x_2 & 0 \\ -24a(x_1^2+x_2^2)x_1x_2 & -6a(x_1^2+x_2^2)^2 - 24a(x_1^2+x_2^2)x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 30bx_3^4 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 h = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

取 $\lambda = -3a(x_1^2 + x_2^2)^2$ 为乘子，并令 $\nabla F - \lambda \nabla h = \mathbf{0}$，即得

$$6bx_3^5 - (-3a(x_1^2 + x_2^2)^2) \cdot 2x_3 = 0$$

以解出多重极值点.

显然，$x_3=0 \quad x_1^2+x_2^2=1$ 为多重极值点，$\lambda=-3a$. 故

$$\lambda^{-1}(-3a)=\{\boldsymbol{x} \mid x_3=0,\ x_1^2+x_2^2=1\}=X$$

X 集合为 R^3 的单位球面与 Ox_1x_2 坐标平面交圆周闭曲线.

在 X 上可以任意定义一个选择，如取

$$\boldsymbol{e}_1=(1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{e}_2=(0,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\in X$$

则 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 即为所选取的且正交的单位向量. 且 X 集合与 a、b 的取值无关. 故如视 $a=a(\boldsymbol{u})$、$b=b(\boldsymbol{u})$，则 $\boldsymbol{e}_{1,2}$ 关于 $\boldsymbol{u}$ 可微，且

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_{1,2}}{\partial \boldsymbol{u}}=0$$

本例规划的另一个（单重）极值点显然可取为 $\boldsymbol{e}_3=(0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{e}_3$ 关于 $\boldsymbol{u}$ 亦可微. 设 $a>b$，则 $\mid F(\boldsymbol{x})\mid$ 的第一极大值即为 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$；第二极大值即为 $\boldsymbol{e}_3$. 故 $\boldsymbol{e}_{1,2,3}$ 即成为决定曲面 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})\ \boldsymbol{u}\in D\subset R^6$ 上的极值法方向向量组参数向量（即 §2.4.4 节所使用的符号 $\boldsymbol{t}^*$ 向量）.

最后，可以指出，对于一般的非线性规划

$$\begin{cases}\min \quad f(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a}) \\ \text{s. t. } \ g_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0 \quad i=1,\ \cdots,\ k\end{cases} \quad (\boldsymbol{a}\ \text{是参数向量})$$

设 $\boldsymbol{x}^0$ 是该规划的多重极小值点，$\lambda(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{a})$ 是乘子（函数）. 记

$$f(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{a})=c_0$$

则对 $\tilde{\boldsymbol{x}}\in f^{-1}(c_0,\ \boldsymbol{a})$，$\lambda(\tilde{\boldsymbol{x}},\ \boldsymbol{a})$ 不一定是常数，以及这样的 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 也不一定是局部极小值点. 如

例 6.6.3

$$\begin{cases}\min \quad f(\boldsymbol{x})=\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{x_2^2}{a^2} \quad (a\neq 0) \\ \text{s. t. } \ g(\boldsymbol{x})=x_1+x_2\geqslant 0\end{cases}$$

由

$$\nabla f=\frac{2}{a^2}\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2\end{bmatrix} \quad \nabla g=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

取极值点集合为

$$\{\boldsymbol{x}^0\}=\left\{\boldsymbol{x}\ \middle|\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}t \quad 0<t<+\infty\right\}$$

乘子函数为

$$\lambda = \frac{2}{a^2}t > 0 \quad (t > 0)$$

则对 $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \{\boldsymbol{x}^0\}$ 总有

$$\nabla f(\tilde{\boldsymbol{x}}) - \lambda(\tilde{\boldsymbol{x}}, a) \cdot \nabla g(\tilde{\boldsymbol{x}}) \equiv \boldsymbol{0}$$

再由

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) - \lambda \cdot \nabla^2 g(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{2}{a^2}$$

以及

$$\hat{\hat{Z}}^1(\{\boldsymbol{x}^0\}) = \left\{ \boldsymbol{\alpha} \middle| \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} s \quad s \in R \right\}$$

所以

$$\frac{2}{a^2}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \equiv 0 \quad \boldsymbol{\alpha} \in \hat{\hat{Z}}^1(\{\boldsymbol{x}^0\}) \quad \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$$

因此$\{\boldsymbol{x}^0\}$为本例规划的弱局部极小值点集合. 但现在对于 $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \{\boldsymbol{x}^0\}$，显然 $\lambda(\tilde{\boldsymbol{x}}, a)$ 不是常数. 现 $f(\{\boldsymbol{x}^0\}) = 0$. 则记广义逆映射 f^{-1} 在 $g(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 限制下的 0 值点的集值映射为

$$f^{-1}(0, a) = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = 0, x_1 + x_2 \geqslant 0\}$$

就有

$$f^{-1}(0, a) = \left\{ \boldsymbol{x} \middle| \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} t \quad \text{or} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} s \quad t \in R, s \geqslant 0 \right\}$$

因此，$f^{-1}(0, a)$ 是闭的但$\{\boldsymbol{x}^0\}$是开的，且

$$\{\boldsymbol{x}^0\} \subset f^{-1}(0, a)$$

故 $\tilde{\boldsymbol{x}} \in f^{-1}(0, a)$ 不一定成立 $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \{\boldsymbol{x}^0\}$.

推论 6.6.5 (6.6.1)式规划存在多重极值点的充要条件是其目标函数 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$在(6.6.4)式给出的广义极坐标变换下得到的函数形式 $\rho(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{u})$满足

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial \boldsymbol{\theta}^2}\right) < N - 1$$

■

对极值条件 $\frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{0}$ 给出的函数方程组，由多元隐函数定理即可证明这一推论的充分性，再由求解非线性方程组的 Newton 算法即可证其必要性.

系 6.6.6 (6.6.1)式规划的目标函数在广义极坐标变换下的形式 $\rho(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{u})$ 中,若不显含 θ_i $1 \leqslant i \leqslant N-1$,则必有多重极值点存在.

■

如例 6.6.2 中的 $F(\boldsymbol{x})$,经广义极坐标变换,即为

$$\rho(\theta_1, \theta_2) = -a\cos^6\theta_1 + b\sin^6\theta_1$$

因 $\rho(\boldsymbol{\theta})$不显含 θ_2 故必存在多重极值点.

后　记

经过近一年多时间的紧张写作，再经数个月的排版、编校工作，这本书终于完成了.

作为作者在漫长的经济学范式研究中的一项副成果，本书的写作与出版，得益于许多朋友的帮助与支持. 如得到高全建、何中良、金勇先生多年以来给予作者许多的和一贯的财经上的支持并给予了一个相当宽松的工作环境，无此条件，是不可能写作本书的. 杨兆和、陈乐波、耿军宁、陈江等友人，多年来也始终支持并关注作者的著述与研究. 还有胡德平、黄方毅、韩军、崔鹤鸣、郑绍昌等朋友，与他们的交往(包括争辩)总是令人愉悦并振奋之事. 而就本书的顺利出版发行而言，应特别提及严搏非先生的关心与无私的帮助. 在这里，应当诚挚地感谢上面提及(和未提及)的所有朋友们. 当然，也应当感谢我的妻子曹丹萍，没有她在家务上的完全支持，我所集中精力于研究与写作就不再可能. 最后，还应感谢新星出版社的编审人员和南京展望文化发展有限公司的排版校次人员，正是他们的工作责任心保证了本书编印的品质.

按惯例，应当说明，本书的内容由作者独立完成，因此，本书的错误也只由作者本人负责而与其他人无关.

2007.12

Summary

The focus of this book is to establish a new application branch of matrix characteristic value — the analysis method for the quasi-characteristic value (and vector) of real symmetric matrix. The geometric meaning of the quasi-characteristic value of the real symmetric matrix consists in that it is exactly proportional to principal normal curvature of the surface. Therefore, it has important theoretical and application value. Based on this, this book also involves quite a few of applications of the analysis method of quasi-characteristic value (vector) in the field of the classical differential geometry and the nonlinear programming. Hence, this book especially opens up the new descriptions covering many an aspect involved in the classical differential geometry and the nonlinear programming. For instance, in the aspect of differential geometry, the book cites and perfects the multi-vector product method in R^m Euclidean space, thereby extending the analysis method of the first and second elemental differential forms in the classical differential geometry for R^3 space to R^m space while offering the Gauss-Codazzi equation on n dimensional surface ($1 \leqslant n < m-1$) in R^m space, and discussing the structure of the geometric solution of vacuum Einstein equation, and others; In the aspect of nonlinear programming, the book presents the solution space structure of Lagrange multiplier, and analyzes the relevant structures of linearization cone, closed tangent cone and positive normal cone at the points of the extreme value, and gives the geometric meaning of the first and second order constraint qualifications, and educes the necessary and sufficient form of Kuhn-Tucker conditions as well as applicable discriminant methods for the second order sufficient condition and etc. As another analysis tool involved, this book also constructs the method for the solution of the linear inequations. By using this method, a great variety of the linear inequation sets could be ranged into two forms of $C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$) and $C\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$); and under the extended polyhedroid representation theorem, the construction method of its solution space could be available.

The book is designed to be read or used by the researchers, teachers and college students in mathematics and (or) economics who have been provided with the knowledge of general advanced mathematics, linear algebra and classic differential geometry.

Table of Contents

Introduction

A noted economist (who can also be called a mathematician) Gerarad Debreu made a theme speech on 'smooth preferences' at an Econometrics meeting held in Barcelona in September 1971.

In this speech, Debreu brought out an important inference for the Gaussian curvature $\kappa(\boldsymbol{x}^0)$ at the $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0$ point in the hyper-surface $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=c$ (c is constant) of m-dimensional Euclid space R^m, namely,

$$\kappa(\boldsymbol{x}^0) = -\frac{\begin{vmatrix} \nabla u(\boldsymbol{x}^0) & \nabla u(\boldsymbol{x}^0) \\ \nabla u(\boldsymbol{x}^0) & 0 \end{vmatrix}}{\| \nabla u(\boldsymbol{x}^0) \|^{m+1}}$$

Note: The numerator on the right side of the equation is in fact the bordered determinant of Hessianu matrix in terms of $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ function.

This conclusion Debreu brought out is certainly correct, and also the Gaussian curvature is expressed as the ratio of the Hessian matrix determinant to the gradient vector norm in a very simple form. Therefore it can be easily extended to solve the problem as to determine the Gaussian curvature of the surface in a high-dimensional space. Therefore, even if we "neglect" — when in fact we should never neglect — the other theoretical significance of this result, as to only the predominance in the calculation of the surface curvature for the high-dimensional space (because the determinantal algorithm was highly developed and efficient in terms of its procedures), at least it should cause people's concern. But since the publication of the Debreu's outcome, the fact has seemed exactly to the opposite. People have not yet paid enough attention to this outcome. For example, (it seems) no one has mentioned Debreu's such an important contribution in the literature on the differential geometry surface theory that takes the surface curvature as one of the central issues.

There must have been some specific reasons why this accurate outcome containing a major theoretical value for a long time has not yet be of people's concern. One of the geneses of the writing is to clarify these reasons and to explore Debreu's outcome so as to realize its theoretical value contained.

This book is divided into five chapters, namely,

Chapter 2 —— the extension of the basic concepts of the classical differential geometry to the space R^m. The content of this chapter is preparatory to Chapter 3 in terms of its logical structure, but this chapter also has its own importance. For example, in § 2. 4, the multiple vector product method is established for the space R^m. Therefore, with this method, the first and the second basic differential forms of the regular parameters surface patch in the space R^3 can be directly and easily extended to the space R^m. Because it is not necessary to discuss more of the significance of the first and the second basic differential forms, many an important theorem derived from the use of such basic differential forms in R^3 space in the classical differential geometry can be easily extended to the space R^m. However it has to be noted that the extension of some theorems will create some meanings. For example, as far as the famous Gauss Egregium theorem (see § 2. 3. 1) can go, in the general space R^m, this theorem does not hold water strictly. (that is to say, by using only the first basic invariant and its partial derivative of the surface, the absolute value of the total curvature of this surface can be attained while the symbols of the total curvature can not be determined).

By using the multiple vector product method, the first and the second basic forms of the n-dimensional space in the R^m Space and Gauss-Codazzi equation are given in § 2. 4. 4 where it is noted that when the $1 \leqslant n < m-1$ there is a kind of surfaces with the isotropy at normal direction (by comparison, a spherical should be seen as a surface of tangential isotropy).

Here the constraints of the intrinsic geometric analysis method are also pointed out. In case of n-dimensional surface ($1 < n < m-1$) in the R^m space, the Gaussian curvature can not be expressed by the first basic invariables and its partial derivative.

Others in Chapter 2 involve the Frenet frame analysis for the curve in the space R^m, as is known in terms of its conclusions. However, here also described is the chirality of the local coordinate system for the curve as well as the issues based on this of taking the sign for the torsions of various orders of the Frenet frame coefficient matrix.

Chapter 2 also includes the issues as to determine the first and the second basic forms of a regular surface based on the general surface function form. $f(\boldsymbol{x})=0$ $\boldsymbol{x} \in D_x \subset R^m$ forms as well as others such as the expressions of the concepts as normal curvature and principle normal curvature in such a general surface

function. It should be pointed out that the differential geometry involved in this book refers only to some basic concepts from the classical differential geometry and mainly limited to the part as the surface theory. Little is covered on the further analysis by means of using various manipulation tools based on above these concepts.

Chapter 3 —— The quasi-characteristic value and vector of bordered real symmetric matrix. This chapter can be regarded as the "core" of the book because it sets up a new analytical tool for the bordered real symmetric matrix in this chapter, i. e. the analysis method for the quasi-characteristic (vector) value.

The quasi-characteristic value of bordered matrix A_b

$$A_b = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

is defined as the root "μ" of polynomial

$$\begin{vmatrix} \mu \boldsymbol{I}_m - A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \boldsymbol{I}_m - m\text{-order unit matrix}$$

constituted by $m \times m$-order matrix "A" and m-order vector "$\boldsymbol{b}$".

From above we can identify the difference between the definitions of quasi-characteristic value "$\boldsymbol{u}$" and that of the A_b matrix.

If the "A" and "$\boldsymbol{b}$" are considered to be respectively the Hessian matrix and the gradient vector of the general curve surface function $f(\boldsymbol{x}) = 0$ of a certain R^m space, then the number of the quasi-characteristic value "μ" according to the above-mentioned formula happens to be $m-1$, and also the relationship between these quasi-characteristic values and the principal normal curvature "κ" is:

$$\kappa_i = -\mu_i / \| \nabla f(\boldsymbol{x}^0) \| \qquad i = 1, \cdots, m-1$$

This formula has provided the geometric meaning of the quasi-characteristic value while the corresponding characteristic vector can be defined to be the one of the principal normal direction of all the spaces within the curve surface. Seen from this, there is a close relationship between the analysis of the quasi-characteristic value (vector) of the boarded real symmetric matrix and the curvature theory of differential geometry.

So a new approach to analyze the curvature of a curve surface can be opened up by

using the analysis method for the quasi-characteristic value in connection with the general curve surface function. Incidentally, the problem involved in the Debreu theorem (as mentioned above) can be solved with facility due to this.

As the existing literature on the matrix algebra is empty of the analysis of the quasi-characteristic value, Chapter 3 has to devote itself to the theoretical framework about the establishment of the analysis of matrix involved in the quasi-characteristic value and the vector. The part is considerably rich in content. Fortunately, the matrix algebra is highly developed when it comes to a mathematics branch. Therefore most of the principal theorems involved might be extended from the existing results from what has been achieved from the matrix algebra.

It should also be noted that the methods for analyzing the quasi-characteristic value(vector) as well as those in the classical deferential geometry are adopted in 3.2.5～3.2.6 to analyze the line of curvature, the geodesic and Darboux frame (geodesic Frenet frame), Dupin ennuple and asymptote and others — the special curves on the curved surface of a R^m space. Also the part involves quite a number of new conclusions. For instance, the geodesic equation is educed for R^m space curved surface (non-intrinsic geometric form):

$$(\boldsymbol{I}_{m-1} - \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}})\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{I}_{m-1} - (m-1)\text{-order unit matrix}$$

Where "$\boldsymbol{n}$" refers to the unit normal vector, "$\ddot{\boldsymbol{x}}$" refers to second derivative vector of the geodesic function $\boldsymbol{x}(s)$. This is a simple and beautiful equation in terms of its structure, and it is the equivalent equation to the geodesic one (intrinsic geometric form) of the Riemann manifold.

Chapter 4 —— Curvature tensor The chapter is the integrated application of the previous ones. It deals with several important issues: Riemann section curvature, Ricci curvature tensor (scalar), Einstein space and geometry solution of the vacuum Einstein equation. Here none of the method as tensor analysis is adopted, and all of the derivations only involve one for the classical calculus and matrix algebra. This is because of the fact that in fact the tensors indicated by R_{iijk} and R^k_{iij} of Riemann are a second-order determinant(minor). In particular, the symbol R_{iijk} is equivalent to second order minor of the second basic invariant matrix of the surface. Similarly, the curvature tensor R_{ij} of Ricci can be expressed by the second order minor of Weingarten mapping matrix.

The issue of the constant curvature surface also is stated in this chapter. When the surface is constant curvature surface under the first basic differential form

given by the form of isothermal parameters, then the isothermal parameters $v(\boldsymbol{x})$ is the solution of a second order partial differential equation. In the space of R^{m+1} under the condition of $m=6$, for the

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + m\kappa v^2 = 0$$

the metric

$$v(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\left(1+\frac{\kappa}{4}(x_1^2+\cdots+x_m^2)\right)^2}$$

given by Riemann and the Poincaré upper half-plane metrics

$$v(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{x_m^2}$$

are all the particular solutions of the partial differential equation of second order.

The geometric solution of the Einstein equation is stated particularly in this chapter.

The "geometric solution" refers to the metric "g" which can be constructed in the form of a surface function under the conditions that the elements contained in the quadratic matrix of "g" is in a position to just meet the conditions required for the solutions of the vacuum Einstein equation. The analysis shows that the geometric solutions once classified according to the property of the Weingarten mapping matrix of the surface only can be the trivial solution, rank one solution and (rank one and two) nilpotent solution and hence the corresponding examples are listed herein. In the meanwhile, the analysis shows that (analytical solution) the non-geometric solution occurs in the vacuum Einstein equation. For example, the famous K. Schwarzschild metric is a non- geometrical and analytical solution.

Chapter 5 —— The solution of the linear inequation set The reasons why the solutions of the linear inequation set is inserted here are that this is involved in the analysis of the Dupin ennuple in terms of differential geometry and that of the conditions of Kuhn-Tucker in Chapter 6. For example, the analysis of the conditions of Kuhn-Tuckerthe involves six sets of the linear inequations with different contents and forms.

Compared with the linear equation set, the theory on the linear inequation set

is very inadequate in the traditional literature on linear algebra. Hence the Chapter 5 is required to touch many aspects on the linear inequation The analysis in Chapter 5 shows that a great variety of linear inequations can be summed up as the following two standard forms for resolutions

$$\begin{cases} Cx \geqslant \mathbf{0} \\ x \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} Cx \geqslant b \\ x \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

while the solutions of the two linear inequations can be constructed by the polyhedroid representation theorem (expanded). Based on this, much has been devoted in Chapter 5 to the arithmetic descriptions of the solutions to the linear inequation sets and examples, and at the same time, the representation theorem for the range of the matrix A determined by the type of inequation sets such as ones under the condition of $\boldsymbol{Ax} \geqslant \mathbf{0}$. This theorem is of great significance in understanding the geometric attributes of the solution space of the inequation sets.

It can be understood due to the analysis in the Chapter 5 that the matrix — one of the most important mathematical concepts in computer times — may and shall be established on the basis of the theorem of the linear inequation set. This is also dealt with in Chapter 5. Foe example, the geometric model (phragmocone) of the inverse matrix A^{-1} of the invertible matrix A, as well as the model of the general inverse matrix A^{+} are available in Chapter 5.

Chapter 6 —— Kuhn-Tucker conditions of nonlinear programming theory. Nonlinear programming theory is one of the mathematical foundations of micro-economics. As to the main research direction (Economics) taken by the author, the theory of nonlinear programming is undoubtedly of special significance. But there are more direct reasons as follows why an exclusive chapter is set to discuss Kuhn-Tucker conditions within the framework of this book: One is that in the mathematical model of real bordered symmetric matrix involved in the analysis of the quasi-characteristic value theory, there is a matrix — the bordered Hessian matrix for the language function that appears in the theory of nonlinear programming, or that the relevant conclusions of the quasi-characteristic value theory have to be applied necessarily in the theory of nonlinear programming; the other is that there will have some improvements in the traditional literature on the K - T theorem. For example, the form of necessary and sufficient conditions of K - T is not given. The another example is that neither is the clear explanation of the meaning of the first and the second order constraint qualification of the K - T conditions is given, nor is a clear

method and the explanations in terms of its geometric meaning for the application of K - T theorem airs done. (because there is no complete theory about the solution of the linear inequation and no surface Dupin ennuple of the space R^m). However, all these problems are specifically detailed in the book.